

© 2022 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

\mathcal{L}_1 -ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ III: ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ¹

Работа является продолжением цикла статей [1, 2] и посвящена решению задачи оценивания параметров скрытых марковских моделей. В качестве скрытого состояния выступает однородный марковский скачкообразный процесс с конечным множеством состояний. Доступные наблюдения являются косвенными и содержат винеровские процессы, интенсивности которых различны и зависят от скрытого состояния. Оцениванию подлежат как матрица интенсивностей переходов марковского состояния, так и параметры сноса и диффузии наблюдений. Для идентификации предложен итеративный алгоритм, основанный на сглаживании состояния системы по наблюдениям на фиксированном интервале времени. Затем по данным оценкам восстанавливаются параметры. В работе детально описаны все численные схемы оценивания состояния и идентификации параметров. Приведен комплекс иллюстративных численных примеров, демонстрирующих высокое качество предлагаемых оценок идентификации.

Ключевые слова: скрытая марковская модель, мультипликативные шумы в наблюдениях, сглаживание на фиксированном интервале наблюдения, \mathcal{L}_1 -оптимальная оценка, EM-алгоритм.

DOI: 10.31857/S0005231022110058, EDN: КЕКЧУ

1. Введение

Проблемам идентификации параметров систем наблюдения, состояния которых описываются марковскими процессами с конечным множеством возможных состояний, скоро исполнится 60 лет [3, 4]. Несмотря на возраст, теоретические решения и алгоритмы их реализации [5–7] не теряют своей актуальности из-за своей востребованности для решения широкого спектра прикладных задач системного анализа. Другой причиной неослабевающего внимания к проблемам идентификации является постоянное расширение классов систем наблюдения и моделей доступной измерительной информации.

¹ Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН, Москва.

К настоящему времени существуют оценки параметров марковских цепей по наблюдениям с аддитивными и мультипликативными шумами [8], а также *марковских скачкообразных процессов* (МСП) по непрерывным косвенным наблюдениям в присутствии аддитивных винеровских процессов [9–11].

Целью данной статьи является разработка нового алгоритма идентификации параметров *скрытых марковских моделей* (СММ) с непрерывным временем по наблюдениям, шумы в которых зависят от скрытого состояния. Обычно такие шумы называют мультипликативными. Задачи оценивания состояний и параметров систем по наблюдениям такого типа исследуются достаточно редко из-за известных теоретических сложностей [12, 13]. Корректная постановка и формальное решение задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по диффузионным наблюдениям с мультипликативными шумами совместно с реализующим его комплексом численных методов представлены в [1, 2]. Данная статья является естественным продолжением этих исследований.

Работа организована следующим образом. Раздел 2 содержит описание исследуемой системы наблюдения и постановку задачи идентификации ее параметров. Раздел включает сравнение различных СММ, для которых задача идентификации решалась с помощью EM-алгоритма. В разделе также представлены доводы в пользу предлагаемого алгоритма идентификации. Они основываются на возможности построения для исследуемых СММ высокоточных оценок сглаживания на фиксированном интервале для скрытого состояния в случае выполнения некоторых необременительных условий идентифицируемости. В разделе 3 представлен численный алгоритм двухфильтрового сглаживания, позволяющий получить искомую сглаженную оценку в виде некоторой комбинации оценок фильтрации состояния МСП в прямом и обратном времени.

Раздел 4 посвящен алгоритмам фильтрации состояний МСП в прямом и обратном времени по диффузионным наблюдениям, предварительно дискретизованным по времени. В контексте работы численные алгоритмы оценивания состояния МСП называются *устойчивыми*, если они гарантируют доставляемым оценкам выполнение условий неотрицательности компонент и нормировки. Например, численный алгоритм фильтрации, основанный на схеме Эйлера–Маруямы решения *стохастической дифференциальной системы* (СДС), описывающей фильтр Вонэма, не обеспечивает выполнения этих условий: как только они нарушаются, вычисленные по данной схеме оценки “взрываются”. Именно в контексте этого явления предложенные алгоритмы названы устойчивыми.

Вычисление сглаженных оценок состояния представляет собой E-шаг в EM-процедуре. M-шаг и вся процедура идентификации описаны в разделе 5. В нем представлены формулы пересчета \mathcal{L}_2 -оптимальных оценок сглаживания в \mathcal{L}_1 -оптимальные, а также формулы вычисления функционалов от траекторий наблюдений и оценок МСП, на основании которых собственно и

вычисляются оценки параметров СММ. Предложенные в работе алгоритмы оценивания состояния МСП и идентификации параметров СММ названы *эффективными* в том смысле, что они не являются сеточными. При решении задач оценивания состояния МСП это означает, что алгоритмы не требуют решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных типа Закаи или Кушнера–Стратоновича. При решении задачи идентификации это означает, что алгоритм не привлекает аппарат байесовского оценивания и описания оцениваемых параметров с помощью их вероятностного распределения. С вычислительной точки зрения это означает, что эффективные алгоритмы используют радикально меньше оперативной памяти и требуют меньше вычислений для своей реализации.

Раздел 6 содержит результаты комплекса иллюстративных вычислительных экспериментов. Проведен численный анализ качества оценок фильтрации в прямом и обратном времени состояния МСП в сравнении с оценками сглаживания на фиксированном интервале наблюдения. Сравнение проведено для случая известных параметров СММ. Представлены результаты оценивания параметров СММ, выполненного с помощью предложенного алгоритма идентификации. Исследовано качество последующей фильтрации скрытого состояния МСП с использованием идентифицированных параметров в сравнении с “идеальным вариантом”: фильтрацией состояний при точно известных параметрах системы наблюдения. Раздел 7 содержит заключительные замечания.

2. Постановка задачи

На триплете с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ рассматривается СММ

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + M_t^X, \quad t \in [0, T],$$

$$(2) \quad \mathcal{Y}_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{\frac{1}{2}} dW_s, \quad r \in \{1, \dots, R\}, \quad t_r = r\delta, \quad T = R\delta,$$

где

- $X_t = \text{col}(X_t^1, \dots, X_t^N) \in \mathbb{S}^N$ — ненаблюдаемое состояние, являющееся однородным МСП с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\}$ (\mathbb{S}^N — множество единичных векторов евклидова пространства \mathbb{R}^N), матрицей интенсивностей переходов (МИП) Λ и начальным распределением $\pi = \text{col}(\pi^1, \dots, \pi^N)$; процесс M_t^X является \mathcal{F}_t -согласованным мартингалом,
- $\mathcal{Y}_r = \text{col}(\mathcal{Y}_r^1, \dots, \mathcal{Y}_r^M) \in \mathbb{R}^M$ — диффузионные наблюдения

$$(3) \quad Y_t = \int_0^t f X_s ds + \int_0^t \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{\frac{1}{2}} dW_s,$$

дискретизованные по времени с шагом δ ; $W_t = \text{col}(W_t^1, \dots, W_t^M) \in \mathbb{R}^M$ является \mathcal{F}_t -согласованным стандартным винеровским процессом, характеризующим шумы в наблюдениях, $M \times N$ -мерная матрица f и набор $M \times M$ -мерных матриц $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ определяют снос и интенсивность шумов при условии $X_t = e_n$.

Ниже в изложении неубывающее семейство σ -подалгебр, порожденных наблюдениями \mathcal{Y} , полученными до момента времени t_r , обозначено $\mathfrak{Y}_r \triangleq \{\mathcal{Y}_q : q = \overline{1, r}\}$, $\mathfrak{Y}_0 \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$.

Для системы наблюдения (1)–(2) предполагаются выполненными следующие условия.

1. Триплет с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}\}_{t \in [0, T]})$ является пространством Винера–Пуассона [15].

2. Все параметры СММ Λ , f и $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ являются неизвестными неслучайными матрицами подходящей размерности.

3. Матрица Λ удовлетворяет условию $\min_{i, j: i \neq j} \lambda^{ij} > 0$, а также обычному тождеству МИП: $\sum_j \lambda^{ij} \equiv 0$.

4. Шумы в наблюдениях \mathcal{Y} равномерно невырождены [16], т.е. $\min_{1 \leq n \leq N} g_n > \alpha I > 0$ для некоторого $\alpha > 0$; здесь и далее I — единичная матрица подходящей размерности.

5. Набор матриц интенсивностей шумов $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ удовлетворяет *условию идентифицируемости* [14], заключающемуся в том, что все g_n различны.

Задача идентификации СММ заключается в построении оценок параметров Λ , f и $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ по имеющимся наблюдениям $\{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_R\}$.

Поставленная задача представляет собой аппроксимацию аналогичной задачи идентификации по исходным диффузионным наблюдениям (1), (3). В [9, 10] исследовалась схожая проблема. Наблюдения были скалярными с аддитивными винеровскими процессами (т.е. $g_n \equiv g = I$). Авторы представили процедуру совместной фильтрации состояния МСП и идентификации параметров, основанной на применении ЕМ-алгоритма. Собственно процедура идентификации параметров требовала оценки числа скачков МСП $e_i \rightarrow e_j$ ($i \neq j$)

$$(4) \quad N_t^{i, j} = \int_0^t X_s^i dX_s^j,$$

а также суммарного времени пребывания МСП в различных состояниях e_i

$$(5) \quad O_t^i = \int_0^t X_s^i ds, \quad i = \overline{1, N}.$$

В монографии [8] был исследован аналог системы (1), (3) с дискретным временем. В качестве доступных наблюдений выступал векторный процесс

с мультипликативным шумом. Авторы модифицировали EM-алгоритм, используя в нем не оценки фильтрации функционалов $\{N_t^{i,j}\}$, $\{O_t^i\}$, а их более точные аналоги, полученные сглаживанием на фиксированном интервале наблюдений, а также оценки дополнительных функционалов т.н. “уровневых сумм” (*level sums*):

$$(6) \quad Q_t^{i,q} = \int_0^t X_s^i q(Y_s) dY_s,$$

где $q = q(y)$ — некоторая детерминированная функция. Статья [11] была посвящена алгоритмам численной реализации решения задачи идентификации параметров СММ с дискретным временем по скалярным наблюдениям с аддитивными шумами неизвестной интенсивности ($g_n \equiv g$ — неизвестный скаляр). Идентификация в этом случае также проводилась с использованием оценок функционалов $\{N_t^{i,j}\}$, $\{O_t^i\}$ и $\{Q_t^{i,q}\}$, вычисленных на фиксированном интервале наблюдений.

В [14] представлено решение задачи оптимальной фильтрации состояния МСП по векторным диффузионным наблюдениям с мультипликативными шумами. Предложено некоторое преобразование, разбивающее исходные наблюдения на совокупность диффузионных процессов с единичной диффузией, а также набор считающих процессов и случайных векторов, доступных в неслучайные моменты времени. Аналитическое решение задачи фильтрации представлено в виде решения некоторой дискретно-непрерывной нелинейной СДС с непрерывными и считающими процессами в правой части. В статье показано, что выполнение условия идентифицируемости 5) достаточно для точного восстановления состояния МСП по имеющимся зашумленным наблюдениям.

К сожалению, решение указанной СДС не удастся реализовать численно с помощью известных классических методов [17] из-за того, что упомянутое преобразование наблюдений представляет собой результат двойного предельного перехода, примененного к исходным наблюдениям. Чтобы избежать численной реализации данной операции в [2] было предложено перейти к фильтрации по наблюдениям, предварительно дискретизованным по времени. Был представлен комплекс соответствующих численных алгоритмов, а также характеристики точности соответствующих оценок. Следует отметить, что оцениванию в [2] подвергалось только само состояние МСП X_t , а не процессы $\{N_t^{i,j}\}$, $\{O_t^i\}$ и $\{Q_t^{i,q}\}$, участвующие в процедуре идентификации. Идея предлагаемой статьи заключается в том, чтобы строить оценки этих процессов непосредственно путем обработки дискретизованных наблюдений, а на основе полученных оптимальных оценок сглаживания состояния X_t .

В статье используются следующие обозначения:

- $\mathbf{1}$ — вектор-строка подходящей размерности, состоящая из единиц,
- $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(x)$ — индикаторная функция множества \mathcal{A} ,
- $\|\alpha\|_K^2 \triangleq \alpha^\top K \alpha$,

- N_r^X — случайное число скачков состояния X_t , произошедших на интервале времени $[t_{r-1}, t_r]$,
- $\tau_r = \text{col}(\tau_r^1, \dots, \tau_r^N) \triangleq \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_s ds$ — случайный вектор, компоненты τ_r^n которого равны времени пребывания процесса X в каждом из возможных состояний e_n на интервале $[t_{r-1}, t_r]$,
- $\mathcal{D} \triangleq \left\{ u = \text{col}(u^1, \dots, u^N) : u^n \geq 0, \sum_{n=1}^N u^n = h \right\}$ — $(N-1)$ -мерный симплекс в пространстве \mathbb{R}^N ; \mathcal{D} является носителем распределения вектора τ_r ,
- $\Pi \triangleq \left\{ \pi = \text{col}(\pi^1, \dots, \pi^N) : \pi^n \geq 0, \sum_{n=1}^N \pi^n = 1 \right\}$ — “вероятностный симплекс”, содержащий возможные значения начального распределения π ,
- $\rho_r^{k,\ell}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r-1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \rho_r^{k,\ell}(du),$$

- $\rho_r^{k,\ell,q}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) \tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r) \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r-1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \rho_r^{k,\ell,q}(du),$$

- $\varrho_r^{k,\ell}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \tau_{r+1}$ при условии $X_{t_{r+1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_{r+1}) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r+1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \varrho_r^{k,\ell}(du),$$

- $\varrho_r^{k,\ell,q}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \mathbf{I}_{\{q\}}(N_{r+1}^X) \tau_{r+1}$ при условии $X_{t_{r+1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_{r+1}) \mathbf{I}_{\{q\}}(N_{r+1}^X) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r+1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \varrho_r^{k,\ell,q}(du),$$

- $\mathcal{N}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2} \det^{-1/2} K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|y - m\|_{K^{-1}}^2 \right\}$ — M -мерная гауссовская плотность со средним m и невырожденной ковариационной матрицей K ,
- $\xi \triangleq \text{vec}(\Lambda, f, \{g_n\}_{1,N}) - (N(N-1) + NM + NM^2)$ -мерный вектор оцениваемых параметров СММ,
- $Y_t \triangleq \sigma\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}$ — естественный поток σ -алгебр, порожденный непрерывными наблюдениями Y_s , полученными до момента времени t включительно.

3. Вспомогательная задача: сглаживание на фиксированном интервале наблюдения

Предлагаемый алгоритм идентификации параметров СММ основан на итеративном вычислении оценок $\{\widehat{X}_r^s\}_{r=\overline{1,R}}$: $\widehat{X}_r^s \triangleq \mathbf{E} \{X_{t_r} | \mathfrak{Y}_R\}$ сглаживания на фиксированном интервале наблюдения $[0, T]$. Для эффективной реализации этой процедуры предлагается использовать двухфилтровую процедуру сглаживания [18–20].

Во-первых, представим алгоритм вычисления оптимальной оценки фильтрации в прямом времени $\widehat{X}_r \triangleq \mathbf{E} \{X_{t_r} | \mathfrak{Y}_r\}$.

Для этого введем в рассмотрение следующие положительные случайные числа и матрицы, составленные из них:

$$(7) \quad \theta_r^{kj} \triangleq \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, f u, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j}(du), \quad \theta_r \triangleq \|\theta_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}.$$

Предложение 1. Условное математическое ожидание (УМО) \widehat{X}_r вычисляется по рекуррентной формуле

$$(8) \quad \widehat{X}_r = (\mathbf{1}\theta_r^\top \widehat{X}_{r-1})^{-1} \theta_r^\top \widehat{X}_{r-1}, \quad r > 0, \quad \widehat{X}_0 = \pi.$$

Доказательство предложения 1 вполне аналогично доказательству леммы 2 в [1].

Во-вторых, предложим мартингалное представление МСП X_t в обратном времени, а также формулы вычисления оптимальной оценки фильтрации состояния МСП в обратном времени.

На исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим

- поток σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t^r\}_{t \in [0, T]}$ в обратном времени: $\mathcal{F}_t^r \triangleq \sigma\{X_s, Y_T - Y_s : t \leq s \leq T\}$;
- набор дискретизованных наблюдений, $\mathfrak{Y}_r^b \triangleq \sigma\{\mathcal{Y}_q : r < q \leq R\}$; $\mathfrak{Y}_R^b \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$, полученных на интервале времени $(t_r, T]$.

Благодаря условию 3) компоненты распределения МСП $\pi(t) = \mathbf{E} \{X_t\}$, являющегося единственным решением системы уравнений Колмогорова $\pi(t) = \pi + \int_0^t \Lambda^\top \pi(s) ds$, строго положительны $\pi^n(t) > 0$ для любых $n = \overline{1, N}$ и $t > 0$ [16]. Поэтому можно корректно определить матричнозначную функцию

$$(9) \quad \Gamma(t) \triangleq \text{diag}^{-1} \pi(t) \Lambda^\top \text{diag} \pi(t) - \text{diag}^{-1} \pi(t) \text{diag} (\Lambda^\top \pi(t)),$$

являющуюся МИП процесса X_t в обратном времени.

Предложение 2. МСП X_t (1) является единственным сильным решением следующей стохастической системы в обратном времени

$$(10) \quad X_t = X_T + \int_t^T \Gamma^\top(s) X_s ds + \left[M_t^X - M_T^X - \int_t^T (\Gamma(s) + \Lambda)^\top X_s ds \right].$$

$$M_t^{bX} \triangleq M_t^X - M_T^X - \int_t^T (\Gamma(s) + \Lambda)^\top X_s ds$$

представляет собой \mathcal{F}_t^r -согласованный квадратично интегрируемый мартингал:

$$\mathbb{E} \left\{ M_t^{bX} | \mathcal{F}_s^r \right\} = M_s^{bX} \quad \text{P - н.н. для любых } 0 \leq t \leq s \leq T.$$

Доказательство предложения 2 приведено в [19, 21].

Для вычисления оценки фильтрации в обратном времени по аналогии с прямым временем определим следующие положительные случайные величины и матрицы из них:

$$(11) \quad \vartheta_r^{kj} \triangleq \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_{r+1}, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \varrho_r^{k,j}(du), \quad \vartheta_r \triangleq \|\vartheta_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}.$$

Можно показать, что оценка фильтрации $\widehat{X}_r^b \triangleq \mathbb{E} \{ X_{t_r} | \mathfrak{Y}_r^b \}$ состояния МСП в обратном времени может быть вычислена с помощью рекуррентного алгоритма — аналога (8)

$$(12) \quad \widehat{X}_r^b = (\mathbf{1} \vartheta_r^\top \widehat{X}_{r+1}^b)^{-1} \vartheta_r^\top \widehat{X}_{r+1}, \quad r < R, \quad \widehat{X}_R^b = \pi(T).$$

В-третьих, оптимальная оценка сглаживания на фиксированном интервале наблюдения может быть получена как симметричное преобразование оценок фильтрации в прямом и обратном времени.

Предложение 3. Оптимальная оценка сглаживания $\widehat{X}_r^s = \text{col}(\widehat{X}_r^{1s}, \dots, \widehat{X}_r^{Ns}) = \mathbb{E} \{ X_{t_r} | \mathfrak{Y}_R \}$, $r = \overline{0, R}$ поэлементно определяется формулой

$$(13) \quad \widehat{X}_r^{ns} = \frac{\widetilde{X}_r^{ns}}{\sum_{j=1}^N \widetilde{X}_r^{js}}, \quad n = \overline{1, N},$$

где ненормированная оценка $\widetilde{X}_r^s \triangleq \text{col}(\widetilde{X}_r^{1s}, \dots, \widetilde{X}_r^{Ns})$ является функцией оценок фильтрации в прямом \widehat{X}_r и обратном \widehat{X}_r^b времени, а также априорного распределения $\pi(t_r)$:

$$(14) \quad \widetilde{X}_r^{ns} = \frac{\widehat{X}_r^n \widehat{X}_r^{nb}}{\pi^n(t_r)}, \quad n = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, R}.$$

Доказательство предложения 3 аналогично доказательству теоремы 4 в [20].

4. Численный алгоритм решения задачи фильтрации

Ни условное распределение $\rho^{k,\ell}$ в прямом времени, ни его аналог $\varrho^{k,\ell}$ в обратном времени не являются абсолютно непрерывными по мере Лебега, поэтому вычисление интегралов (7) и (11) является нетривиальной задачей.

По формуле полной вероятности

$$\theta_r^{kj} \triangleq \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j}(du) = \sum_{q=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j,q}(du).$$

Явный вид отдельных слагаемых $\rho^{k,\ell,q}$ представлен в [2] для $q = 0, 1, 2$, общий же вид может быть выведен также с использованием формулы полной вероятности. Было показано, что в этом нет необходимости: при достаточно малом шаге δ бесконечная сумма в последней формуле хорошо аппроксимируется первыми двумя слагаемыми ($q = 0$ и 1). В этом случае оценка \widehat{X}_r приближается *аналитической аппроксимацией порядка 1*:

$$(15) \quad \widehat{X}_r = (\mathbf{1}_{\mathcal{X}_r}^\top \widehat{X}_{r-1})^{-1} \mathcal{X}_r^\top \widehat{X}_{r-1}, \quad r > 0, \quad \widehat{X}_0 = \pi,$$

где

$$(16) \quad \mathcal{X}_r^{kj} \triangleq \sum_{q=0}^1 \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j,q}(du), \quad \mathcal{X}_r \triangleq \|\mathcal{X}_r^{kj}\|_{k,j=1,\overline{N}}.$$

Данное приближение учитывает не более одного скачка МСП на интервале дискретизации $[t_{r-1}, t_r]$. Если $\bar{\lambda} \triangleq \max_{1 \leq n \leq N} |\lambda_{nn}|$, и шаг δ так мал, что $\bar{\lambda}\delta < 1$, то (см. [2])

$$(17) \quad C \triangleq e^{-\bar{\lambda}\delta} \frac{2}{(\bar{\lambda}\delta)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\bar{\lambda}\delta)^k}{k!} < 1,$$

и точность аппроксимации характеризуется неравенством

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \widehat{X}_r - \widehat{X}_r \right\|_1 \right\} \leq 2 - 2 \left(1 - C \frac{(\bar{\lambda}\delta)^2}{2} \right)^r \sim \bar{\lambda}^2 \delta t_r \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Элементы \mathcal{X}_r^{kj} имеют следующий явный вид:

$$(18) \quad \mathcal{X}_r^{kj} = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj}\delta} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_r, \delta f^j, \delta g_j) + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj}\delta} \int_0^\delta V^{kj}(\mathcal{Y}_r, u) du,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, а

$$(19) \quad V^{kj}(y, u) \triangleq e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (\delta - u) f^j, u g_k + (\delta - u) g_j).$$

Интеграл в (18), а вместе с ним и вся аппроксимация $\widehat{\mathbf{X}}_r$ не могут быть вычислены аналитически, поэтому их приходится находить численно, внося дополнительную ошибку. Для этого предлагается использовать составной метод средних прямоугольников с малым шагом $\delta^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$:

$$(20) \quad \begin{aligned} \zeta_r^{kj} \approx \psi_r^{kj} \triangleq \delta_{kj} e^{\lambda_{jj}\delta} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_r, \delta f^j, \delta g_j) + \\ + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} \delta^{1+\alpha} \sum_{i=1}^{[\delta^{-\alpha}]} V^{kj} \left(\mathcal{Y}_r, \delta^{1+\alpha} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Используя обозначения $\psi_r \triangleq \|\psi_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}$, можно представить численную аппроксимацию порядка $\min(\alpha, 1)$, основанную на составной схеме средних прямоугольников

$$(21) \quad \widehat{\mathbf{X}}_r = (\mathbf{1}\psi_r^\top \widehat{\mathbf{X}}_{r-1})^{-1} \psi_r^\top \widehat{\mathbf{X}}_{r-1}, \quad r > 0, \quad \widehat{\mathbf{X}}_0 = \pi.$$

Суммарная ошибка аппроксимации $\widehat{\mathbf{X}}_r$ характеризуется следующим неравенством [2]:

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \widehat{\mathbf{X}}_r - \widehat{\mathbf{X}}_r \right\|_1 \right\} \leq C_1(\delta + C_2\delta^\alpha)t_r$$

для некоторых положительных констант C_1 и C_2 . Из этого неравенства следует, что рациональным с точки зрения точности выбором параметра α будет 1.

Все рассуждения выше относились к аппроксимации оценки фильтрации в прямом времени. Данный подход может быть применен и при вычислении оценки фильтрации в обратном времени. Как и в случае прямого течения времени предполагается, что на интервале временной дискретизации состояние МСП может совершить не более одного скачка. При этом приходится учитывать тот факт, что МСП X_t в обратном времени в общем случае не обладает свойством однородности. Аналог формулы (18) принимает вид

$$(22) \quad \begin{aligned} \zeta_r^{kj} = \delta_{kj} \exp \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}} \gamma_{kk}(u) du \right) \mathcal{N}(\mathcal{Y}_{r+1}, \delta f^k, \delta g_k) + \\ + (1 - \delta_{kj}) \int_0^\delta U_r^{kj}(\mathcal{Y}_{r+1}, u) du, \end{aligned}$$

где

$$(23) \quad \begin{aligned} U_r^{kj}(y, u) \triangleq \gamma_{kj}(u) \exp \left(\int_{t_r}^u \gamma_{kk}(s) ds + \int_u^{t_{r+1}} \gamma_{jj}(s) ds \right) \times \\ \times \mathcal{N} \left(y, u f^k + (\delta - u) f^j, u g_k + (\delta - u) g_j \right). \end{aligned}$$

Формулы (22) и (23) содержат интегралы, которые вновь приближенно вычисляются по составной схеме средних прямоугольников

$$(24) \quad \zeta_r^{kj} \approx \phi_r^{kj} = \delta_{kj} \exp \left(\delta \gamma_{kk} \left(\frac{t_r + t_{r+1}}{2} \right) \right) + \\ + (1 - \delta_{kj}) \delta^{1+\alpha} \sum_{i=1}^{[\delta^{-\alpha}]} \tilde{U}^{kj} \left(\mathcal{Y}_{r+1}, \delta^{1+\alpha} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right),$$

где

$$(25) \quad \tilde{U}_r^{kj}(y, u) \triangleq \\ \triangleq \gamma_{kj}(u) \exp \left((u - t_r) \gamma_{kk} \left(\frac{u + t_r}{2} \right) + (t_{r+1} - u) \gamma_{jj} \left(\frac{u + t_{r+1}}{2} \right) \right) \times \\ \times \mathcal{N} \left(y, u f^k + (\delta - u) f^j, u g_k + (\delta - u) g_j \right).$$

Используя матрицы $\phi_r \triangleq \|\phi_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}$, можно представить численную аппроксимацию порядка $\min(\alpha, 1)$, основанную на составной схеме средних прямоугольников для фильтра в обратном времени

$$(26) \quad \hat{\mathbf{X}}_r^b = (\mathbf{1} \phi_r^\top \hat{\mathbf{X}}_{r+1}^b)^{-1} \phi_r^\top \hat{\mathbf{X}}_{r+1}^b, \quad r < R, \quad \hat{\mathbf{X}}_R^b = \pi(T).$$

Таким образом, искомая оценка \hat{X}_r^s сглаживания состояния МСП X_{t_r} на фиксированном интервале наблюдений вычисляется по формулам (13), (14), в которых оценки фильтрации \hat{X} и \hat{X}^b заменены их аппроксимациями $\hat{\mathbf{X}}$ (21) и $\hat{\mathbf{X}}^b$ (26).

5. Алгоритм идентификации параметров скрытой марковской модели

Перед представлением алгоритма идентификации параметров СММ приведем некоторые наводящие соображения.

Рассмотрим СММ с непрерывным временем (1), (3), в которой *оба процесса* X_t и Y_t являются *наблюдаемыми*. По усиленному закону больших чисел для МСП [22] и процессов восстановления [23] имеет место следующая сходимость:

$$(27) \quad \frac{N_T^{ij}}{O_T^i} \rightarrow \lambda^{ij} \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad \text{P - п.н. для любых } i, j = \overline{1, N} : i \neq j,$$

$$(28) \quad \frac{1}{O_T^i} Q_T^{i,1} \rightarrow f e_i \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad \text{P - п.н. для любых } i = \overline{1, N}.$$

Помимо этого

$$(29) \quad \frac{1}{O_T^i} \left[Q_T^{i,1} (Q_T^{i,1})^\top - \int_0^T Q_s^{i,1} d(Q_s^{i,1})^\top - \int_0^T dQ_s^{i,1} (Q_s^{i,1})^\top \right] = g_i$$

для любых $i = \overline{1, N}$ на множестве $\{\omega \in \Omega : O_T^i(\omega) > 0\}$. В (27), (28) и (29)

- процессы N_t^{ij} and O_t^i определяются формулами (4) и (5),
- уровневая сумма $Q_t^{i,1}$ является частным случаем (6):

$$(30) \quad Q_t^{i,1} = \int_0^t X_s^i dY_s.$$

Формулы (27) и (28) могут быть интерпретированы как вариант метода моментов [24]. Если X_t — ненаблюдаемое состояние МСП, но выполняется условие идентифицируемости 5), то X_t может быть восстановлен точно по наблюдениям $\{Y_t\}$:

$$(31) \quad \overline{X}_t \triangleq \mathbb{E} \{X_t | Y_{t+}\} = X_t \quad \text{P-п.н. для любого } 0 \leq t < T.$$

Это означает, что в условиях 5) оценка \overline{X}_t также позволяет идентифицировать параметры СММ ξ , если использовать ее в формулах (4), (5) и (30) вместо истинного значения X_t . Однако точное вычисление \overline{X}_t невозможно: оценка является решением некоторой дискретно-непрерывной СДС, помимо этого, ее вычисление требует знания истинных значений параметров ξ идентифицируемой СММ.

Для преодоления этих сложностей и построения субоптимального алгоритма идентификации предлагается сделать несколько шагов.

Во-первых, согласно [25], при выполнении необременительных условий имеет место непрерывная зависимость решений СДС по параметру, т.е. если последовательность параметров $\{\xi_u\}_{u \in \mathbb{N}}$ сходится к ξ при $u \rightarrow \infty$, то последовательность соответствующих решений систем $\overline{X}(\xi_u) \xrightarrow{p} \overline{X}(\xi)$ при $u \rightarrow \infty$. Это означает, что в случае достаточной близости используемых в алгоритме оценивания параметров ξ_u к истинным значениям ξ качество получаемой оценки $\overline{X}(\xi_u)$ будет близко к качеству оптимальной оценки — условному среднему $\overline{X}(\xi)$ относительно имеющихся наблюдений.

Во-вторых, в случае известных параметров ξ и вложенной последовательности разбиений $\{t_r\}_{r=1, R}$ по теореме Леви имеет место сходимость [16] $\widehat{X}_r \rightarrow \overline{X}_{t_r}$ P-п.н. при $R \rightarrow \infty$. Это означает, что при выполнении условия 5), оценка оптимальной фильтрации \widehat{X}_r , вычисленная по дискретизованным наблюдениям \mathcal{Y} , будет достаточно близка к истинному состоянию X_{t_r} , и оценка оптимального сглаживания \widehat{X}_r^s тем более будет обладать этим свойством.

В-третьих, траектории состояния МСП X_t и их оценок \overline{X}_t по диффузионным наблюдениям Y_t (3) являются кусочно-постоянными функциями со

значениями в \mathbb{S}^N . В отличие от них, значение УМО \widehat{X}_r , вычисленное по дискретизованным наблюдениям $\mathcal{Y}(2)$, принадлежит “вероятностному симплексу” Π . Эту проблему легко решить, заменяя \widehat{X}_r на оценки максимума апостериорной вероятности \mathcal{X}_r :

$$(32) \quad \widehat{\mathcal{X}}_r = \operatorname{argmax}_n \left(e_n^\top \widehat{X}_r \right).$$

Заметим при этом, что условное среднее \widehat{X}_r является \mathcal{L}_2 -оптимальной оценкой, в то время как $\widehat{\mathcal{X}}_r$ — \mathcal{L}_1 -оптимальная оценка.

В-четвертых, формулы (27)–(29), в которых истинные значения N_R^{ij} , O_R^i и $Q_R^{i,1}$ заменены их оценками

$$(33) \quad \widehat{N}_R^{i,j} = \delta \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is} (\widehat{\mathcal{X}}_r^{js} - \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{js}),$$

$$(34) \quad \widehat{O}_R^i = \delta \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is},$$

$$(35) \quad \widehat{Q}_R^{i,1} = \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is} \mathcal{Y}_r,$$

позволяют построить следующие оценки параметров СММ:

$$(36) \quad \widehat{\lambda}^{ij} = \frac{\widehat{N}_R^{i,j}}{\widehat{O}_R^i}, \quad i \neq j,$$

$$(37) \quad \widehat{\lambda}^{ii} = - \sum_{j:j \neq i} \widehat{\lambda}^{ij},$$

$$(38) \quad \widehat{f}e_i = \frac{1}{\widehat{O}_R^i} \widehat{Q}_R^{i,1},$$

$$(39) \quad \widehat{g}_i = \frac{1}{\widehat{O}_R^i} \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_r^{is} (\mathcal{Y}_r - \delta \widehat{f}e_i) (\mathcal{Y}_r - \delta \widehat{f}e_i)^\top.$$

Пересчет параметров СММ может выполняться в цикле: сначала вычисляются оценки состояния МСП, а затем по этим оценкам происходит уточнение параметров СММ. Выход из этой процедуры может быть выполнен по превышении некоторого максимального числа итераций N_{iter} , но возможно и другое условие. Пусть ξ_u и ξ_{u+1} — оценки параметров СММ, вычисленные на u -й и $(u+1)$ -й итерациях соответственно. Условием останова итерационного процесса может быть выбрано выполнение неравенства

$$(40) \quad \frac{\|\xi_{u+1} - \xi_u\|}{\|\xi_u\|} \leq \varepsilon^\xi,$$

т.е. падение относительного изменения вектора параметров ниже некоторого фиксированного порога ε^ξ .

В процессе идентификации также следует обеспечивать выполнение условия 3) строгой положительности внедиагональных элементов оценки МИП $\hat{\Lambda}$. Для этого следует зафиксировать некоторый “барьерный” параметр ε^λ , и вместо оценки $\hat{\lambda}^{ij}(u+1)$ (36) на $(u+1)$ -м шаге использовать его модификацию

$$(41) \quad \hat{\lambda}_\varepsilon^{ij}(u+1) = \max\left(\varepsilon^\lambda |\hat{\lambda}^{ii}(u)|, \hat{\lambda}^{ij}(u+1)\right).$$

Относительно ограничительное условие 3) в данной статье было использовано для того, чтобы продемонстрировать возможность использования “барьеров” для учета различной априорной информации о допустимых областях оцениваемых параметров. Вообще говоря, 3) может быть заменено менее ограничительным условием эргодичности МСП X_t , что достаточно для идентификации МИП Λ .

Суммируя все вышесказанное, алгоритм идентификации параметров СММ имеет следующий вид.

Шаг 1. Инициализация начальных значений параметров СММ $\hat{\xi}_0$ и цикла идентификации $u := 0$.

Шаг 2. Начало цикла $u := u + 1$.

Шаг 3. Вычисление оценок фильтрации в прямом времени $\{\hat{\mathbf{X}}_r(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формулам (20) и (21) с использованием оценок параметров $\hat{\xi}_{u-1}$, вычисленных на предыдущем шаге цикла.

Шаг 4. Вычисление оценок фильтрации в обратном времени $\{\hat{\mathbf{X}}_r^b(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формулам (24) и (26) с использованием оценок параметров $\hat{\xi}_{u-1}$, вычисленных на предыдущем шаге цикла.

Шаг 5. Вычисление оценок сглаживания на фиксированном интервале $\{\hat{\mathbf{X}}_r^s(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формулам (13) и (14).

Шаг 6. Пересчет оценок $\{\hat{\mathbf{X}}_r^s(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ в оценки максимума апостериорной вероятности $\{\hat{\mathcal{X}}_r(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формуле (32).

Шаг 7. Вычисление оценок $\hat{N}_R^{i,j}(\xi_{u-1})$, $\hat{O}_R^i(\xi_{u-1})$ и $\hat{Q}_R^{i,1}(\xi_{u-1})$ по формулам (33), (34) и (35).

Шаг 8. Вычисление оценок $\hat{\lambda}_u^{ij}$, \hat{f}_u и \hat{g}_u по формулам (36), (37), (38) и (39).

Шаг 9. Если $u < N_{Iter}$ и $\frac{\|\xi_{u+1} - \xi_u\|}{\|\xi_u\|} > \varepsilon^\xi$, то перейти к Шагу 2, в противном случае закончить процесс идентификации.

Для одной итерации предложенного алгоритма идентификации можно теоретически оценить зависимость трудоемкости ее выполнения от объема имеющихся наблюдений и параметров СММ:

- линейная зависимость от числа обрабатываемых измерений (длины общего отрезка наблюдения $[0, T]$, частоты дискретизации δ^{-1}),
- степенная зависимость от размерности N скрытого состояния с показателем, больше 2,

- степенная зависимость от размерности M размерности наблюдаемого процесса с показателем, больше 2.

В настоящий момент времени не существует формальных утверждений, гарантирующих сходимость предложенного алгоритма идентификации, однако высокая точность численных алгоритмов фильтрации состояния СММ по наблюдениям с мультипликативными шумами, а также набросок алгоритма идентификации параметров СММ с дискретным временем, представленный в [8], вселяет надежду на возможность доказательства этой сходимости.

Между предложенной процедурой идентификации и ЕМ-алгоритмом имеется следующая связь. Известно, что последний представляет собой итерационное повторение двух шагов. На Е-шаге по всей совокупности наблюдений $\{\mathcal{Y}_r\}_{r=1, \overline{R}}$ вычисляются оценки состояния СММ $\{X_{t_r}\}_{r=1, \overline{R}}$, используя оценки неизвестных параметров системы ξ_{n-1} , вычисленные на предыдущем шаге. Этому шагу соответствуют формулы (33)–(35). На М-шаге по вновь рассчитанным оценкам состояния пересчитывается условная функция правдоподобия, для которой затем находится максимум — оценка параметров ξ_n на текущем шаге. Этому шагу соответствуют формулы (36)–(39). Далее цикл повторяется. Ключевым свойством ЕМ-алгоритма, доказанным для системы наблюдения (1), (3) в случае аддитивных шумов в наблюдениях, является его сходимость к локальному максимуму условной функции правдоподобия [9, 10]. Так оказалось, что формулы М-шага (36)–(38) совпали с формулами метода моментов. Однако формула (39) в [9, 10] не использовалась: во-первых, задача оценивания интенсивностей шумов наблюдений $\{g_n\}$ не ставилась, во-вторых, [9, 10] не содержит решения задачи фильтрации состояния СММ по наблюдениям с мультипликативными шумами. В предложенной статье по аналогии с тем, что (36)–(38) — формулы метода моментов для оценивания Λ и f , предлагается использовать формулу (39) как вариант метода моментов для оценивания $\{g_n\}$. Так что пересчет оценок Λ и f осуществляется в полном соответствии с М-шагом, а оценивание $\{g_n\}$ осуществляется методом моментов.

6. Численные эксперименты

Для демонстрации качества оценок идентификации был выполнен комплекс численных экспериментов. Для возможности объективного сравнения все вычисления проводились для СММ с одинаковыми параметрами: $N = 3$; $M = 1$; $\delta = 0,0002$;

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 5 & -10 & 5 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}; \quad \pi = \begin{bmatrix} 0,3571 \\ 0,2858 \\ 0,3571 \end{bmatrix}; \quad f = [0 \ 0 \ 0];$$

$$g_1 = 0,1; \quad g_2 = 0,2; \quad g_3 = 0,3.$$

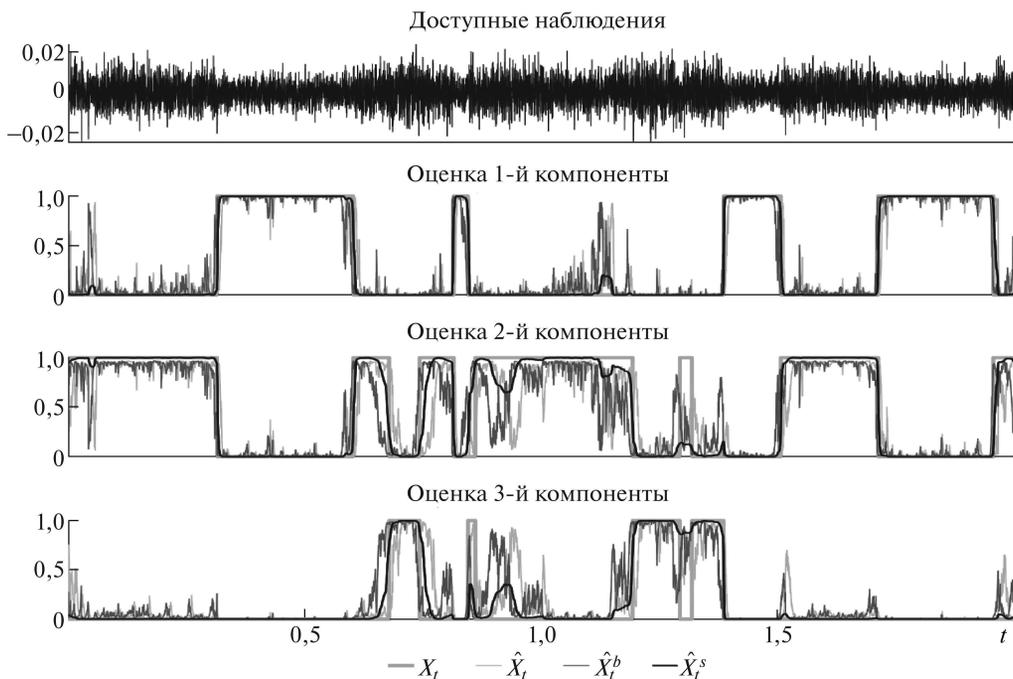


Рис. 1. Доступные наблюдения, компоненты МСП и их оценки.

Начальное распределение было выбрано совпадающим со стационарным, моделирование траекторий выполнялось с шагом 0,00002.

Первая часть экспериментов посвящена сравнению качества оценок фильтрации и сглаживания на фиксированном интервале при условии, что точные значения параметров СММ известны.

На рис. 1 представлены результаты решений задач оценивания, выполненные для исследуемой СММ на отрезке наблюдения $[0; 2]$:

- наблюдения \mathcal{U}_r , доступные на $[0; 2]$,
- точные значения компонентов МСП X_t ,
- оценки фильтрации \hat{X}_t в прямом времени,
- оценки фильтрации \hat{X}_t^b в обратном времени,
- оценки сглаживания \hat{X}_t^s на фиксированном интервале наблюдения $[0; 2]$.

Для сравнительного анализа точности оценивания по пучку траекторий объемом 1000 вычислены выборочные дисперсии ошибок оценок фильтрации и сглаживания. На рис. 2 представлены:

- выборочная дисперсия D_t ошибок оценок фильтрации в прямом времени,
- выборочная дисперсия D_t^b ошибок оценок фильтрации в обратном времени,
- выборочная дисперсия D_t^s ошибок оценок сглаживания на фиксированном интервале наблюдения.

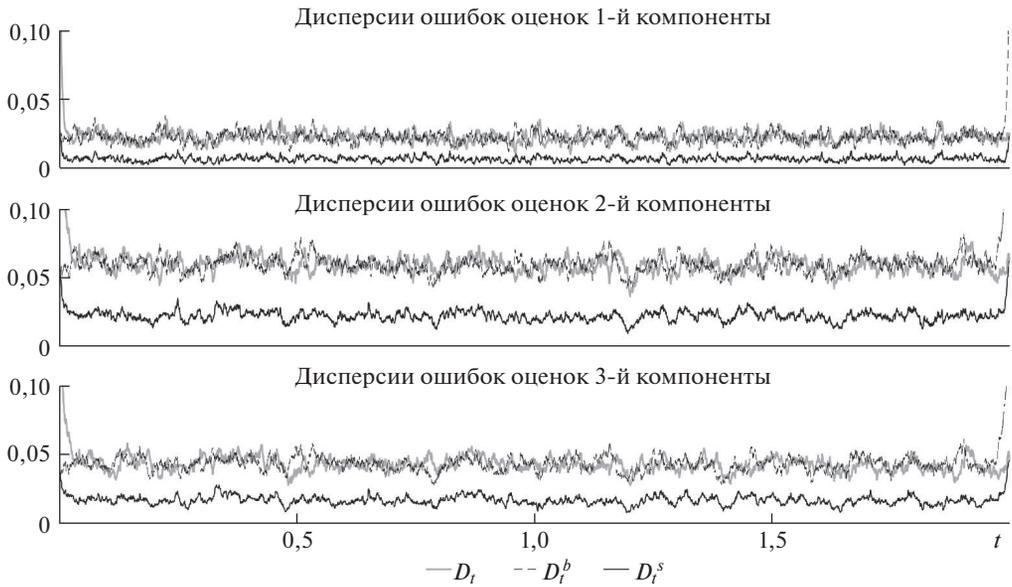


Рис. 2. Выборочные дисперсии ошибок оценок фильтрации и сглаживания.

По результатам первого численного эксперимента можно сделать следующие выводы.

1. С визуальной точки зрения доступные наблюдения малопригодны для оценивания состояния МСП.
2. Нулевой снос в наблюдениях затрудняет процессы оценивания. Тем не менее интенсивности шумов в наблюдениях при разных состояниях МСП различны, поэтому в исследуемой системе наблюдения выполнены условия идентифицируемости 5).
3. В проведенном эксперименте оценки сглаживания обеспечивают высокую точность. К подобному выводу позволяют прийти следующие заключения. Как само оцениваемое состояние, так и его оценка лежат в “вероятностном симплексе” Π , поэтому ошибка оценки имеет негауссовское распределение, а значит и пользоваться “правилом трех сигм” в данном случае бессмысленно. Дисперсия каждой компоненты оцениваемого состояния является индексом статистической неопределенности. Действительно, *тривиальной* оценкой компонент являются их математические ожидания, а дисперсии численно характеризуют меру разброса компонент относительно своих средних величин — тривиальных оценок. Следует отметить, что математические ожидания строятся только на основе априорной информации, без привлечения каких-либо наблюдений. Рассмотрим, например, 1-ю компоненту. Она имеет распределение Бернулли с параметром 0,3571, а значит дисперсию 0,2296. Сравним эту дисперсию с дисперсией ошибки оптимальной оценки сглаживания: из рис. 2 можно сделать вывод, что она колеблется в районе 0,01–0,03 (среднее значение 0,0225), т.е. мень-

Таблица

Истинное значение Λ			Начальное условие Λ_0			Оценка $\hat{\Lambda}$		
-5,0	4,0	1,0	-1,0	0,5	0,5	-4,5455	3,7613	0,7842
5,0	-10,0	5,0	0,5	-1,0	0,5	4,3470	-8,4221	4,0751
1,0	4,0	-5,0	0,5	0,5	-1,0	0,8508	3,3833	-4,2341
Истинное значение f			Начальное условие f_0			Оценка \hat{f}		
0,0	0,0	0,0	-1,0	0,0	1,0	-0,02	0,0278	-0,0171
Истинное значение g			Начальное условие g_0			Оценка \hat{g}		
0,1	0,2	0,3	0,05	0,15	0,4	0,0997	0,1992	0,3003

ше исходного значения дисперсии в 10 раз. Если использовать дисперсию в качестве показателя неопределенности, то данный эксперимент демонстрирует, что статистическая неопределенность снизилась в 10 раз. Соотношение дисперсий других компонент состояния имеет тот же порядок. Вообще, отношение дисперсии ошибки оценки к дисперсии оцениваемого сигнала в линейной регрессии — достаточно известный показатель RSS (*Residual Sum of Squares*).

- Выборочные дисперсии ошибок сглаживания вдвое меньше дисперсий ошибок фильтрации в прямом и обратном времени. Это означает, что использование в процедуре идентификации оценок сглаживания вместо оценок фильтрации способно принести существенный выигрыш в точности.
- Точность оценивания различных состояний зависит не только от параметров оцениваемого СММ, но и характеристик наблюдений. В рассматриваемом примере состояния 1 и 3 оцениваемого МСП “симметричны”: вероятности пребывания в них и интенсивности переходов в них и из них одинаковы. Тем не менее выборочная дисперсия оценки 3-го компонента МСП в 2 раза больше, чем соответствующее значение для 1-го компонента. Это связано с тем, что интенсивность шумов в наблюдениях при условии $X_t = e_1$ равна 0,1, в то время как соответствующее значение при условии $X_t = e_3$ равно 0,3.

Вторая часть экспериментов посвящена исследованию качества оценок параметров СММ. Оценивание выполнялось по наблюдениям, полученным на отрезке времени $[0; 1000]$. Максимальное число итераций $N_{Iter} = 15$, минимальный порог относительного изменения оценок параметров $\varepsilon^\xi = 0,005$. “Барьерные” значения, отделяющие оценки внедиагональных элементов λ_{ij} от нуля $\varepsilon^\lambda = 0,1$.

Приведенная выше таблица содержит истинные значения оцениваемых параметров ξ СММ, начальные условия ξ_0 для старта итерационной процедуры идентификации и окончательные оценки $\hat{\xi}$.

В данном эксперименте процесс идентификации закончился после 12 итераций. Эволюция оценок параметров в зависимости от номера итерации *Iter*

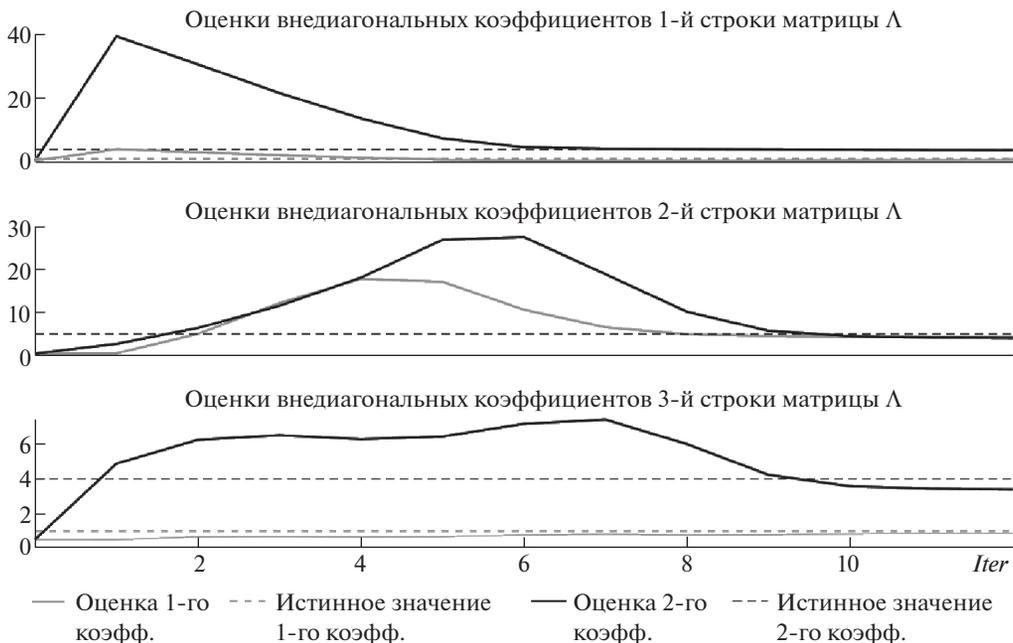


Рис. 3. Оценки и точные значения внедиагональных элементов МИП Λ .

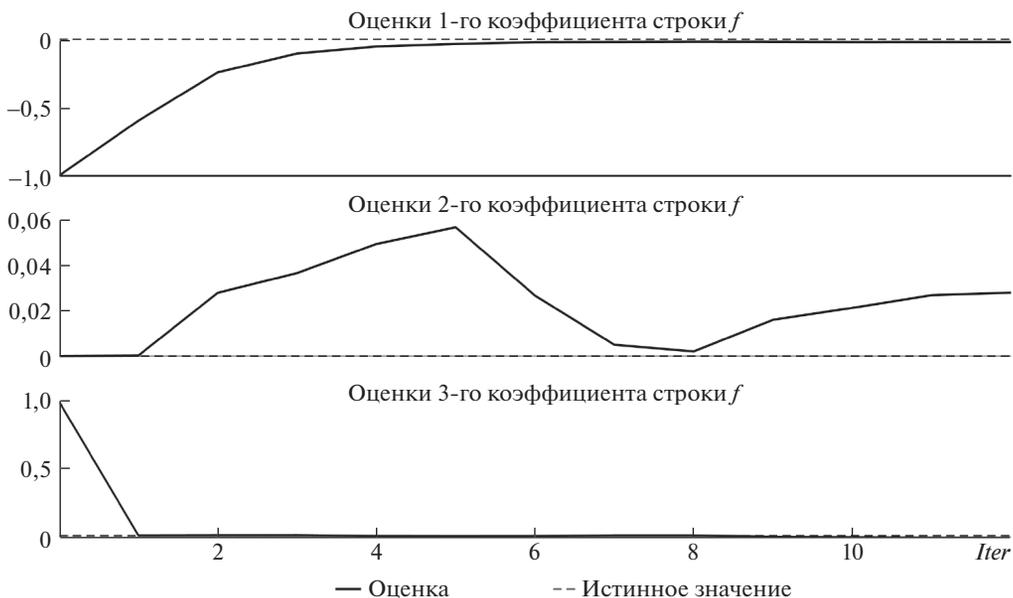


Рис. 4. Оценки и точные значения параметров сноса f .

в сравнении с истинными значениями оцениваемых параметров приведены на рис. 3 — для элементов МИП Λ , на рис. 4 — для параметров сноса f , на рис. 5 — для параметров диффузии g .

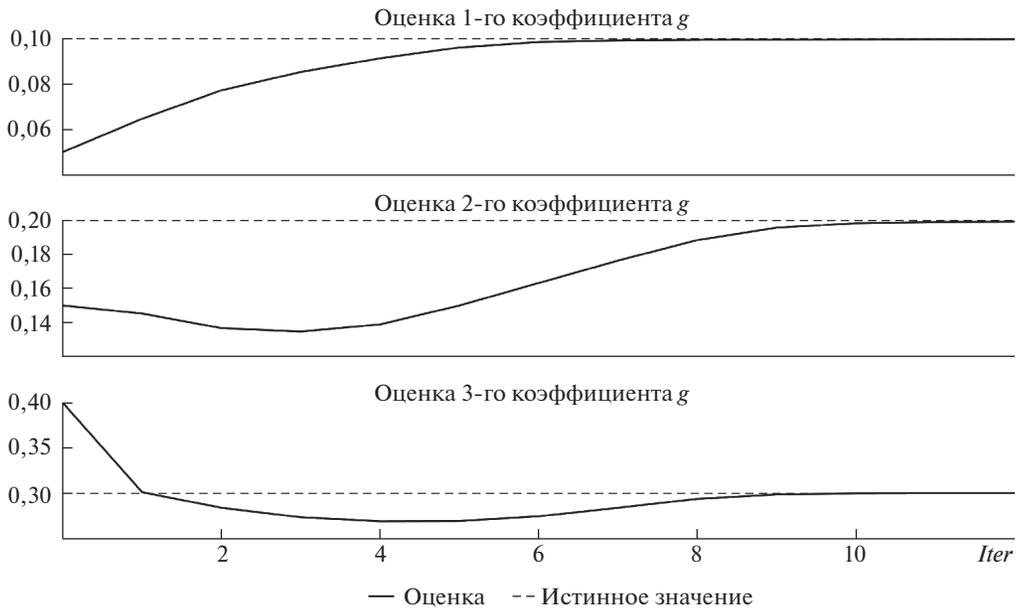


Рис. 5. Оценки и точные значения параметров диффузии g .

По результатам второго численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. Итерационный процесс идентификации демонстрирует быструю сходимость.
2. В результате идентификации ни один из внедиагональных элементов оценки МИП $\hat{\Lambda}$ не совпадает с “барьерным” значением, что означает, что барьерные ограничения в полученной оценке неактивны, и оценка совпадает с некоторым локальным максимумом условной функции правдоподобия.
3. Качество оценок параметров сноса f и диффузии g выше, чем качество оценивания МИП Λ .

Идентификация параметров СММ не является самоцелью: обычно в прикладных задачах полученные значения используются для последующего решения задач оценивания и/или стохастического управления по неполной информации. Третья часть экспериментов посвящена сравнению оценок фильтрации состояния МСП, вычисленной с использованием идентифицированных параметров, и “эталонных” оценок фильтрации, вычисленных по точным значениям параметров СММ.

На рис. 6 представлены графики траекторий оценок фильтрации на отрезке $[0; 1]$, вычисленных по идентифицированным и точным значениям параметров модели.

На рис. 7 приведены графики выборочных дисперсий ошибок фильтрации, вычисленных по идентифицированным и точным значениям параметров модели. Дисперсии вычислялись методом Монте-Карло по пучку траекторий объемом 100 000.

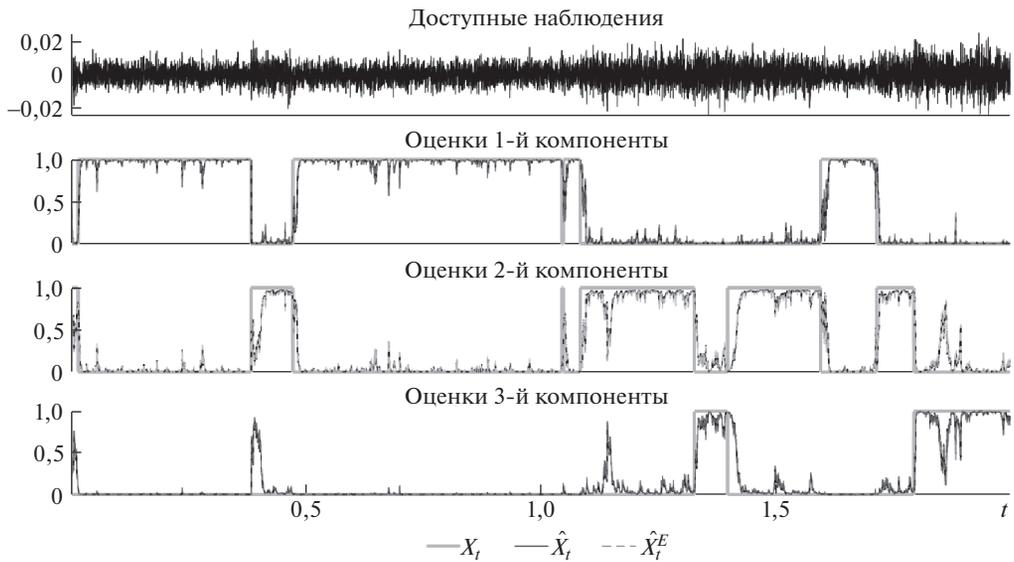


Рис. 6. Оценки фильтрации состояний МСП X_t , вычисленные по идентифицированным \hat{X}_t и точным параметрам \hat{X}_t^E СММ.

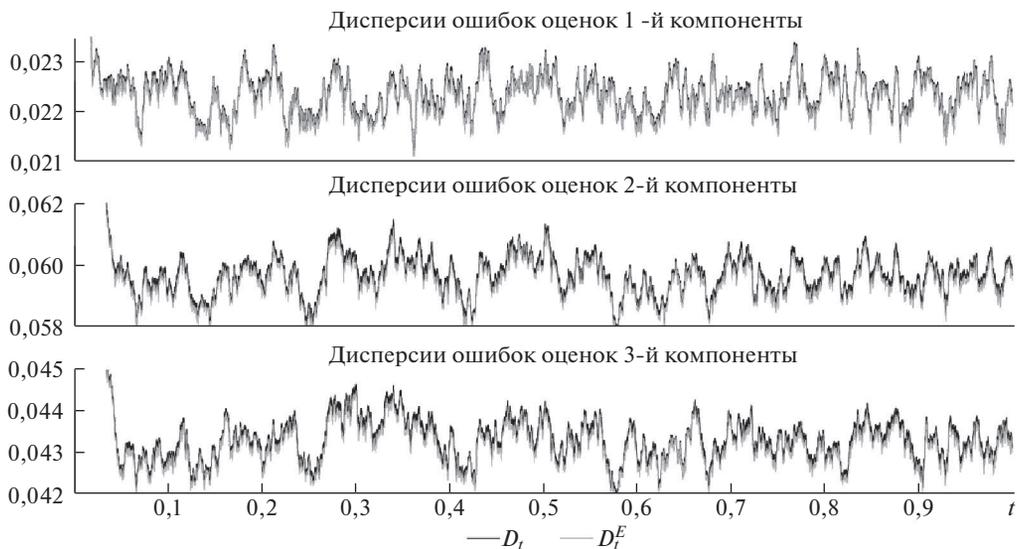


Рис. 7. Выборочные дисперсии ошибок фильтрации состояний МСП, вычисленных по идентифицированным D_t и точным D_t^E параметрам СММ.

По результатам третьего численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. Оценки фильтрации, вычисленные с помощью идентифицированных значений параметров СММ, визуально не отличаются от оценок, вычисленных со знанием точных значений параметров.

2. Даже при большом объеме пучка траекторий, используемых в методе Монте-Карло, разница выборочных дисперсий ошибок фильтрации, полученных по идентифицированным и точным параметрам, находится на уровне статистической погрешности.

7. Заключение

Статья представляет субоптимальный алгоритм идентификации параметров СММ с непрерывным временем. В качестве скрытого состояния выступает однородный МСП с конечным множеством состояний. Имеющиеся наблюдения являются косвенными и содержат мультипликативные шумы.

Предложена итерационная процедура оценивания параметров СММ, родственная EM-алгоритму. Она основана на попеременном решении задач сглаживания скрытого состояния и вычисления на основе этих результатов и имеющихся наблюдений оценок параметров СММ методом моментов.

Алгоритм идентификации сходится за малое число итераций. Проведенные численные примеры демонстрируют высокое качество оценивания матриц сноса f и диффузии g , и приемлемое качество оценивания МИП Λ . Тем не менее продемонстрированной точности достаточно для последующего успешного решения задач фильтрации скрытого состояния МСП с использованием идентифицированных значений параметров.

Несмотря на то что в статье показаны положительные качества алгоритма и его потенциальные возможности, существует целый ряд направлений, по которым он может быть модифицирован.

Во-первых, алгоритм обладает свойством “жадности”: он сходится к локальному максимуму условной функции правдоподобия, ближайшей к начальному условию итерационного процесса. При этом у функции правдоподобия могут существовать другие локальные максимумы с большими значениями. Улучшение качества оценивания возможно с помощью выбора начального условия путем некоторой предобработки имеющихся наблюдений. Другим способом является параллельный запуск нескольких экземпляров итерационного процесса, стартующих из различных начальных условий. В этом случае механизм выбора этих условий также играет существенную роль.

Во-вторых, предложенный алгоритм идентификации не обеспечивает оперативную обработку наблюдений нарастающего объема – это связано с “природой” EM-алгоритма. Дело в том, что СММ включает в себя как наблюдаемые, так и скрытые компоненты, поэтому возможно построить только *условную* функцию правдоподобия, характеризующую распределение скрытого состояния $X_{[0,T]}$, относительно имеющихся наблюдений \mathfrak{Y}_R на всем интервале наблюдения $[0, T]$. Данное условное осреднение автоматически означает сглаживание на фиксированном интервале наблюдения, и это решение этой задачи не может быть представлено в рекуррентной форме. Каждое следующее наблюдение, полученное в момент t_r , должно быть обработано для уточнения *всей* траектории состояния на отрезке $[0, t_{r-1}]$ и оцениванию состояния в

новой точке t_r . Таким образом, с ростом интервала наблюдения растет и длина траектории скрытого состояния, которая должна быть сглажена по всему имеющемуся массиву наблюдений. Данное свойство EM-алгоритм демонстрирует во всех задачах, в которых он может быть применен для идентификации параметров СММ: начиная от классического алгоритма Баума–Велча [3, 4], применяемого для идентификации параметров частично наблюдаемых марковских цепей, и заканчивая алгоритмами идентификации параметров СММ с непрерывным временем [8–11]. Представляется перспективной разработка рекуррентных модификаций алгоритма, позволяющих проводить идентификацию параметров СММ в реальном масштабе времени по наблюдениям нарастающего объема.

В-третьих, в текущей версии алгоритма учет доступной априорной информации о множестве допустимых значений оцениваемых параметров (на примере условия 3) строгой положительности интенсивностей переходов) реализуется с помощью использования некоторых “барьеров”, препятствующих выходу оценок из этого множества. Алгоритм может быть улучшен путем более гибкого подбора значений “барьеров”.

Перечисленные направления исследований представляются интересными не только с точки зрения эмпирического улучшения работы алгоритма и повышения его точности, но и в плане поиска теоретического обоснования свойств алгоритма и его модификаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.* \mathcal{L}_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I // *АиТ.* 2020. № 11. С. 11–31.
Borisov A. \mathcal{L}_1 -Optimal Filtering of Markov Jump Processes I // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 11. P. 1945–1962.
2. *Борисов А.* \mathcal{L}_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II // *АиТ.* 2020. № 12. С. 24–49.
Borisov A. \mathcal{L}_1 -Optimal Filtering of Markov Jump Processes II // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 12. P. 2160–2180.
3. *Baum L., Petrie T.* Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains // *Ann. Math. Statist.* 1966. V. 37. No. 6. P. 1554–1563.
4. *Baum L., Petrie T., Soules G., Weiss N.* Technique Occurring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains // *Ann. Math. Statist.* 1970. V. 41. No. 1. P. 164–171.
5. *Cappé O., Moulines E., Rydén T.* Inference In Hidden Markov Models. New York: Springer, 2005.
6. *Rabiner L.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // *Proc. IEEE.* 1989. V. 77. No. 2. P. 257–286.
7. *Ephraim Y., Merhav N.* Hidden Markov Processes // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2002. V. 48. No. 6. P. 1518–1569.
8. *Elliott R.J., Moore J.B., Aggoun L.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. New York: Springer, 2008.

9. *Zeitouni O., Dembo A.* Exact filters for the estimation of the number of transitions of finite-state continuous-time Markov processes // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 1988. No. 34. P. 890–893.
10. *Dembo A., Zeitouni O.* Parameter estimation of partially observed continuous time stochastic processes via the EM algorithm // *Stochast. Proces. Their Appl.* 1986. V. 23. P. 91–113.
11. *James M., Krishnamurthy V., Le Gland F.* Time Discretization of Continuous-Time Filters and Smoothers for HMM Parameter Estimation // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1996. V. 42. No. 2. P. 593–605.
12. *Лунцер Р., Шуряев А.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
13. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // *Automatica.* 1985. V. 21. No. 3. P. 303–313.
14. *Borisov A., Sokolov I.* Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // *Mathematics.* 2020. V. 8. No. 4. 506.
15. *Ishikawa Y., Kunita H.* Malliavin calculus on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // *Stochast. Proces. Their Appl.* 2006. V. 116. P. 1743–1769.
16. *Лунцер Р.Ш., Шуряев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
17. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin: Springer, 2010.
18. *Badawi F., Lindquist A., Pavon M.* A stochastic realization approach to the smoothing problem // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1979. V. 24. P. 878–888.
19. *Борисов А.* Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и смежные вопросы. I // *АиТ.* 2006. № 8. С. 51–76.
Borisov A. Backward representation of Markov jump processes and related problems. I // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 8. P. 1228–1250.
20. *Борисов А.* Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и смежные вопросы. II // *АиТ.* 2006. № 9. С. 120–141.
Borisov A. Backward representation of Markov jump processes and related problems. II // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 9. P. 1466–1484.
21. *Elliott R.J.* Reverse-Time Markov Processes // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 1986. V. 32. P. 290–292.
22. *Meyn S., Tweedie R.* Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer, 1993.
23. *Боровков А.* Теория вероятностей. М.: Физматлит, 1986.
24. *Боровков А.* Математическая статистика. М.: Физматлит, 1984.
25. *Крылов Н.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Физматлит, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 04.04.2022

После доработки 10.07.2022

Принята к публикации 28.07.2022