

© 2022 г. Н.М. ДМИТРУК, канд. физ.-мат. наук (dmitrukn@bsu.by),
Е.А. МАНЖУЛИНА (l.manzhulina@gmail.com)
(Белорусский государственный университет, Минск)

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ
СТАЦИОНАРНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ
БЕЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ
ИДЕНТИФИКАЦИИ**

Рассматривается задача оптимального управления линейной стационарной дискретной системой по неточным измерениям ее выходных сигналов при условии гарантированного удовлетворения геометрических ограничений на выходные сигналы. Исследуется случай, когда минимальная реализация системы в пространстве состояний известна, и случай, когда параметрическая модель системы не известна. Предлагается новый метод решения поставленной задачи в случае неизвестной модели, опирающийся на единственную наблюдаемую траекторию входного и выходного сигнала системы и позволяющий опустить этап ее параметрической идентификации.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейная дискретная система, неточные измерения, неизвестная модель, управление на основе данных.

DOI: 10.31857/S0005231022020015

1. Введение

В современном мире неумолимо возрастают размерность и общая сложность систем управления. Моделирование многих процессов представляется чрезмерно трудоемким, а построенная модель зачастую слишком сложна и громоздка для практического использования. В последние годы все большую популярность набирают методы системного анализа и управления, базирующиеся не на достоверном знании внутренней организации системы (ее модели), но лишь на ее наблюдаемом поведении (измеренных выходных сигналах). В литературе (см., например, [1]) новые методы получили название *data-driven control methods*, т.е. методы управления на основе данных. Настоящая работа примыкает к направлению в рамках теории управления на основе данных, истоки которого находятся в поведенческой (бихевиористской) теории динамических систем. В рамках этой теории будем опираться в основном на результаты работы [2], согласно которой пространство всех траекторий линейной стационарной дискретной системы порождается сдвигами по времени априорных измерений выходных сигналов системы (и, таким образом, образующих матрицу Ганкеля), записанных в одном единственном процессе на-

блюдения при условии постоянно возбуждающего входного сигнала (управления), и на развитие этих результатов в [3] для описания систем в пространстве состояний. В качестве примеров успешного использования результатов [3] отметим работы по стабилизации линейных стационарных систем [4–6], а также одношаговый метод проверки системы на диссипативность [7]. Некоторые результаты получены и для нелинейных систем [6, 8], хотя в этом направлении продвижение не столь велико.

Цель настоящей работы — исследование задачи оптимального гарантированного управления линейной стационарной дискретной системой по неточным измерениям выходных сигналов и при наличии ограничений, в формулировке которой собственно модель в явном виде отсутствует, а динамика системы неявно задается данными априорного наблюдения. При наличии параметрической модели аналогичная задача для непрерывных систем и с терминальными ограничениями на состояния исследовалась в [9], где в режиме реального времени строятся реализации оптимальной обратной связи по измерениям на основе решения ряда задач оптимального наблюдения и управления. Принцип разделимости процесса на наблюдение и управление, а также формулировки соответствующих задач в рамках подхода на основе данных составляют центральные результаты настоящей работы.

Структура работы. В разделе 2 приводится постановка задачи управления при наличии параметрической модели управляемой системы, метод решения которой вынесен в Приложение. В разделе 3 исследуется та же задача при условии, что модель системы неизвестна, известна лишь одна априорная траектория входного и выходного сигнала системы. Использование этих данных для генерирования произвольной траектории обсуждается в подразделе 3.1. В подразделе 3.2 обосновываются ключевые результаты работы — принцип разделимости процессов управления и наблюдения и алгоритм управления системой на основе данных, реализуемость которого доказывается в подразделе 3.3. Работа завершается (раздел 4) двумя иллюстративными примерами.

2. Оптимальное гарантированное управление линейной системой

Рассмотрим линейную стационарную дискретную систему G , минимальная реализация (A, B, C, D) которой известна:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & t &= 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^k$ — состояние системы, управление и выходной сигнал в момент времени t , (A, B) — управляема, (A, C) — наблюдаема.

Траекторией системы G будем называть пару $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ из управления и выходного сигнала, удовлетворяющую (1) при некотором (наблюдателю не известном) начальном состоянии $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Относительно начального состояния $x(0) = x_0$ будем предполагать, что информация о нем ограничивается включением

$$x_0 \in X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}.$$

В работе все неравенства, относящиеся к векторам, понимаются как покомпонентные.

На траекторию $\{u, y\}$ наложим ограничения:

$$(2) \quad u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где $U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}$ — множество доступных значений управления, $Y(t) = \{y \in \mathbb{R}^k : G(t)y \leq g(t)\}$ — множество допустимых значений выходного сигнала в момент времени t , $G(t) \in \mathbb{R}^{q \times k}$, $g(t) \in \mathbb{R}^q$, $t = 0, \dots, T-1$.

Поставим задачу о минимизации энергетических затрат на управление системой

$$J(u) = \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$$

на множестве доступных управляющих воздействий $u(t) \in U$, гарантирующих выполнение ограничений на выходные сигналы (2) при всех возможных реализациях начального состояния $x(0) \in X_0$:

$$(3) \quad \min_u \sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2,$$

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(0) \in X_0,$$

$$t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Задача (3) решается до начала процесса управления и позволяет дать априорную оценку качества этого процесса.

В каждом конкретном процессе управления реализуется некоторая траектория $\{u^p, y^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{T-1}$ системы G , которая определяется реализовавшимся, но наблюдателю не известным начальным состоянием $x_0^p \in X_0$ и поданным на вход системы (1) управлением u^p . Далее будем считать, что в процессе управления доступны лишь неточные измерения выходных сигналов вида

$$\tilde{y}^p(t) = y^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

где $\xi(t)$ — ошибка измерения в момент времени t . Величина реализовавшейся ошибки $\xi(t)$ достоверно не известна, однако полагаем ее в дальнейшем

принадлежащей известному множеству $\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^k : \|\xi\|_\infty \leq \varepsilon\}$, т.е. $\xi(t) \in \Xi$, $t = 0, \dots, T-1$, где $\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма.

К некоторому моменту времени τ пара $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\} = \{u^p(t), \tilde{y}^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$ из реализовавшихся в рассматриваемом процессе управления и измерений составляет *текущую позицию процесса*. Она позволяет оценить реализовавшееся начальное состояние, скорректировать будущее управление и улучшить априорную оценку качества процесса управления, которую дает задача (3).

Определение 1. Состояние $x(\tau)$ назовем *согласующимся с позицией* $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$, если найдутся такие допустимые начальное состояние $x_0 \in X_0$ и ошибки измерения $\xi(t) \in \Xi$, $t = 0, \dots, \tau-1$, что выполняются тождества

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x(\tau|x_0, u_\tau^p), \\ \tilde{y}^p(t) &= Cx(t|x_0, u_t^p) + Du^p(t) + \xi(t), \quad t = 0, \dots, \tau-1, \end{aligned}$$

где $x(t|x_0, u_t^p)$ — состояние, в которое система (1) приходит в момент t , двигаясь из начальной точки $x(0) = x_0$ под воздействием управления u_t^p .

Отметим, что начальное состояние x_0 , о котором идет речь в определении 1, порождает траекторию $\{u_\tau^p, y_\tau\}$, в которой, возможно, $y_\tau \neq \tilde{y}_\tau^p$.

Обозначим через $X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ множество всех состояний $x(\tau)$, согласующихся с измеренной траекторией $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$. В момент времени τ сформулируем задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} (4) \quad \min_u \quad & \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \\ & x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \\ & y(t) = Cx(t) + Du(t), \\ & u(t) \in U, \quad y(t) \in Y(t) \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \\ & t = \tau, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Пусть $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$, $t = \tau, \dots, T-1$, — оптимальное управление в задаче (4). Согласно [9] в момент τ на вход системы G подается первое значение оптимального управления

$$(5) \quad u^p(\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

после чего в момент $\tau+1$ решается следующая задача оптимального программного управления (4), в которой на единицу уменьшается горизонт управления и обогащается знание о поведении системы за счет новой позиции $\{u_{\tau+1}^p, \tilde{y}_{\tau+1}^p\}$.

Таким образом, для оптимального управления системой G по неточным измерениям ее выходных сигналов при наличии модели системы необходимо в каждый момент τ решать задачу (4). Ее решение основано на принципе разделимости процессов управления и наблюдения (см., например, [10]). Для

рассматриваемой задачи можно применить результаты работы [9], модифицируя их с учетом нового типа ограничений и дискретности динамической системы. Соответствующая модификация приводится в Приложении к данной работе.

Управление $u^p(\tau)$, $\tau = 0, \dots, T - 1$, построенное по правилу (5), представляет собой [9] *реализацию в конкретном процессе управления оптимальной обратной связи по неточным измерениям*. Это простейший тип обратной связи по неточным измерениям, использующий только прошлую информацию об измерениях, поступившую к моменту времени τ , и не учитывающий будущую информацию о возможных реализациях неизвестных величин. Такой тип обратных связей в [11] назван *размыкаемой* обратной связью. Она опирается на оптимальные программные решения задачи в отличие от оптимальных стратегий и замыкаемых или замкнутых обратных связей [11, 12]. Отсюда следуют одновременно консерватизм и простота построений предложенной обратной связи. Более сложные постановки задач управления на основе, например, результатов [12] будут исследованы в последующих работах.

3. Оптимальное гарантированное управление линейной системой на основе данных

Далее сосредоточимся на задаче управления системой G , однако условимся, что реализация (A, B, C, D) системы в пространстве состояний не известна. Классический подход в подобных ситуациях состоит в предварительной идентификации системы и последующей формулировке и решении задачи из раздела 2.

В настоящей работе будет предложен альтернативный подход, не нуждающийся в явном параметрическом представлении системы. Вместо модели (A, B, C, D) будем использовать полученное в [3] представление любой траектории системы G на основе одной предварительно измеренной траектории из управления и выходного сигнала

$$\{u^d, y^d\} = \left\{u^d(t), y^d(t)\right\}_{t=0}^{T^d-1},$$

которую далее будем называть априорной траекторией.

Будем считать, что априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ измерена точно и для системы G дана верхняя оценка размерности ее состояния n (см. [3]).

Предположение о точных измерениях априорной траектории описывает идеализированную ситуацию и будет опущено в последующих исследованиях.

3.1. Информативность априорной траектории

Предварительно приведем результаты работ [2, 3], в которых показано, как априорная траектория $\{u^d, y^d\}$ при определенных условиях может иметь ту же информационную ценность, что и модель системы (A, B, C, D) .

Определение 2 [3]. Пусть $L, L^d \in \mathbb{N}$, $L \leq L^d$. Управление $u = \{u(t)\}_{t=0}^{L^d-1}$ называется постоянно возбуждающим порядка L , если матрица Ганкеля

$$H_L(u) = \begin{pmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(L^d - L) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(L^d - L + 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(L - 1) & u(L) & \cdots & u(L^d - 1) \end{pmatrix}$$

имеет полный строчный ранг, т.е. $\text{rank } H_L(u) = mL$.

Замечание 1. Если управление u является постоянно возбуждающим порядка L , то оно должно быть достаточно длинным. Поскольку матрица $H_L(u) \in \mathbb{R}^{mL \times (L^d - L + 1)}$ имеет полный строчный ранг, число строк не превышает число столбцов: $L^d - L + 1 \geq mL$. Отсюда следует необходимое условие на длину L^d постоянно возбуждающего управления порядка L : $L^d \geq L(m + 1) - 1$.

Согласно [2, 3], априорная траектория $\{u^d, y^d\}$, порожденная постоянно возбуждающим управлением достаточно высокого порядка, содержат информацию, достаточную для представления любой траектории системы G . Далее будем использовать следующий результат работы [2], сформулированный в [3] в терминах классических моделей в пространстве состояний:

Теорема 1 [3]. Пусть $\{u^d, y^d\} = \{u^d(t), y^d(t)\}_{t=0}^{T^d-1}$ — априорная траектория линейной системы G размерности n , причем u^d — постоянно возбуждающее управление порядка $T + n$. Тогда $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T-1}$ является траекторией G в том и только в том случае, когда для

$$\begin{pmatrix} H_T(u^d) \\ H_T(y^d) \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

существует решение $\alpha \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1}$.

Теорема 1 позволяет проверять любую пару $\{u, y\}$ на принадлежность множеству траекторий системы G . В дальнейшем будем использовать условия теоремы для построения множества возможных траекторий $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ длины T с некоторой фиксированной “прошлой” частью $\{u_\tau^p, y_\tau^p\} = \{u^p(t), y^p(t)\}_{t=0}^{\tau-1}$ длины τ и нефиксированной “будущей” частью $\{u, y\} = \{u(t), y(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$. Для этого будем делить строки матриц Ганкеля для априорной траектории следующим образом:

$$H_T(u^d) = \begin{pmatrix} u^d(0) & \cdots & u^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(\tau - 1) & \cdots & u^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ u^d(\tau) & \cdots & u^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u^d(T - 1) & \cdots & u^d(T^d - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix},$$

$$H_T(y^d) = \begin{pmatrix} y^d(0) & \cdots & y^d(T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(\tau - 1) & \cdots & y^d(\tau - 1 + T^d - T) \\ y^d(\tau) & \cdots & y^d(\tau + T^d - T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^d(T - 1) & \cdots & y^d(T^d - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_\tau^p \\ Y_\tau^f \end{pmatrix}.$$

Если управление u^d является постоянно возбуждающим порядка $T + n$, то согласно теореме 1 $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ является траекторией системы G тогда и только тогда, когда уравнение

$$(6) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ y \end{pmatrix}$$

имеет решение $\alpha(\tau) \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1}$.

В силу теоремы 1 для любых u_τ^p, y_τ^p, u можно найти хотя бы один возможный выходной сигнал y , но для единственности y , которая представляет практический интерес, необходимо наложить дополнительные условия. При условии наблюдаемости пары (A, C) траектория $\{u^p, y^p\}$ длины n однозначно определяет начальное состояние [3], поэтому для обеспечения единственности достаточно потребовать $\tau \geq n$.

3.2. Принцип делимости

Найдем аналог принципа делимости управления и наблюдения для линейных систем с известной моделью в пространстве состояний для случая, когда траектория системы G представлена в виде (6). Будем следовать идее декомпозиции будущего выходного сигнала y (см. Приложение)

$$(7) \quad y = y_0 + \hat{y},$$

где $y_0 = \{y_0(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ — выходной сигнал системы G , соответствующий управлению u и тривиальному начальному условию $x(\tau) = 0$; $\hat{y} = \{\hat{y}(t)\}_{t=\tau}^{T-1}$ — выходной сигнал неуправляемой системы G для некоторого начального условия $x(\tau)$, согласующегося с текущей позицией процесса $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$.

Рассмотрим подробно слагаемые в (7). При определении y_0 тривиальное начальное состояние $x(\tau) = 0$ можно зафиксировать неявно посредством тривиальной прошлой траектории $\{0, 0\}$ длины не менее n . С тривиальной траекторией, очевидно, согласуется начальное условие $x(0) = 0$, а поскольку $\tau \geq n$, это единственно возможное начальное состояние. Тогда система остается в начале координат вплоть до момента τ : $x(t) = 0, t = 0, \dots, \tau$. Из рассуждений следует, что $\{0, u, 0, y_0\}$ является траекторией длины T системы G .

Далее $\{0, \hat{y}\}$ — траектория системы G с начальным условием $x(\tau)$ из множества состояний, в которые система могла прийти, точно следуя траектории $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$, где о выходном сигнале y_τ^p известно только, что он отклоняется от измеренного \hat{y}_τ^p в равномерной норме не более чем на ε . Тогда $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$ — траектория длины T системы G .

Из необходимого условия теоремы 1 следует, что для траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$ существуют $\alpha_0(\tau)$, $\hat{\alpha}(\tau)$ соответственно, удовлетворяющие

$$(8) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

Суммируя равенства (8), получаем

$$(9) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \\ Y_\tau^f \end{pmatrix} (\hat{\alpha}(\tau) + \alpha_0(\tau)) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ u \\ \hat{y} + y_0 \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 1 условие (9) является достаточным для того, чтобы $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, \hat{y} + y_0\}$ являлась траекторией системы. Поскольку начальное состояние x_0 неявно зафиксировано достаточно длинным участком $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$, эта траектория совпадает с искомой $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$, т.е. $y = \hat{y} + y_0$. Суммируя рассуждения выше, любую траекторию можно строить согласно лемме:

Лемма. Пусть $\{u_\tau^p, y_\tau^p\}$ — некоторая фиксированная прошлая траектория системы G длины $\tau \geq n$. Тогда любая траектория $\{u_\tau^p, u, y_\tau^p, y\}$ длины T системы G однозначно представима в виде суммы траекторий $\{0, u, 0, y_0\}$ и $\{u_\tau^p, 0, y_\tau^p, \hat{y}\}$ длины T , причем для фиксированного управления u определить неизвестные будущие участки y_0, \hat{y} можно следующим образом:

1. Найти некоторые решения $\hat{\alpha}(\tau)$, $\alpha_0(\tau)$ двух систем алгебраических уравнений

$$(10) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить $\hat{y} = Y_\tau^f \hat{\alpha}(\tau)$, $y_0 = Y_\tau^f \alpha_0(\tau)$.

Замечание 2. Для получения $\hat{y}(t)$, $y_0(t)$ в конкретный момент времени t на шаге 2 необходимо использовать блок $Y^d(t)$ матрицы Y_τ^f (или $H_T(y^d)$):

$$Y^d(t) = \left(y^d(t), y^d(t+1), \dots, y^d(t+T^d-T) \right).$$

Получим $\hat{y}(t) = Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau)$, $y_0(t) = Y^d(t) \alpha_0(\tau)$.

По аналогии с определением 1 дадим

Определение 3. Назовем параметр $\hat{\alpha}(\tau)$ согласующимся с текущей позицией процесса $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$, если

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ y_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|y^p(t) - \tilde{y}^p(t)\|_\infty \leq \varepsilon, \quad t = 0, \dots, \tau - 1.$$

Пусть $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ — множество всех $\hat{\alpha}(\tau)$, согласующихся с $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$:

$$\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = \left\{ \hat{\alpha}(\tau) \in \mathbb{R}^{T^d - T + 1} : U_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) = u_\tau^p, \quad U_\tau^f \hat{\alpha}(\tau) = 0, \right. \\ \left. -\varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) - \tilde{y}_\tau^p \leq \varepsilon \mathbb{1} \right\},$$

где $\mathbb{1}$ — $k(T - \tau)$ -вектор из единиц. Множество $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ — аналог множества $X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ состояний $x(\tau)$, согласующихся с текущей позицией $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$.

Далее определим $\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ как множество всех $\hat{y}(t)$, согласующихся с позицией $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$. В соответствии с замечанием 2 это множество порождается множеством $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$:

$$\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = \left\{ \hat{y}(t) = Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau) : \hat{\alpha}(\tau) \in \mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) \right\}.$$

В связи с декомпозицией (7) выходного сигнала ограничение (2) в момент t принимает вид $G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t)$. Тогда на $y_0(t)$ наложим “суженное” условие:

$$(11) \quad G(t)y_0(t) \leq g(t) - \chi(t|\tau),$$

где $\chi(t|\tau) = (\chi_i(t|\tau), i = 1, \dots, q)$ соответствует наихудшей реализации выходного сигнала $\hat{y}(t)$ в позиции $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$, а именно, каждый его элемент $\chi_i(t|\tau)$ является решением задачи

$$(12) \quad \chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{y}(t)} G_i(t) \hat{y}(t), \quad \hat{y}(t) \in \mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

где $G_i(t)$ — i -я строка матрицы $G(t)$.

С учетом определений множеств $\mathcal{Y}(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$, $\mathcal{A}(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ задачи (12) представляют собой задачи линейного программирования:

$$(13) \quad \chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t) Y^d(t) \hat{\alpha}(\tau), \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}.$$

Задачи (13) — задачи оптимального наблюдения, см. [9] и Приложение.

Выполнение для $y_0(t)$ ограничения (11) очевидно влечет удовлетворение исходного ограничения (2) на $y(t)$ для любой возможной реализации $\hat{y}(t)$, согласующейся с позицией $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$.

Параметр $\alpha_0(\tau)$, удовлетворяющий второму из условий (10) и такой, что для $y_0(t) = Y^d(t)\alpha_0(\tau)$ при всех $t = \tau, \dots, T-1$ выполняется неравенство (11), определяет допустимое управление $u = U_\tau^f \alpha_0(\tau)$. Тогда задача оптимального управления в момент времени τ имеет вид

$$(14) \quad \min_{\alpha_0(\tau), u} \|u\|^2, \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \\ G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau) \leq g(t) - \chi(t|\tau), \\ u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \dots, T-1.$$

Исключая в (14) управление u , получаем задачу квадратичного программирования относительно $\alpha_0(\tau)$:

$$(15) \quad \min_{\alpha_0(\tau)} \alpha_0(\tau)^T (U_\tau^f)^T U_\tau^f \alpha_0(\tau), \\ \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ Y_\tau^p \end{pmatrix} \alpha_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau) \leq g(t) - \chi(t|\tau), \\ u_{\min} \leq U^d(t)\alpha_0(\tau) \leq u_{\max}, \quad t = \tau, \dots, T-1,$$

где, по аналогии с $Y^d(t)$, $U^d(t) = (u^d(t), u^d(t+1), \dots, u^d(t+T^d-T))$.

Пусть $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ — решение задачи оптимального управления (15). На вход системы G подаем первое значение соответствующего управления (см. (5)), которое вычисляется согласно формуле $u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$. Таким образом,

Алгоритм управления линейной стационарной дискретной системой по неточным измерениям выходных сигналов и на основе точных априорных данных $\{u^d, y^d\}$ будет таким:

при всех $\tau = n, \dots, T-1$

- 1) решить задачи (13), найти оценки $\chi_i(t|\tau)$, $i = 1, \dots, q$, $t = \tau, \dots, T-1$;
- 2) решить задачу (15), найти $\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$;
- 3) подать на вход системы управление $u^p(\tau) = U^d(\tau)\alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$.

Как и в разделе 2, полученное в результате применения алгоритма управление $u^p(\tau)$, $\tau = n, \dots, T-1$, является реализацией в конкретном процессе управления оптимальной обратной связи по неточным измерениям.

Для того, чтобы результаты представленного алгоритма совпадали с результатом раздела 2, необходимо потребовать $X_0 = \mathbb{R}^n$, совпадения управлений $u^p(t)$ при $t = 0, 1, \dots, n-1$ и также начинать процесс управления в момент $\tau = n$.

3.3. Основная теорема

Дадим теоретическое обоснование реализуемости предложенного алгоритма управления. В частности, покажем, что при условии существования решений задач (13) и (14) в момент времени $\tau = n$ решения этих задач существуют и для всех $\tau = n+1, \dots, T-1$. С целью сокращения записи далее опустим явное упоминание пары $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ в решениях задачи (15) для момента τ , т.е. $\alpha_0^*(\tau) = \alpha_0^*(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$, $u^*(\tau|\tau) = u^*(\tau|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$, а также для момента $\tau+1$ и позиции $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}_\tau^p, \tilde{y}^p(\tau)\}$, которая реализуется при подаче управления $u^*(\tau|\tau) = u^p(\tau)$ в момент τ .

Теорема 2. Пусть в момент τ для позиции $\{u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p\}$ каждая из задач (13) имеет решение. Пусть имеет решение задача (15) с параметрами $\chi(t|\tau)$, поставленными решениями задач (13). Тогда в момент $\tau+1$ для позиции $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), \tilde{y}_\tau^p, \tilde{y}^p(\tau)\}$ задачи (13), (15) также имеют решение. Более того,

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau+1)\|^2 \leq \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2.$$

Доказательство. Сначала докажем разрешимость каждой из задач оптимального наблюдения в момент $\tau+1$. Эти задачи можно записать в виде

$$(16) \quad \chi_i(t|\tau+1) = \max_{\hat{\alpha}(\tau+1)} G_i(t)Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau+1),$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau+1) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ u^*(\tau|\tau) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1},$$

$$\tilde{y}^p(\tau) - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y^d(\tau)\hat{\alpha}(\tau+1) \leq \tilde{y}^p(\tau) + \varepsilon \mathbb{1},$$

а задачи наблюдения для момента τ представимы в виде

$$(17) \quad \chi_i(t|\tau) = \max_{\hat{\alpha}(\tau)} G_i(t)Y^d(t)\hat{\alpha}(\tau),$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \hat{\alpha}(\tau) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \hat{\alpha}(\tau) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1}.$$

Каждая задача (16) допустима, поскольку для истинной реализовавшейся траектории $\{u_\tau^p, u^*(\tau|\tau), y_\tau^p, y^p(\tau)\}$ и будущего тривиального управления $\{u(t)\}_{t=\tau+1}^T = 0$ существует $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$, для которого выполняется первое из условий (10) леммы, а значит, для этого $\hat{\alpha}^p(\tau+1)$ удовлетворены все ограничения (16).

Для доказательства разрешимости задачи (16) используем решение $\alpha_0^*(\tau)$ задачи оптимального управления (15) в момент τ . Обозначим:

$$(18) \quad u^c = U_{\tau+1}^f \alpha_0^*(\tau), \quad y_0^*(\tau|\tau) = Y^d(\tau) \alpha_0^*(\tau).$$

Заметим, что $u^c = \{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$, т.е. это “хвост” оптимального управления задачи (15). Согласно лемме существует α^c , такое что выполняется равенство

$$(19) \quad \begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ Y_\tau^p \\ Y^d(\tau) \\ U_{\tau+1}^f \end{pmatrix} \alpha^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u^c \end{pmatrix}.$$

Сдвинем переменную $\hat{\alpha}(\tau+1)$, относительно которой поставлены задачи оптимального наблюдения (16), на константу, перейдем к новой переменной $\Delta\alpha(\tau+1)$:

$$\hat{\alpha}(\tau+1) = \alpha_0^*(\tau) - \alpha^c + \Delta\alpha(\tau+1).$$

Тогда

$$\chi_i(t|\tau+1) = G_i(t)Y^d(t)(\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \Delta\chi_i(t|\tau+1),$$

где с учетом (18), (19)

$$(20) \quad \Delta\chi_i(t|\tau+1) = \max_{\Delta\alpha(\tau+1)} G_i(t)Y^d(t)\Delta\alpha(\tau+1),$$

$$\begin{pmatrix} U_\tau^p \\ U^d(\tau) \\ U_\tau^f \end{pmatrix} \Delta\alpha(\tau+1) = \begin{pmatrix} u_\tau^p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{y}_\tau^p - \varepsilon \mathbb{1} \leq Y_\tau^p \Delta\alpha(\tau+1) \leq \tilde{y}_\tau^p + \varepsilon \mathbb{1},$$

$$(21) \quad \begin{aligned} \tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) - \varepsilon \mathbb{1} &\leq Y^d(\tau)\Delta\alpha(\tau+1) \leq \\ &\leq \tilde{y}^p(\tau) - y_0^*(\tau|\tau) + \varepsilon \mathbb{1} \end{aligned}$$

и множество допустимых решений $\Delta\alpha(\tau+1)$ непустое.

Сравним задачи (20)–(21) для $\Delta\alpha(\tau+1)$ и (17) для $\hat{\alpha}(\tau)$. Очевидно, что дополнительное ограничение (21) влечет $\Delta\chi_i(t|\tau+1) \leq \chi_i(t|\tau)$ и справедлива

оценка

$$(22) \quad \chi_i(t|\tau + 1) \leq G_i(t)Y^d(t)(\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \chi_i(t|\tau),$$

для всех $i = 1, \dots, q$, $t = \tau + 1, \dots, T - 1$.

Таким образом, доказано, что в момент $\tau + 1$ все задачи оптимального наблюдения имеют решение.

Остается продемонстрировать, что множество допустимых решений $\alpha_0(\tau + 1)$ в задаче оптимального управления для момента $\tau + 1$, которая имеет вид

$$(23) \quad \min_{\alpha_0(\tau+1)} \alpha_0(\tau + 1)^T (U_{\tau+1}^f)^T U_{\tau+1}^f \alpha_0(\tau + 1),$$

$$\begin{pmatrix} U_{\tau}^p \\ U^d(\tau) \\ Y_{\tau}^p \\ Y^d(\tau) \end{pmatrix} \alpha_0(\tau + 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(24) \quad G(t)Y^d(t)\alpha_0(\tau + 1) \leq g(t) - \chi(t|\tau + 1),$$

$$(25) \quad u_{\min} \leq U^d(t)\alpha_0(\tau + 1) \leq u_{\max}, \quad t = \tau + 1, \dots, T - 1,$$

непусто — тогда эта выпуклая задача квадратичного программирования имеет решение.

Покажем, что α^c — допустимое решение. По построению α^c выполнены ограничения-равенства (23) и группа ограничений на управления (25). Покажем, что выполнены также условия (24). Воспользовавшись сначала (22), а затем тем фактом, что $\alpha_0^*(\tau)$ удовлетворяет ограничениям задачи (15), получаем

$$\begin{aligned} & G(t)Y^d(t)\alpha^c + \chi(t|\tau + 1) \leq \\ & \leq G(t)Y^d(t)\alpha^c + G(t)Y^d(t)(\alpha_0^*(\tau) - \alpha^c) + \chi(t|\tau) = \\ & = G(t)Y^d(t)\alpha_0^*(\tau) + \chi(t|\tau) \leq g(t), \quad t = \tau + 1, \dots, T - 1, \end{aligned}$$

что доказывает (24).

Наконец, поскольку решение α^c допустимо, оптимальное решение удовлетворяет

$$\sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau + 1)\|^2 \leq (\alpha^c)^T (U_{\tau+1}^f)^T U_{\tau+1}^f \alpha^c = \sum_{t=\tau+1}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2,$$

что завершает доказательство всех утверждений теоремы.

Следствие. Если задачи оптимального наблюдения (13) и управления (15) имеют решение в момент времени $\tau = n$, то они разрешимы и в каж-

дый из последующих моментов $\tau = n + 1, \dots, T - 1$. При этом критерий качества, значение которого определяется в момент τ как

$$J(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} \|u^p(t)\|^2 + \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u^*(t|\tau)\|^2,$$

является невозрастающей функцией от τ .

Доказательство теоремы 2 использует “хвост” $u^c = \{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$ оптимального управления, полученного в момент τ не только для доказательства допустимости задачи оптимального управления (как и в случае наличия модели системы), но и для доказательства существования решения задач оптимального наблюдения. Это позволяет учесть взаимосвязь не только между соответствующими задачами для τ и $\tau + 1$, но и между самими задачами для момента $\tau + 1$. В частности, для задач оптимального наблюдения на основе u^c приводится такая верхняя оценка решения $\chi(t|\tau + 1)$, которая позволяет продемонстрировать и допустимость управления $\{u^*(t|\tau)\}_{t=\tau+1}^{T-1}$ в задаче оптимального управления для момента $\tau + 1$.

4. Примеры

Пример 1. Применим предложенный алгоритм для управления системой:

$$(26) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0998 \\ -0,0998 & 0,9950 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0998 \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) &= (1 \ 0) x(t), \quad t = 0, \dots, T - 1. \end{aligned}$$

Требуется минимизировать величину $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ при гарантированном соблюдении ограничений на значения выходных сигналов в последних 15 временных точках: $|y(t)| \leq 0,3$, $t = T - 15, \dots, T - 1$. Доступны управления, для которых $|u(t)| \leq 0,7$, $t = 0, \dots, T - 1$. Горизонт планирования $T = 135$, абсолютное значение ошибки ограничено величиной $\varepsilon = 0,02$.

Управление системой (26) начинается в момент $\tau = n = 2$.

Согласно замечанию 1 длина T^d априорной траектории должна быть не меньше $(n + T)(m + 1) - 1 = 273$. Именно такой, наименьшей подходящей длины была сгенерирована незашумленная априорная траектория $\{u^d, y^d\}$, в которой управления $u^d(t)$, $t = 0, \dots, T^d - 1$, — случайные числа, равномерно распределенные в $[0, 0,7]$.

Пусть в конкретном процессе реализовалось начальное состояние $x_0^p = (5, -2)$. Траектория $\{u_2^p, \tilde{y}_2^p\}$, соответствующая движению системы до начала управления, получена при $u^p(0) = u^p(1) = 0$ и $\xi(t)$, $t = 0, 1$, выбранных случайным образом из отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

На рис. 1,а изображена реализация $u^p(\tau)$, $\tau = 0, \dots, T - 1$, оптимальной обратной связи в рассматриваемом процессе. Выходной сигнал (см. рис. 1,б) удовлетворяет ограничениям на промежутке от $\tau = 120$ до $\tau = 134$. На рис. 2,а изображена реализовавшаяся траектория системы (1). Априорная

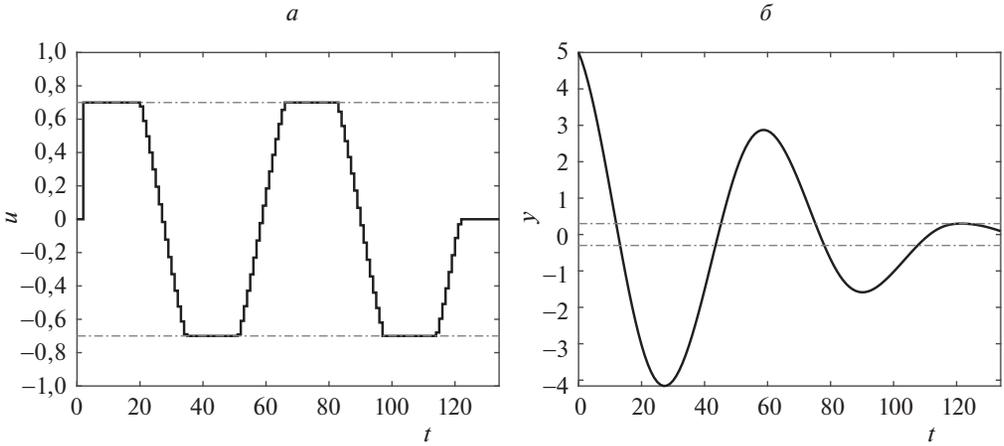


Рис. 1. Реализация оптимальной обратной связи (а), выходного сигнала (б).

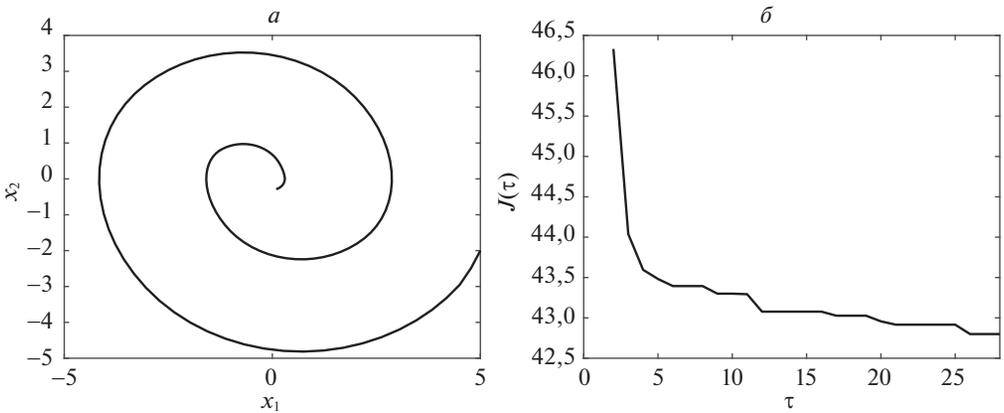


Рис. 2. Фазовая траектория (а), изменение критерия качества (б).

оценка значения критерия качества, полученная в $\tau = 2$, составила 46,3322. В процессе управления значение критерия качества улучшилось до 42,5599. Наиболее значительное изменение происходит при $\tau = 2, \dots, 28$. Этот фрагмент приведен на рис. 2,б.

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, которая была рассмотрена в [4]:

$$(27) \quad x(t+1) = \begin{pmatrix} 0,921 & 0 & 0,041 & 0 \\ 0 & 0,918 & 0 & 0,033 \\ 0 & 0 & 0,924 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,937 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0,017 & 0,001 \\ 0,001 & 0,023 \\ 0 & 0,061 \\ 0,072 & 0 \end{pmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t), \quad t = 0, \dots, T-1.$$

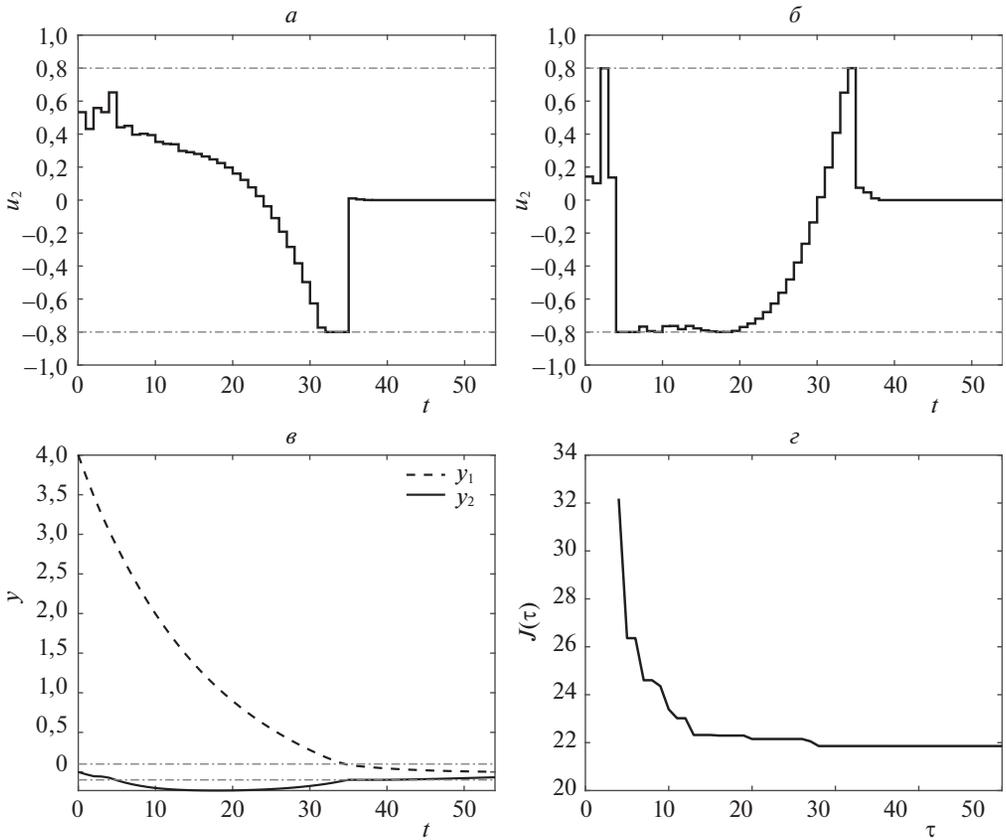


Рис. 3. Реализация оптимальной обратной связи (а), (б), соответствующие выходные сигналы (в), изменение критерия качества (г).

Снова требуется минимизировать величину $\sum_{t=0}^{T-1} \|u(t)\|^2$ при следующих ограничениях:

$$|y_i(t)| \leq 0,1, \quad t = T - 20, \dots, T - 1, \quad i = 1, 2,$$

и

$$|u_i(t)| \leq 0,8, \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad i = 1, 2.$$

Положим $T = 55$, $\varepsilon = 0,02$.

Отметим, что для данной системы управление можно было бы начать в момент $\tau = 2$, поскольку наблюдений при $t = 0, 1$ достаточно для неявного задания начального условия x_0 . Однако, поскольку математическая модель неизвестна, известна лишь точная размерность системы, $n = 4$, управление системой (27) начинается в момент $\tau = n = 4$.

Управления $u^d(t)$, $t = 0, \dots, T^d - 1$ для априорной траектории $\{u^d, y^d\}$ длины $T^d = 176$ (см. замечание 1) были сгенерированы как случайные векторы, равномерно распределенные в $[-0,8, 0,8]^2$.

Траектория $\{u_4^p, \tilde{y}_4^p\}$ конкретного процесса была сгенерирована для начального состояния $x_0^p = (4, 0, 1, -1)$ и $u^p(t), \xi(t), t = 0, \dots, 3$, выбранных случайным образом из квадратов $[0, 0, 8]^2, [-\varepsilon, \varepsilon]^2$ соответственно.

Рисунок 3 иллюстрирует результаты применения предложенной схемы управления. Априорная оценка значения критерия качества, составлявшая 32,183, была улучшена до 21,857. Начиная с момента $\tau = 29$ изменения не существенны.

5. Заключение

Рассмотрена задача оптимального управления линейной стационарной системой при наличии ограничений и неточных измерений выходных сигналов. Математическая модель системы в пространстве состояний предполагается неизвестной, доступны только данные априорных наблюдений за ее поведением в одном процессе управления. В предположении об отсутствии в априорных данных ошибок обоснован принцип делимости процессов наблюдения и управления в линейных системах только на основе доступных данных, сформулированы соответствующие задачи оптимального наблюдения и управления, предложен и обоснован алгоритм управления объектом в режиме реального времени на основе данных. Развитие полученных результатов на случай неточных априорных данных и исследование задачи управления в менее консервативной постановке, например, как в [12], является предметом дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для решения задачи (4) из раздела 2 аналогично результатам [9] используем принцип делимости процессов управления и наблюдения для линейных систем. С этой целью представим состояние $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ в виде $x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t), y(t) = y_0(t) + \hat{y}(t)$, где $x_0(t), y_0(t)$ соответствуют состоянию и выходу номинальной системы с тривиальным начальным состоянием

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0, \\ y_0(t) &= Cx_0(t) + Du(t), \quad t = \tau, \dots, T-1, \end{aligned}$$

а $\hat{x}(t), \hat{y}(t)$ соответствуют состоянию и выходу неуправляемой системы с неопределенным начальным состоянием

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1) &= A\hat{x}(t), \quad \hat{x}(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t), \quad t = \tau, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Тогда ограничение на выходные сигналы (2) в виде

$$G(t)(y_0(t) + \hat{y}(t)) \leq g(t), \quad \forall x(\tau) \in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),$$

влечет естественное суженное условие на $y_0(t)$, удовлетворение которого будет гарантировать допустимость выходного сигнала $y(t)$:

$$y_0(t) \in Y_0(t|\tau) = \{y \in \mathbb{R}^p : G(t)y \leq g(t) - \chi(t|\tau)\},$$

где каждая компонента $\chi_i(t|\tau)$, $i = 1, \dots, q$, вектора $\chi(t|\tau)$ соответствует наилучшей реализации состояния $x(\tau)$:

$$\begin{aligned}\chi_i(t|\tau) &= \max_z G_i(t)\hat{y}(t), \\ \hat{x}(s+1) &= A\hat{x}(s), \quad \hat{x}(\tau) = z, \\ y(s) &= C\hat{x}(s), \quad s = \tau, \dots, t, \\ z &\in X(\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p),\end{aligned}$$

$G_i(t)$ обозначает i -ю строку матрицы $G(t)$.

После вычисления всех оценок $\chi(t|\tau)$, $t = \tau, \dots, T-1$, оптимальное управление $u^*(t|\tau, u_\tau^p, \tilde{y}_\tau^p)$ получим как решение следующей детерминированной задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned}\min_u \sum_{t=\tau}^{T-1} \|u(t)\|^2, \\ x_0(t+1) &= Ax_0(t) + Bu(t), \quad x_0(\tau) = 0, \\ y_0(t) &= Cx_0(t) + Du(t), \\ u(t) &\in U, \quad y_0(t) \in Y_0(t|\tau), \\ t &= \tau, \dots, T-1.\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (4) может быть получено в результате решения $q(T-\tau)$ задач оптимального наблюдения и одной детерминированной задачи оптимального управления (см. [9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hou Z.-S., Wang Z. From model-based control to data-driven control: Survey, classification and perspective // Inform. Sci. 2013. V. 235. P. 3–35.
2. Willems J.C., Markovsky I., Rapisarda P., De Moor B.L.M. A note on persistency of excitation // Syst. Control Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.
3. Berberich J., Allgöwer F. A trajectory-based framework for data-driven system analysis and control // European Control Conference, Saint Petersburg, Russia, 2020. P. 1365–1370.
4. Berberich J., Köhler J., Müller M.A., Allgöwer F. Data-Driven Model Predictive Control with Stability and Robustness Guarantees // IEEE Transactions on Automatic Control. <https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3000182>.
5. Berberich J., Romer A., Scherer C.W., Allgöwer F. Robust data-driven state-feedback design // arXiv: 1909.04314. 2019.
6. De Persis C., Tesi P. Formulas for data-driven control: Stabilization, optimality and robustness // IEEE Transactions on Automatic Control. 2019. V. 65. No. 3. P. 909–924.
7. Romer A., Berberich J., Köhler J., Allgöwer F. One-shot verification of dissipativity properties from input-output data // IEEE Control Syst. Lett. 2019. V. 3. No. 3. P. 709–714.

8. *Coulson J., Lygeros J., Dörfler F.* Data-Enabled Predictive Control: In the Shallows of the DeePC // European Control Conference, Naples, Italy, 2019. P. 307–312.
9. *Габасов Р., Дмитриук Н.М., Кириллова Ф.М.* Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 33–57.
10. *Kurzhanskii A.B., Vályi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Nelson Thornes, 1997.
11. *Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 2004. Т. 44. № 2. С. 265–286.
12. *Dmitruk N., Findeisen R., Allgöwer F.* Optimal measurement feedback control of finite-time continuous linear systems // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol. 41. No. 2. P. 15339–15344.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 19.01.2021

После доработки 21.09.2021

Принята к публикации 15.10.2021