

© 2022 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РАЗРЕЖЕННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ¹

Предложен простой и универсальный подход к решению задачи разреженной фильтрации — использующей пониженное число выходов — при произвольных ограниченных внешних возмущениях с использованием наблюдателя. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов и технике линейных матричных неравенств. Применение этой концепции позволило свести исходную проблему к задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно. Подход отличается простотой и легкостью реализации и в равной мере охватывает как непрерывную, так и дискретную постановки задачи. Эффективность предлагаемой процедуры продемонстрирована на тестовом примере.

Ключевые слова: фильтрация, линейный стационарный фильтр, разреженность, внешние возмущения, линейные матричные неравенства, инвариантные эллипсоиды.

DOI: 10.31857/S0005231022020039

1. Введение

В современной литературе термин “разреженная фильтрация” (*sparse filtering*) в основном закрепился за такими направлениями, как машинное обучение, распознавание образов, обработка сигналов и изображений; см., например, [1–3]. Вместе с тем напомним, что классическая постановка задачи фильтрации (т.е. оценки состояния динамической системы по измерениям) при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана. Однако во многих ситуациях предположение о случайности шумов является неоправданным; часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными. В этом случае можно строить *гарантированные* (а не вероятностные) оценки состояний. Такой подход был предложен в конце 60-х – начале 70-х гг. XX в. в работах американских ученых Виценхаузена, Бертсекаса и Родеса, Швеппе [4]. Примерно в это же время подобные проблемы разрабатывались на семинаре Н.Н. Красовского такими исследователями, как А.Б. Куржанский [5]

¹ Исследование выполнено при частичной поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-30005.

и др. Существенный вклад в этот круг исследований внес Ф.И. Черноусько [6]. В частности, в [4–6] была разработана эллипсоидальная техника фильтрации; обзор результатов в этой области можно найти в [7, 8].

В [9–11] рассматривалась проблема фильтрации с ограниченными случайными возмущениями, однако лишь для стационарных задач, когда все параметры модели не зависят от времени. Более того, искалась оценка состояния, такая что ее ошибка гарантированно заключена в единый — инвариантный — эллипсоид для всех моментов времени, т.е. оценка является равномерной. Сам фильтр также искался в классе линейных стационарных фильтров. В этом суженном классе задач и оценок проблема оказалась полностью разрешимой, так что удалось построить оптимальный фильтр и оценку состояния. Этим данная постановка задачи отличается от упомянутых выше; там рассматривались более общие модели, однако получаемое решение было лишь субоптимальным, а равномерность оценок не имела места. С технической точки зрения в [9–11] применен аппарат линейных матричных неравенств [12], который хорошо зарекомендовал себя в анализе и синтезе систем управления, но не очень широко применялся в задачах фильтрации. Систематическое изложение этой техники дано в монографии [13].

С другой стороны, в обработке сигналов и изображений, распознавании образов и многих других областях широко используются идеи *разреженности*. Одной из первых областей применения концепции разреженности является ℓ_1 -оптимизация, в дальнейшем успешно развиваемая в различных направлениях, таких как compressed sensing, ℓ_1 -фильтрация и др. (см., например, [14, 15]). Вместе с тем идеи разреженности не нашли широкого применения в управлении; среди немногочисленных публикаций по построению разреженной обратной связи можно упомянуть [16, 17], в которых разреженная структура оговорена заранее; основное внимание в этих публикациях уделено оптимизационным алгоритмам.

В [18] был предложен новый подход к построению разреженной обратной связи, связанный с минимизацией числа не нулевых компонент вектора, а не нулевых строк или столбцов матрицы. Такие матрицы называются строчно- и столбцово-разреженными соответственно. Концепция разреженности используется для синтеза линейной обратной связи по состоянию или выходу в системах управления при нестандартных целочисленных критериях качества, таких как число не нулевых компонент вектора управления. Такие задачи являются трудными, их непосредственное решение приводит к комбинаторному перебору. Вместо этого было предложено воспользоваться овыпуклением задачи, основанным на использовании специальных матричных норм, и явным образом получить субоптимальное решение.

Этот подход отличается простотой (исходные задачи сводятся к решению маломерных задач выпуклого программирования, а для их численного решения могут быть использованы стандартные средства, такие как среда МАТЛАВ), универсальностью (задачи в непрерывном и дискретном времени рассматриваются единообразно, подход распространяем на различные робастные постановки задачи, на построение линейной обратной связи как по со-

стоянию, так и по выходу), а также распространимостью на различные задачи оптимального управления, такие как линейно-квадратичное управление, H_∞ -оптимизация и др.

Настоящая статья является естественным продолжением как [9–11], так и [18]. В ней рассматривается подход к решению задачи *разреженной фильтрации* — фильтрации, использующей пониженное число выходов — для систем, подверженных воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений. Этот подход приводит к столбцово-разреженным матрицам фильтра при относительно малых потерях по критерию качества, позволяя избежать комбинаторного перебора всевозможных комбинаций нулевых столбцов в матрице фильтра. При этом в равном объеме рассматриваются как непрерывный, так и дискретный варианты задачи.

Всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, I — единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Разреженное управление

Напомним основные идеи упомянутого выше подхода к построению разреженного управления. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$; введем в рассмотрение следующие матричные нормы:

$$\|X\|_{r_1} = \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq j \leq p} |x_{ij}|, \quad \|X\|_{c_1} = \sum_{j=1}^p \max_{1 \leq i \leq n} |x_{ij}|.$$

Эти нормы хорошо известны: первая из них иногда называется *rx*-нормой или $\ell_{1,\infty}$ -нормой; ее основное применение — восстановление строочно-разреженных решений матричных уравнений [19]; аналогично r_1 -норма восстанавливает столбцово-разреженные решения.

В [18] установлен следующий результат.

Теорема 1. Если задача

$$\min \|X\|_{r_1} \quad \text{при ограничении} \quad AX = B,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ и $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, разрешима, то найдется ее решение, имеющее не более m ненулевых строк.

Аналогичный результат может быть сформулирован для c_1 -нормы и нулевых столбцов.

Развитый в [18] подход позволяет регулярным образом строить разреженные регуляторы в различных ситуациях. В частности, рассмотрим линейную систему в непрерывном времени

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$ и управлением $u \in \mathbb{R}^m$, так что $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$; пара (A, B) управляема. Задача состоит в синтезе *разреженного* стабилизирующего управления $u = Kx$, под которым понимается наличие у вектора управления нулевых компонент. Эта задача эквивалентна нахождению *строчно-разреженной* матрицы стабилизирующего регулятора $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, т.е. имеющей некоторое количество нулевых строк.

Технические приемы, используемые для получения соответствующего результата, понадобятся в дальнейшем изложении. Как хорошо известно, матрица $A + BK$ замкнутой системы устойчива тогда и только тогда, когда существует положительно-определенная матрица $Q \succ 0$ такая, что

$$(A + BK)^\top Q + Q(A + BK) \prec 0.$$

Умножая это матричное неравенство слева и справа на $P = Q^{-1}$ и вводя новую переменную $Y = KP$, приходим к линейному матричному неравенству

$$(2) \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top$ и Y . Тогда любой стабилизирующий регулятор для системы (1) дается выражением $\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$, где матрицы $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ удовлетворяют (2).

Ясно, что если матрицу, содержащую нулевые строки, умножить справа на матрицу соответствующего размера, то эти же нулевые строки появятся и в результирующей матрице; иными словами, умножение справа сохраняет строчно-разреженную структуру матрицы. Поэтому если решение $\hat{Y}$ линейного матричного неравенства (2) является строчно-разреженным, то и соответствующий регулятор $\hat{K}$ строчно-разрежен. В свою очередь строчной разреженности матрицы Y можно добиться, минимизируя ее r_1 -норму. Таким образом, справедливо

Утверждение [18]. Решение $\hat{P}$ и $\hat{Y}$ задачи выпуклого программирования

$$\min \|Y\|_{r_1} \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ определяет строчно-разреженный стабилизирующий регулятор $K_{\text{sp}} = \hat{Y}\hat{P}^{-1}$ для системы (1).

Этот результат позволяет определить управления, стабилизирующие систему; эти управления определяются номерами ненулевых строк матрицы K_{sp} . При этом, вообще говоря, нельзя гарантировать, что получившееся решение обязательно окажется разреженным, однако наличие разреженности можно ожидать в силу теоремы 1.

Эти идеи мы применим для решения задачи разреженной фильтрации, формулируемой в следующем разделе.

3. Непрерывный случай

3.1. Задача фильтрации

Рассмотрим непрерывную систему

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + D_1 w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + D_2 w, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, с фазовым состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением (шумом) $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$(4) \quad \|w(t)\| \leq 1 \quad \text{при всех } t \geq 0;$$

пара (A, D_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y . Построим фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния $\hat{x}$, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C\hat{x}$:

$$(5) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее — он является линейным стационарным, подлжит выбору лишь постоянная матрица L . Эта структура такая же, как в известном наблюдателе Люенбергера.

Введем в рассмотрение *невязку*

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

характеризующую точность фильтрации.

Задачей является нахождение минимального (в том или ином смысле) инвариантного эллипсоида, содержащего невязку e . Идеология инвариантных эллипсоидов для задач анализа и синтеза систем управления подробно освещена в [12, 13]. Напомним, что эллипсоид

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

называется инвариантным для динамической системы, если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geq 0$. Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему. Заметим, что в силу свойства притягиваемости инвариантного эллипсоида при больших отклонениях оценивается асимптотическая, а при малых отклонениях и равномерная по t точность фильтрации.

Отметим, что из условия наблюдаемости следует существование хотя бы одного инвариантного эллипсоида (а управляемость гарантирует его полноту). Инвариантных эллипсоидов много, цель — найти минимальный

из них при фиксированном стабилизирующем L , а затем добиться минимума этого эллипсоида по L . Удобно считать тот эллипсоид *минимальным*, у которого минимален след его матрицы.

В [9] установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\hat{Q}, \hat{Y}$ — решение задачи

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA - YC - C^\top Y^\top + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ D_1^\top Q - D_2^\top Y^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1} \hat{Y},$$

а минимальный инвариантный эллипсоид, содержащий невязку системы (3), (5) с $x_0 = 0$, определяется матрицей

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}.$$

Отметим, что при фиксированном α задача, сформулированная в теореме 2, сводится к минимизации линейной функции при ограничениях, представляющих собой линейные матричные неравенства, т.е. к задаче полуопределенного программирования (*Semi-Definite Programming, SDP*), которая принадлежит к классу задач выпуклой оптимизации.

3.2. Разреженная фильтрация

Итак, будем искать разреженное решение задачи фильтрации для системы (3), (4). Заметим, что матрица фильтра L находится как $L = Q^{-1}Y$, поэтому если величина Y окажется столбцово-разреженной, то и соответствующая матрица фильтра L будет столбцово-разреженной. В свою очередь столбцовой разреженности матрицы Y можно добиться, минимизируя ее c_1 -норму.

Таким образом, имеем следующий алгоритм, предполагающий выполнение трех последовательных шагов.

Алгоритм 1.

Шаг 1. Решая задачу выпуклого программирования

$$(6) \quad \min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$(7) \quad \begin{pmatrix} A^\top Q + QA - YC - C^\top Y^\top + \alpha Q & QD_1 - YD_2 \\ D_1^\top Q - D_2^\top Y^\top & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(8) \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$, находим величины Q^* , Y^* , H^* , определяющие матрицу оптимального фильтра

$$L^* = (Q^*)^{-1}Y^*,$$

матрицу

$$P^* = (Q^*)^{-1}$$

минимального инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующее оптимальное значение функционала

$$J^* = \text{tr } H^*.$$

Шаг 2. Имея оптимальное значение функционала J^* , введем скалярный коэффициент релаксации $\gamma > 1$ и решаем выпуклую задачу c_1 -оптимизации:

$$(9) \quad \min \|Y\|_{c_1} \quad \text{при ограничениях (7), (8) и } \text{tr } H \preceq \gamma J^*$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра α . В силу свойств c_1 -нормы можно ожидать появления нулевых столбцов в решении $\hat{Y}_0$ задачи (9).

Шаг 3. Решается исходная задача (6)–(8), где в матричной переменной Y зафиксировано такое же расположение нулевых столбцов, что и в столбцово-разреженной матрице $\hat{Y}_0$. Ее решение $\hat{Q}$, $\hat{Y}$ доставляет столбцово-разреженную матрицу фильтра

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1}\hat{Y}$$

и матрицу

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$$

соответствующего инвариантного эллипсоида для невязки.

Вопрос о выборе коэффициента релаксации γ весьма сложен; здесь трудно дать какие-либо количественные оценки заранее. В [20] обсуждается зависимость решений задачи вида (9) от величины γ и даются некоторые эвристические подходы к выбору коэффициента релаксации.

Заметим, что для получения разреженного решения этой задачи методом “грубой силы” понадобилось бы решить ее для всевозможных столбцово-разреженных структур матрицы Y и выбрать лучшее по критерию качества; иными словами, комбинаторного перебора избежать бы не удалось. В разделе 5 будет показано, что предлагаемая процедура приводит к сильно разреженным матрицам фильтра при небольших потерях по критерию качества.

Замечание 1. В некоторых случаях имеется априорная информация о начальном состоянии системы $x(0) \in \mathcal{E}_0$, где

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ x: \quad x^\top P_0^{-1} x \leq 1 \right\}.$$

Тогда, выбирая $\hat{x}(0) = 0$, можно гарантировать, что $e(0) \in \mathcal{E}_0$. Если потребовать, чтобы $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$, то можно гарантировать, что $e(t) \in \mathcal{E}$ для всех t . Соответственно если к системе ограничений (7)–(8) в алгоритме 1 добавить условие

$$Q \preceq P_0^{-1},$$

то получим не только асимптотическую, но и справедливую для всех моментов времени оценку точности разреженной фильтрации.

Замечание 2. Нередко нужно оценивать качество фильтрации не всех координат состояния x , а лишь некоторых. Пусть имеется выход $y_1 = C_1 x$ (например, одна из координат состояния) и желательно сделать ошибку его оценки

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = C_1(x - \hat{x})$$

возможно малой. Решение этой задачи достигается заменой первого из условий (8) на

$$\begin{pmatrix} H & C_1 \\ C_1^\top & Q \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

4. Дискретный случай

Аналогичные результаты могут быть установлены и для линейной дискретной системы

$$(10) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + D_2 w_k \end{aligned}$$

с некоторым начальным условием x_0 , где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w_k \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$(11) \quad \|w_k\| \leq 1 \quad \text{при всех } k = 0, 1, 2, \dots;$$

пара (A, D_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

А именно построим фильтр, описываемый линейным разностным уравнением с постоянной матрицей L относительно оценки состояния $\hat{x}_k$:

$$(12) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$.

Введем в рассмотрение невязку

$$e_k = x_k - \hat{x}_k.$$

Как и в непрерывном случае, задачей является нахождение матрицы L , обеспечивающей минимальность инвариантного эллипсоида $\mathcal{E}$, содержащего невязку e_k .

Следующая теорема является дискретным аналогом Теоремы 2.

Теорема 3 [13]. Пусть $\hat{Q}, \hat{Y}$ — решение задачи

$$\min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & (QA - YC)^\top & 0 \\ QA - YC & -Q & QD_1 - YD_2 \\ 0 & (QD_1 - YD_2)^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 1$.

Тогда матрица оптимального фильтра дается выражением

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1}\hat{Y},$$

а минимальный инвариантный эллипсоид, содержащий невязку e_k системы (10), (12) с $x_0 = 0$, определяется матрицей

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}.$$

Процедура поиска разреженного решения задачи фильтрации для системы (10), (11) также предполагает выполнение трех последовательных шагов.

Алгоритм 2.

Шаг 1. Решая задачу выпуклого программирования

$$(13) \quad \min \operatorname{tr} H$$

при ограничениях

$$(14) \quad \begin{pmatrix} -\alpha Q & (QA - YC)^\top & 0 \\ QA - YC & -Q & QD_1 - YD_2 \\ 0 & (QD_1 - YD_2)^\top & -(1 - \alpha)I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

$$(15) \quad \begin{pmatrix} H & I \\ I & Q \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q \succ 0,$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$, находим величины Q^* , Y^* , H^* , определяющие матрицу оптимального фильтра

$$L^* = (Q^*)^{-1}Y^*,$$

матрицу

$$P^* = (Q^*)^{-1}$$

минимального инвариантного эллипсоида для невязки и соответствующее оптимальное значение функционала

$$J^* = \text{tr } H^*.$$

Шаг 2. Имея оптимальное значение функционала J^* , введем скалярный коэффициент релаксации $\gamma > 1$ и решаем задачу выпуклого программирования

$$\min \|Y\|_{c_1} \quad \text{при ограничениях (14), (15) и } \text{tr } H \preceq \gamma J^*$$

относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $H = H^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра α . В силу свойств c_1 -нормы можно ожидать появления нулевых столбцов в решении $\hat{Y}_0$ этой задачи.

Шаг 3. Решается исходная задача (13)–(15), где в матричной переменной Y зафиксировано такое же расположение нулевых столбцов, что и в столбцово-разреженной матрице $\hat{Y}_0$. Ее решение $\hat{Q}$, $\hat{Y}$ доставляет столбцово-разреженную матрицу фильтра

$$\hat{L} = \hat{Q}^{-1}\hat{Y}$$

и матрицу

$$\hat{P} = \hat{Q}^{-1}$$

соответствующего инвариантного эллипсоида для невязки.

Замечания 1 и 2 сохраняют свою силу и в дискретном случае.

Как показывают результаты численного моделирования, “плата” за использование малого числа управлений/выходов — проигрыш по критерию качества — обычно очень невелика.

5. Пример

Продемонстрируем предложенный подход к решению задачи разреженной фильтрации на примере задачи НЕЗ из библиотеки COMPlеib [21]. В ней собраны тестовые задачи, которые имеют прозрачное инженерное происхождение и часто используются для проверки эффективности алгоритмов управления. Рассматриваемая далее система описывает линеаризованную модель динамики вертолета Bell201A-1 с восемью состояниями; соответствующие матрицы системы (3) имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -0,0046 & 0,038 & 0,3259 & -0,0045 & -0,402 & -0,073 & -9,81 & 0 \\ -0,1978 & -0,5667 & 0,357 & -0,0378 & -0,2149 & 0,5683 & 0 & 0 \\ 0,0039 & -0,0029 & -0,2947 & 0,007 & 0,2266 & 0,0148 & 0 & 0 \\ 0,0133 & -0,0014 & -0,4076 & -0,0654 & -0,4093 & 0,2674 & 0 & 9,81 \\ 0,0127 & -0,01 & -0,8152 & -0,0397 & -0,821 & 0,1442 & 0 & 0 \\ -0,0285 & -0,0232 & 0,1064 & 0,0709 & -0,2786 & -0,7396 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0,0676 \\ -1,1151 \\ 0,0062 \\ -0,017 \\ -0,0129 \\ 0,139 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0,05 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $P_0 = 0,1I$ и воспользовавшись теоремой 2, на первом шаге алгоритма 1 получаем оптимальную матрицу фильтра

$$L^* = \begin{pmatrix} -3,3888 & -0,4284 & 0,0451 & 0,7626 & 1,3802 & -0,6771 \\ 1,2477 & -10,8108 & -0,0285 & -0,2999 & -0,4385 & 0,2334 \\ 0,5366 & -0,1163 & 0,0020 & 0,0763 & -0,0001 & -0,1173 \\ -0,0430 & 0,0292 & 9,8101 & 0,3401 & -0,3954 & -0,4499 \\ -0,3659 & 0,0901 & 1,0006 & -0,1135 & -0,4449 & -0,5456 \\ 0,2883 & 1,3576 & 0,0020 & -0,4210 & 0,0414 & -0,0226 \\ 6,9893 & -0,7343 & -0,0084 & -1,0649 & 0,7739 & 0,0687 \\ 0,0073 & 0,0021 & 0,2791 & 0,0000 & -0,0043 & -0,0000 \end{pmatrix}$$

и соответствующий инвариантный эллипсоид для невязки со следом $\text{tr } P^* = 1,1381$.

На втором шаге, решая задачу c_1 -оптимизации (9) при $\gamma = 10$, находим матрицу $\hat{Y}_0$ с двумя последними нулевыми столбцами порядка 10^{-10} :

$$\hat{Y}_0 = \begin{pmatrix} -0,4093 & -2,0441 & 0,1151 & -0,1159 & 0,0000 & -0,0000 \\ 0,4093 & -2,0441 & -0,2968 & -0,2514 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,4093 & 2,0441 & -1,0477 & -0,0129 & 0,0000 & -0,0000 \\ 0,0724 & -0,3055 & 1,9967 & 0,2514 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,4093 & -0,3780 & 1,9967 & -0,2514 & -0,0000 & 0,0000 \\ -0,4093 & 2,0441 & 1,1985 & 0,2514 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,2441 & 2,0441 & 1,9967 & 0,2514 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,0143 & -0,4028 & 1,9967 & 0,0245 & -0,0000 & 0,0000 \end{pmatrix}.$$

Фиксируя эти строки как нулевые и вновь решая исходную задачу, на третьем шаге получаем столбцово-разреженную матрицу фильтра

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -1,4878 & 0,6754 & 0,0519 & 0,5895 & 0 & 0 \\ 0,7782 & -11,1508 & -0,3270 & -0,2482 & 0 & 0 \\ 0,7283 & 0,0624 & -0,0159 & 0,0733 & 0 & 0 \\ -0,8973 & -0,1698 & 9,9423 & 0,4216 & 0 & 0 \\ -0,8263 & -0,1289 & 1,0840 & -0,0998 & 0 & 0 \\ 0,3308 & 1,3900 & 0,0164 & -0,4074 & 0 & 0 \\ 8,0516 & -0,0006 & -0,5781 & -0,9786 & 0 & 0 \\ 0,1116 & 0,0000 & 0,3123 & -0,0170 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0,4183 & -0,1314 & 0,0026 & -0,0146 & -0,0251 & 0,0179 & -0,0083 & -0,0147 \\ -0,1314 & 0,1571 & 0,0013 & 0,0007 & 0,0069 & -0,0076 & 0,0104 & 0,0050 \\ 0,0026 & 0,0013 & 0,1019 & -0,0044 & -0,0030 & -0,0000 & 0,0055 & -0,0010 \\ -0,0146 & 0,0007 & -0,0044 & 0,1105 & 0,0076 & -0,0004 & -0,0125 & 0,0026 \\ -0,0251 & 0,0069 & -0,0030 & 0,0076 & 0,1062 & -0,0011 & -0,0077 & 0,0024 \\ 0,0179 & -0,0076 & -0,0000 & -0,0004 & -0,0011 & 0,1010 & -0,0010 & -0,0007 \\ -0,0083 & 0,0104 & 0,0055 & -0,0125 & -0,0077 & -0,0010 & 0,1170 & -0,0022 \\ -0,0147 & 0,0050 & -0,0010 & 0,0026 & 0,0024 & -0,0007 & -0,0022 & 0,1011 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида для невязки со следом

$$\text{tr } \hat{P} = 1,2131.$$

Таким образом, построен разреженный фильтр — не использующий выходы y_5 и y_6 , причем проигрыш по критерию качества составил всего 6,5 %.

На рис. 1 сплошной линией показана траектория $x_1(t)$ при начальном условии $x_1(0) = \dots = x_8(0) = 0,01$ и допустимом (в данном случае — ступенчатом) внешнем возмущении; штриховой линией показана ее оптимальная

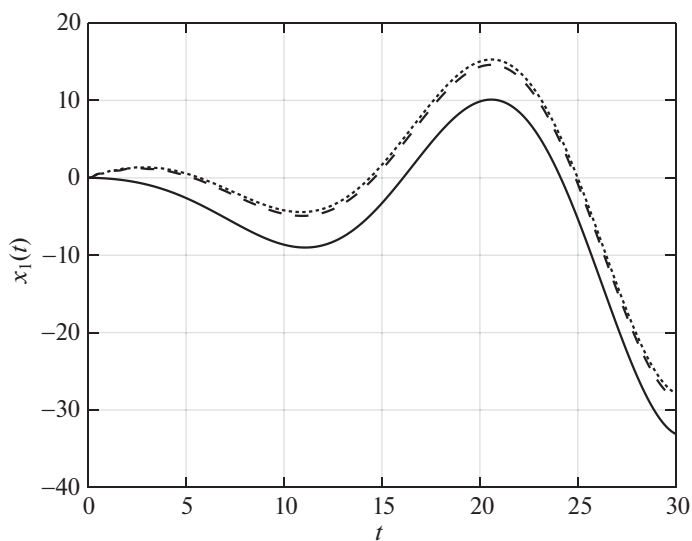


Рис. 1. Фильтрация координаты x_1 .

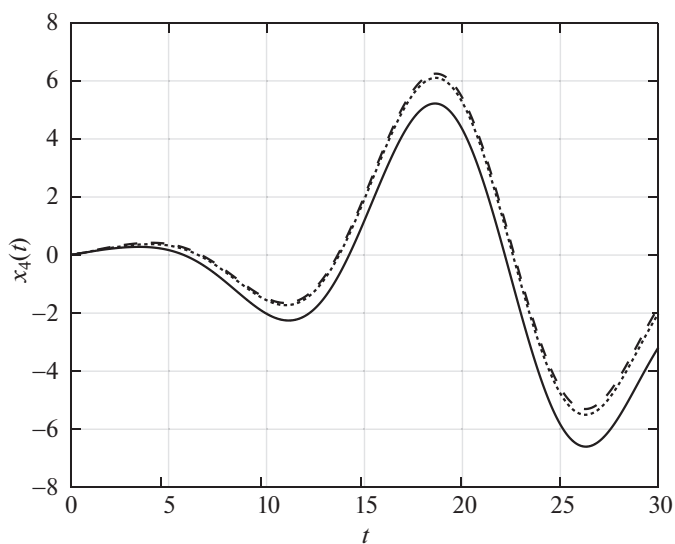


Рис. 2. Фильтрация координаты x_4 .

оценка $\hat{x}_1(t)$, а точечной линией — результат использования разреженной фильтрации $\tilde{x}_1(t)$.

Для координаты x_4 точность разреженной фильтрации еще выше, см. рис. 2.

На рис. 3 сплошной линией показана проекция траектории системы на плоскость (x_1, x_4) , а штриховой и точечной линиями — проекции ее оптимальной оценки и результата использования разреженной фильтрации соот-

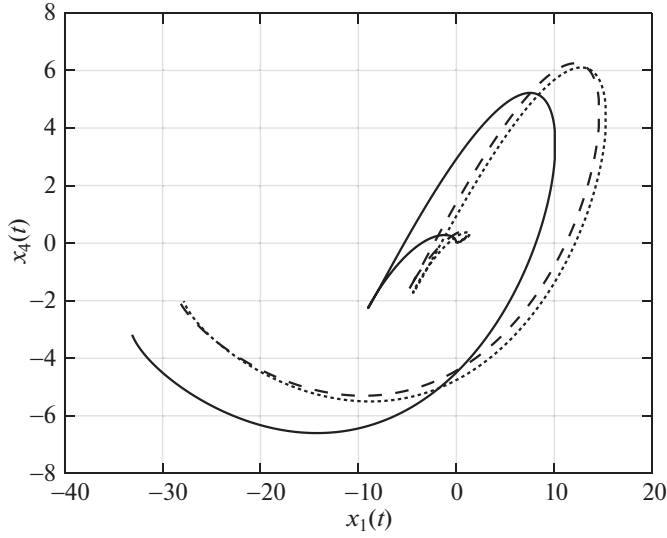


Рис. 3. Проекция траектории системы и ее оценок на плоскость (x_1, x_4) .

ветственно. В силу неустойчивости исходной системы область, содержащая ее траектории, является неограниченной.

6. Заключение

Предложен простой и универсальный подход к решению задачи разреженной фильтрации — использующей пониженное число выходов — при произвольных ограниченных внешних возмущениях с использованием наблюдателя. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов и технике линейных матричных неравенств. Применение этой концепции позволило свести исходную проблему к задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно.

Подход отличается простотой и легкостью реализации и в равной мере охватывает как непрерывную, так и дискретную постановки задачи. Эффективность предлагаемой процедуры продемонстрирована на тестовом примере.

В дальнейшем автор планирует распространить полученные результаты на робастные постановки задачи, в частности — на системы вида

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Dw$$

с матричной неопределенностью $\Delta \in \mathbb{R}^{p \times q}$, ограниченной в спектральной норме $\|\Delta\| \leq 1$, и заданными матрицами F, H соответствующих размерностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zennaro F.M., Chen K. Towards Understanding Sparse Filtering: A Theoretical Perspective // Neural Networks. 2018. V. 98. P. 154–177.

2. Zhang Z., Li S., Wang J., Xin Y., An Z. General Normalized Sparse Filtering: A Novel Unsupervised Learning Method for Rotating Machinery Fault Diagnosis // Mech. Syst. Signal Processing. 2019. V. 124. P. 596–612.
3. Han C., Lei Y., Xie Y., Zhou D., Gong M. Visual Domain Adaptation Based on Modified $\mathcal{A}$ -Distance and Sparse Filtering // Pattern Recognition. 2020. V. 104. Art. 107254.
4. Schweppe F.C. Uncertain Dynamic Systems. NJ: Prentice Hall, 1973.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
6. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
7. Фурасов В.Д. Задачи гарантированной идентификации. М.: Бином, 2005.
8. Chernousko F., Polyak B. (eds.) Special Issue on Set-Membership Modelling of Uncertainties in Dynamical Systems // Math. Comp. Modelling Dynam. Syst. 2005. V. 11. Iss. 2. P. 123–124.
9. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.
Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // Doklady Mathematics. 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.
10. Хлебников М.В. Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2009. № 1. С. 147–161.
Khlebnikov M.V. Robust Filtering under Nonrandom Disturbances: The Invariant Ellipsoid Approach // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 133–146.
11. Хлебников М.В., Поляк Б.Т. Фильтрация при произвольных ограниченных внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств // 13-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2020). Матер. XXXII Конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. СПб.: Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2020. С. 291–294.
12. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
13. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
14. Donoho D.L. Compressed Sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. P. 1289–1306.
15. Kim S.-J., Koh K., Boyd S., Gorinevsky D. ℓ_1 -Trend Filtering // SIAM Rev. 2009. V. 51. No. 2. P. 339–360.
16. Lin F., Fardad M., Jovanović M. Sparse Feedback Synthesis via the Alternating Direction Method of Multipliers // Proc. 2012 Amer. Control Conf. Montreal, Canada, June 27–29, 2012. P. 4765–4770.
17. Lin F., Fardad M., Jovanović M. Augmented Lagrangian Approach to Design of Structured Optimal State Feedback Gains // IEEE Trans. Automat. Control. 2011. V. 56. No. 12. P. 2923–2929.
18. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. An LMI Approach to Structured Sparse Feedback Design in Linear Control Systems // Proc. 12th Eur. Control Conf. (ECC’13). Zürich, Switzerland, July 17–19, 2013. P. 833–838.

19. *Quattoni A., Carreras X., Collins M., Darrell T.* An Efficient Projection for $\ell_{1,\infty}$ Regularization // Proc. 26th Annual Int. Conf. Machine Learning. Montreal, Canada, June 14–18, 2009. P. 857–864.
20. *Квинто Я.И., Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Некоторые эксперименты по получению разреженных регуляторов // Тр. 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых “Управление большими системами” (УБС’2014). Арзамас, 9–12 сентября 2014 г. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 227–238.
21. *Leibfritz F., Lipinski W.* Description of the Benchmark Examples in COMPlEib 1.0 // Technical report, University of Trier, 2003, URL www.complib.de

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 07.02.2021

После доработки 19.05.2021

Принята к публикации 29.08.2021