Автоматика и телемеханика, № 3, 2022

Линейные системы

© 2022 г. **Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru),**
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
"Московский физико-технический институт", Москва)

СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ ПРИ ПОМОЩИ НАБЛЮДАТЕЛЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ[1]

Предлагается новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя. Выписан градиентный метод для отыскания динамической обратной связи по выходу и дано его обоснование. Рассмотрен ряд примеров.

Ключевые слова: линейные системы, внешние возмущения, обратная связь по выходу, наблюдатель, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231022030023

1. Введение

Вопросам стабилизации и управления линейными системами по выходу с использованием наблюдателя посвящено множество публикаций, относящихся к самым разным областям автоматического управления. Так, в работах Измайлова [1] (и ранее Полоцкого [2]), посвященных проблеме всплеска, речь шла именно о наблюдателях. Систематическое изложение теории наблюдателей можно найти в монографии [3].

В работе [4], посвященной задаче подавления ограниченных внешних возмущений, рассматривался синтез динамической обратной связи по выходу, которая минимизирует размер эллипсоида, содержащего состояние линейной системы управления. Соответствующая задача синтеза управления была сведена к решению задачи полуопределенного программирования в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН) [5, 6]. При этом использовалась оценка состояния, получаемая с помощью наблюдателя Люенбергера [7]. Вместе с тем в [4] пришлось произвести ряд загрублений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства и установить окончательный результат в

[1] Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-30005.

терминах ЛМН. При этом сами ЛМН получились довольно громоздкими, а найденные условия — излишне консервативными.

Среди наиболее идейно близких к такому подходу публикаций следует упомянуть и монографию [8], в которой был предложен ЛМН-подход к синтезу стабилизирующих регуляторов по измеряемому выходу с использованием наблюдателя. Впрочем, в ней не затрагивается случай произвольных ограниченных внешних возмущений — принадлежащих классу L_∞.

С другой стороны, в последнее время стал очень популярным подход к задачам управления линейными системами как к задачам оптимизации. Так, в классической задаче о линейно-квадратичном регуляторе можно рассматривать матрицу линейной обратной связи как переменную и свести проблему к минимизации показателя качества по этой переменной. Градиент такой функции для обратной связи по выходу был выписан еще в статье [9] 1970 г., однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно, см. [10–14]. В [15] аналогичный подход был впервые применен к задачам с внешними возмущениями.

Настоящая статья является естественным продолжением как работы [4], так и [15]. В ней предлагается новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя; далее эта задача решается градиентным методом. Многочисленные примеры демонстрируют эффективность предлагаемого алгоритма.

Всюду далее $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, $\|\cdot\|$ — спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма матрицы, $^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования, tr — след матрицы, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение Фробениуса для матриц, I — единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A, а $\sigma(A) = -\max\limits_i \mathrm{Re}\,(\lambda_i(A)) > 0$ — степень устойчивости гурвицевой матрицы A. Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Постановка задачи и подходы к решению

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0,\\
&y = C_1 x + D_1 w,\\
&z = C_2 x,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{r\times n}$, с состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, наблюдаемым выходом $y \in \mathbb{R}^l$, оптимизируемым выходом $z \in \mathbb{R}^r$, управлением $u \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0.$$

Пара (A, B) управляема, пара (A, C_1) наблюдаема.

Хотя природа возмущений в состоянии и выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы D и D_1 "вырезают" из вектора w разные "куски"; общий случай также может быть рассмотрен ценой некоторого усложнения.

Пусть состояние x системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y. Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход z.

Построим наблюдатель, описываемый линейным дифференциальным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода y и его прогноза $C_1\widehat{x}$:

$$\dot{\widehat{x}} = A\widehat{x} + Bu + L(y - C_1\widehat{x}), \quad \widehat{x}(0) = 0, \tag{2}$$

где $L \in \mathbb{R}^{n\times l}$ — матрица наблюдателя.

Введем в рассмотрение невязку

$$e(t) = x(t) - \widehat{x}(t);$$

согласно (1), (2) она будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\dot{e} = (A - LC_1)e + (D - LD_1)w, \quad e(0) = x_0.$$

Таким образом, при построении обратной связи с помощью динамического регулятора

$$u = K\widehat{x}, \quad K \in \mathbb{R}^{p\times n}, \tag{3}$$

приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x - BKe + Dw, \\ \dot{e} &= (A - LC_1)e + (D - LD_1)w, \\ z &= C_2x \end{aligned} \tag{4}$$

с регулируемым выходом z.

Важно отметить, что часто синтез статического регулятора по выходу невозможен, т.е. матрица $A + BKC_1$ не стабилизируема выбором K, тогда как динамический регулятор (3) может быть построен (при малоограничительных требованиях управляемости и наблюдаемости системы; подробнее см. раздел 2.3).

Напомним концепцию метода инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [6, 16]). Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{5}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и измеримым по t внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^l$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{6}$$

Пусть система (5) устойчива (т.е. матрица A гурвицева), пара (A, D) управляема.

Определение 1. *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$\mathcal{E}_x = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0, \tag{7}$$

называется инвариантным для динамической системы (5), (6), *если из условия* $x(0) \in \mathcal{E}_x$ *следует* $x(t) \in \mathcal{E}_x$ *для всех моментов времени* $t \geqslant 0$.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему, в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде. Инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости, т.е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида $\mathcal{E}_x$, стремится к эллипсоиду $\mathcal{E}_x$ с течением времени.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В этой связи естественно интересоваться минимальными (в том или ином смысле) эллипсоидами, содержащими выход системы. Нетрудно видеть, что если $\mathcal{E}_x$ — инвариантный эллипсоид (7) с матрицей P, то выход системы (5) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \left\{z \in \mathbb{R}^p\colon \quad z^{\mathrm{T}} (CPC^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1\right\}. \tag{8}$$

Эллипсоид (8) будем называть *ограничивающим* (*по выходу*). Часто в качестве критерия его минимальности рассматривается линейная функция $f(P) = \operatorname{tr} CPC^{\mathrm{T}}$, значение которой равно сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида.

В [5] был установлен результат, дающий критерий инвариантности эллипсоида в терминах линейных матричных неравенств. Несколько уточняя этот критерий (см. [6]), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Пусть матрица A гурвицева, $\sigma = -\max_i \mathrm{Re}\,(\lambda_i(A)) > 0$, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $0 < \alpha < 2\sigma$, удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\Big(A + \frac{\alpha}{2} I\Big) P + P \Big(A + \frac{\alpha}{2} I\Big)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha} D D^{\mathrm{T}} = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \operatorname{tr} C P(\alpha) C^{\mathrm{T}}$$

на интервале $0 < \alpha < 2\sigma$ и, если α^* — точка минимума и $x(0)$ удовлетворяет условию $x^{\mathrm{T}}(0) P^{-1}(\alpha^*) x(0) \leqslant 1$, гарантируется оценка

$$|z(t)|^2 \leqslant f(\alpha^*), \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

2.3. Подход к решению

Введя составной вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

придадим системе (4) вид

$$\begin{aligned} \dot g &= \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}}_{A_c} g + \underbrace{\begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{D}} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\ z &= \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{C}_2} g. \end{aligned} \tag{9}$$

Следуя методу инвариантных эллипсоидов, заключим состояние g системы (9) в инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E}_g = \left\{ g \in \mathbb{R}^{2n}: \quad x^{\mathrm{T}} P^{-1} x \leqslant 1 \right\},$$

порожденный матрицей $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида

$$\mathcal{E}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^r: \quad z^{\mathrm{T}} (\mathcal{C}_2 P \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}})^{-1} z \leqslant 1 \right\}$$

по выходу z с матрицей $\mathcal{C}_2 P \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}$. В качестве критерия его минимальности примем критерий следа, т.е. величину $\operatorname{tr} \mathcal{C}_2 P \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}$.

Обратим внимание, что в отличие от [4], здесь — для оценки выхода z с помощью ограничивающего эллипсоида — строится инвариантный эллипсоид по состоянию x, а не по его оценке $\widehat{x}$, что гораздо более естественно.

Заметив, что матрица A_c представима в виде

$$A_c = \begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-LC_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_1} K \underbrace{\begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}}_{N_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_{M_2} L \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -C_1 \end{pmatrix}}_{N_2},$$

в соответствии с теоремой 1 приходим к задаче минимизации функции $\operatorname{tr} \mathcal{C}_2 P \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}$ при ограничении

$$\begin{aligned} &\Big(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2 + \frac{\alpha}{2} I\Big) P + \\ &+ P \Big(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2 + \frac{\alpha}{2} I\Big)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

относительно матричных переменных $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times l}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Вместе с тем в качестве критерия качества выберем функционал

$$f(K, L, \alpha) = \operatorname{tr} \mathcal{C}_2 P \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}} + \rho_K \|K\|_F^2 + \rho_L \|L\|_F^2, \tag{11}$$

в котором помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, введены штрафы за величину матриц регулятора и наблюдателя (при этом коэффициенты $\rho_K, \rho_L > 0$ регулируют их важность); в то же время их наличие гарантирует коэрцитивность минимизируемой функции по K и L, см. раздел 3.2.

Замечание 1. Обратим внимание, что блочная матрица A_c имеет те же собственные значения, что и стоящие на ее диагонали матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$. В свою очередь, существование матриц K и L таких, чтобы матрицы $A + BK$ и $A - LC_1$ были устойчивыми, вытекает из свойств управляемости и наблюдаемости исходной системы.

Введем для удобства обозначение

$$A_{K,L} = \mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2.$$

В силу замечания 1 заведомо существуют матрицы K_0 и L_0 такие, что матрица A_{K_0,L_0} гурвицева. Матрицы (K, L), обладающие этим свойством, будем называть *стабилизирующей матричной парой*.

3. Оптимизация функции $f(K, L, \alpha)$

В предыдущем разделе было установлено, что исходная задача синтеза динамической обратной связи при помощи наблюдателя, подавляющей воздействие внешних возмущений, свелась к задаче минимизации функции $f(K, L, \alpha)$, определяемой соотношением (11), при ограничении

$$\Big(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\Big) P + P \Big(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\Big)^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{\alpha} \mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

по переменным $P = P^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times l}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Запись $f(K, L, \alpha)$ подчеркивает, что при заданных K, L и α матрица P находится из уравнения Ляпунова (12); тем самым независимыми переменными являются K, L и α.

3.1. Оптимизация функции $f(\alpha)$

Итак, приходим к уравнению Ляпунова (12) вида $AP + PA^{\mathrm{T}} = -DD^{\mathrm{T}}$ с *полуопределенной* правой частью. Важно отметить, что в настоящей работе не предполагается ни требование квадратности и невырожденности матрицы D, введенное в [15], ни стандартное требование управляемости пары (A, D).

Замечание 2. Согласно [6, лемма 1.2.3] единственное решение уравнения Ляпунова (12) лишь положительно *полуопределено* (при гурвицевой матрице $A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I$, т.е. при $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$). При этом на указанном интервале оно представимо в явном виде как

$$P = P(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{(A_{K,L}+\frac{\alpha}{2}I)t}\frac{1}{\alpha}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}e^{(A_{K,L}+\frac{\alpha}{2}I)^{\mathrm{T}}t}dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}e^{A_{K,L}t}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}e^{A_{K,L}^{\mathrm{T}}t}dt \succcurlyeq 0.$$

Отсюда имеем $\mathcal{C}_2P\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}} \succcurlyeq 0$, поэтому функция $f(\alpha) = \operatorname{tr}\mathcal{C}_2P\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}$, рассматриваемая как функция только от параметра α (при некоторой фиксированной стабилизирующей паре (K, L)), строго положительна на рассматриваемом интервале. В самом деле, в противном случае полуопределенная матрица $\mathcal{C}_2P\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}$ обращалась бы в нуль, что невозможно в силу $\mathcal{C}_2 \neq 0$ и $\mathcal{D} \neq 0$ (из последнего имеем $P \neq 0$).

Эти результаты позволяют полностью перенести на рассматриваемый случай свойства функции $f(\alpha)$, установленные в [15]. В частности, функция $f(\alpha)$ определена, положительна и сильно выпукла на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$, а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует $c > 0$ такое, что

$$f(\alpha) \geqslant \frac{c}{\alpha(2\sigma - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L}). \tag{13}$$

Минимизацию функции $f(\alpha)$ можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. Зададимся начальным приближением $0 < \alpha_0 <$ $< 2\sigma(A_{K,L})$, например $\alpha_0 = \sigma(A_{K,L})$, и применим итерационный процесс

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}. \tag{14}$$

При этом согласно [15]

$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} Y\left(P - \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}\right), \quad f''(\alpha) = 2\operatorname{tr} Y\left(X + \frac{1}{\alpha^3}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}\right),$$

где Y и X — решения уравнений Ляпунова

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\mathrm{T}} Y + Y\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right) + \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}\mathcal{C}_2 = 0$$

и

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right) X + X\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\mathrm{T}} + P - \frac{1}{\alpha^2}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} = 0.$$

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма.

Теорема 2 [15]. *В методе* (14) *справедливы оценки*

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leqslant \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)}|\alpha_0 - \alpha^*|, \qquad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leqslant c|\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где $c > 0$ — некоторая константа (*она может быть выписана явно*).

Первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом $1/2$), а вторая — квадратичную сходимость в окрестности решения. Реально требуется не более трех – четырех итераций для получения решения с большой точностью (если только начальная точка не слишком близка к границам интервала). Таким образом, авторы располагают быстрым алгоритмом для оптимизации по параметру α.

3.2. Оптимизация функции $f(K, L)$

Теперь займемся минимизацией функции

$$f(K, L) = \min_{\alpha} f(K, L, \alpha),$$

предварительно исследовав ее свойства.

Лемма 1. Функция $f(K, L)$ определена и положительна на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов.

Действительно, если матрица $A_{K,L}$ гурвицева, то $\sigma(A_{K,L}) > 0$ и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$ решение $P \succcurlyeq 0$ уравнения Ляпунова (12) существует. Тем самым определена (строго положительная в силу замечания 2) функция $f(K, L, \alpha)$; при этом $f(K, L) > 0$ в силу (13). Множество ее определения $\mathcal{S}$ может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими, см. [15].

Лемма 2. На множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих матричных пар функция $f(K, L)$ коэрцитивна (*т.е. стремится к бесконечности на границе области*), *причем справедливы следующие оценки:*

$$f(K, L) \geqslant \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}})\|\mathcal{D}\|_F^2}{4\sigma(A_{K,L})\left(\|A_{K,L}\| + \sigma(A_{K,L})\right)}, \tag{15}$$

$$f(K, L) \geqslant \rho_K\|K\|^2, \quad f(K, L) \geqslant \rho_L\|L\|^2.$$

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении.

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{(K, L) \in \mathcal{S} \colon \quad f(K, L) \leqslant f(K_0, L_0)\}.$$

Из леммы 2 вытекает очевидное

Следствие 1. Для любых $(K_0, L_0) \in \mathcal{S}$ множество $\mathcal{S}_0$ ограничено.

С другой стороны, у функции $f(K, L)$ на множестве $\mathcal{S}_0$ существует точка минимума (как у непрерывной — в силу свойств решения уравнения Ляпунова — функции на компактном множестве), но множество $\mathcal{S}_0$ не имеет общих точек с границей $\mathcal{S}$ в силу (15). Далее будет показано, что $f(K, L)$ дифференцируема на $\mathcal{S}_0$. Следовательно, справедливо

Следствие 2. Существует точка минимума (K_*, L_*) на множестве S, и в ней градиент функции $f(K, L)$ обращается в нуль.

Перейдем к свойствам градиента функции $f(K, L, \alpha)$.

Лемма 3. Функция $f(K, L, \alpha)$ определена на множестве стабилизирующих матричных пар (K, L) и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$\nabla_\alpha f(K, L, \alpha) = \operatorname{tr} Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} \right),$$
$$\nabla_K f(K, L, \alpha) = 2 \left(\rho_K K + M_1^{\mathrm{T}} Y P N_1^{\mathrm{T}} \right),$$
$$\nabla_L f(K, L, \alpha) = 2 \left(\rho_L L + M_2^{\mathrm{T}} Y P N_2^{\mathrm{T}} \right),$$

где матрица Y является решением уравнения Ляпунова

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^{\mathrm{T}} Y + Y \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) + \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}} \mathcal{C}_2 = 0. \tag{16}$$

Минимум $f(K, L, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_K f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_L f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(K, L, \alpha) = 0.$$

При этом $f(K, L, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $0 < \alpha < 2\sigma(A_{K,L})$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала (см. подраздел 3.1).

Градиенты функции $f(K, L)$ по K и по L не являются липшицевыми на множестве S стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что они обладают этим свойством на его подмножестве S_0, аналогично тому, как это было сделано в [15].

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

4. Алгоритм решения

Ниже предлагается следующий итеративный подход к решению задачи (10)–(11). В его основе лежит попеременное применение градиентного метода по переменным K и L и минимизация по параметру α по методу Ньютона.

Алгоритм для минимизации $f(K, L, \alpha)$:

1. Задаемся параметрами

$$\varepsilon > 0, \quad \gamma_K > 0, \quad \gamma_L > 0, \quad 0 < \tau_K < 1, \quad 0 < \tau_L < 1$$

и начальными стабилизирующими приближениями K_0 и L_0.
Вычисляем величину $\alpha_0 = \frac{1}{2}\sigma(\mathcal{A} + M_1 K_0 N_1 + M_2 L_0 N_2)$.

2. На j-й итерации имеем величины K_j, L_j и α_j.
Вычисляем градиент $H_j^K = \nabla_K f(K_j, L_j, \alpha_j)$. Если $\|H_j^K\| \leqslant \varepsilon$, то K_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода по K:

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j^K H_j^K,$$

при этом длину шага $\gamma_j^K > 0$ подбираем дроблением γ_K до выполнения условий:
а) K_{j+1} стабилизирует матрицу $\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L_j N_2$;
б) $f(K_{j+1}) \leqslant f(K_j) - \tau_K \gamma_j^K \|H_j^K\|^2$.

4. Имея величину K_{j+1}, вычисляем градиент $H_j^L = \nabla_L f(K_{j+1}, L_j, \alpha_j)$.
Если $\|H_j^L\| \leqslant \varepsilon$, то L_j принимаем за приближенное решение.

5. Делаем шаг градиентного метода по L:

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j^L H_j^L,$$

при этом длину шага $\gamma_j^L > 0$ подбираем дроблением γ_L до выполнения условий:
а) L_{j+1} стабилизирует матрицу $\mathcal{A} + M_1 K_{j+1} N_1 + M_2 L N_2$;
б) $f(L_{j+1}) \leqslant f(L_j) - \tau_L \gamma_j^L \|H_j^L\|^2$.

6. Для полученных K_{j+1}, L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(K_{j+1}, L_{j+1}, \alpha)$ по α и получаем α_{j+1}. Переходим к п. 2.

Важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Пусть для некоторых K, L, α и $P \succ 0$ выполняется

$$(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)\, P + P(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^{\mathrm{T}} P + \\ + \alpha P + \frac{1}{\alpha}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} = 0.$$

Рассмотрим приращение по K:

$$K \to K - \gamma H^K, \quad H^K = \nabla_K f(K, L, \alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица $\mathcal{A}+M_1(K-\gamma H^K)N_1+M_2LN_2$ останется устойчивой (гурвицевой).

Для этого достаточно потребовать, чтобы P оставалась матрицей квадратичной функции Ляпунова для $\mathcal{A}+M_1(K-\gamma H^K)N_1+M_2LN_2$, т.е.

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{A}+M_1\left(K-\gamma H^K\right)N_1+M_2LN_2\right)P+\\+P\big(\mathcal{A}+M_1\left(K-\gamma H^K\right)N_1+M_2LN_2\big)^{\mathrm{T}}P\prec 0\end{gathered}$$

или, с учетом исходного уравнения,

$$\gamma\left(-M_1H^KN_1P-P\big(M_1H^KN_1\big)^{\mathrm{T}}\right)\prec\alpha P+\frac{1}{\alpha}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}},$$

откуда

$$\gamma<\lambda_{\max}^{-1}\left(-M_1H^KN_1P-P\big(M_1H^KN_1\big)^{\mathrm{T}},\alpha P+\frac{1}{\alpha}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}\right).$$

Аналогичным образом предлагается выбирать пробный шаг при оптимизации по переменной L.

Можно предложить еще один способ выбора пробного шага. Найдем для некоторой стабилизирующей пары (K,L) решение P уравнения Ляпунова

$$(\mathcal{A}+M_1KN_1+M_2LN_2)\,P+P(\mathcal{A}+M_1KN_1+M_2LN_2)^{\mathrm{T}}P=-I.$$

Рассмотрим приращение по K:

$$K\to K-\gamma H^K,\quad H^K=\nabla_K f(K,L,\alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица P останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для $\mathcal{A}+M_1(K-\gamma H^K)N_1+M_2LN_2$, т.е.

$$\begin{gathered}\left(\mathcal{A}+M_1\left(K-\gamma H^K\right)N_1+M_2LN_2\right)P+\\+P\big(\mathcal{A}+M_1\left(K-\gamma H^K\right)N_1+M_2LN_2\big)^{\mathrm{T}}P\prec 0.\end{gathered}$$

С учетом исходного уравнения имеем

$$\gamma\left(-M_1H^KN_1P-P\big(M_1H^KN_1\big)^{\mathrm{T}}\right)\prec I,$$

откуда

$$\gamma<\lambda_{\max}^{-1}\left(-M_1H^KN_1P-P\big(M_1H^KN_1\big)^{\mathrm{T}}\right).$$

Аналогичным образом выбирается пробный шаг при оптимизации по переменной L.

Также весьма многообещающим представляется способ, аналогичный предложенному в [14] и основанный на использовании вторых производных; согласно ему пробный шаг по K выбирается по формуле

$$\gamma_j=\frac{\|H_j^K\|^2}{\nabla_{KK}^2 f(K,L)[H_j^K,H_j^K]}.$$

Вычисление выражения в знаменателе производится с помощью формулы[2]

$$\frac{1}{2}\nabla^2_{KK} f(K,L)[E,E] = \rho_K \langle E,E\rangle + 2\langle M_1^{\mathrm{T}} Y P_K N_1^{\mathrm{T}}, E\rangle,$$

где P_K — решение уравнения Ляпунова

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right) P_K + P_K \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^{\mathrm{T}} + M_1 E N_1 P + P(M_1 E N_1)^{\mathrm{T}} = 0.$$

Пробный шаг по L выбирается аналогичным образом.

Использование вторых производных требует всего лишь решения еще двух уравнений Ляпунова, т.е. не сильно усложняет вычисления. Впрочем, этот подход требует отдельного обоснования.

5. Примеры

Пример 1. Продемонстрируем предложенный подход к подавлению внешних возмущений на примере задачи управления двухмассовой системой — системой из двух твердых тел с массами m_1 и m_2, соединенных пружиной с коэффициентом упругости κ, скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (см. рис. 1).

Управляющее воздействие $u \in \mathbb{R}$ прикладывается к левому телу с целью компенсировать влияние внешнего возмущения

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

компоненты которого воздействуют на левое и правое тело соответственно. Возмущение предполагается произвольным, но ограниченным в любой момент времени: $|w(t)| \leqslant 1$.

Обозначим через x_1, v_1 соответственно координату и скорость левого тела, а через x_2, v_2 — правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

есть вектор состояния рассматриваемой динамической системы, полностью описывающий ее поведение.

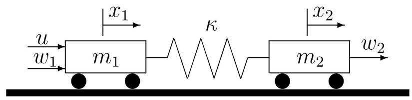

Рис. 1. Двухмассовая система из примера 1.

[2] Соответствующий результат устанавливается аналогично доказательству леммы 5 в [15].

В качестве наблюдаемого выхода системы возьмем вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

а в качестве регулируемого — вектор

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

При единичных параметрах системы ($m_1 = m_2 = \kappa = 1$) непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\kappa}{m_1} & \dfrac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\kappa}{m_2} & -\dfrac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 0.$$

Заметим, что для этой задачи статического регулятора по выходу не существует: матрица $A + BKC_1$ не стабилизируема за счет выбора K.

В [4] был предложен подход к решению этой задачи, основанный на технике линейных матричных неравенств [5] и методе инвариантных эллипсоидов [6]. Следуя ему, получаем матрицу регулятора

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} -8{,}9842 & 6{,}6234 & -6{,}3412 & -5{,}2864 \end{pmatrix} \cdot 10^4,$$

матрицу наблюдателя

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} 1{,}6533 & -0{,}0655 \\ 0{,}1231 & 1{,}3992 \\ 1{,}6800 & -0{,}1450 \\ -0{,}0456 & 1{,}0700 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по выходу z с матрицей

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 18{,}3672 & 3{,}6100 \\ 3{,}6100 & 17{,}5092 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} \widehat{R} = 35{,}8764.$$

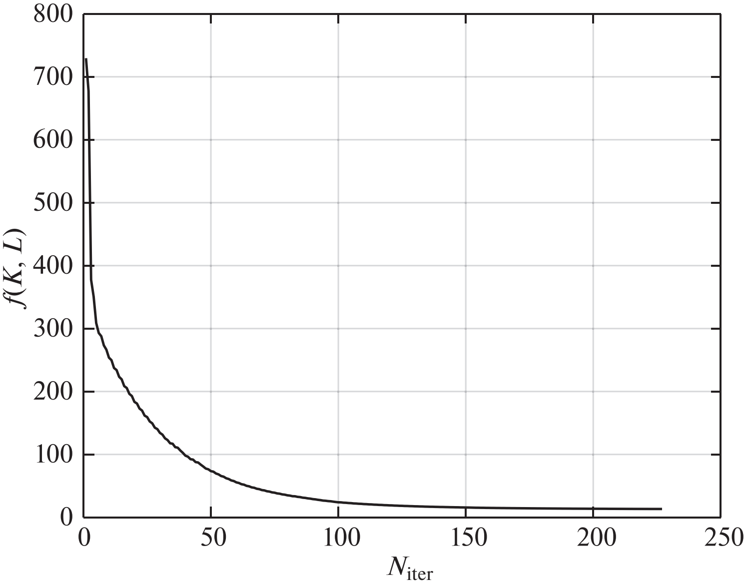

Рис. 2. Оптимизационная процедура в примере 1.

Теперь воспользуемся предлагаемым подходом, положив $\rho_K = 0{,}01$, $\rho_L = 0{,}001$ и взяв в качестве начального приближения для регулятора матрицу

$$K_0 = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -10 & 1 \end{pmatrix},$$

а в качестве начального приближения для наблюдателя матрицу

$$L_0 = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \\ 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Динамика изменения критерия $f(K, L)$ при расчете по вышеописанному алгоритму показана на рис. 2.

Процесс завершился нахождением матрицы регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} -6{,}1908 & 3{,}8595 & -4{,}9321 & -3{,}2368 \end{pmatrix},$$

(норма $\|K^*\| = 9{,}3821$ которого много меньше, чем у регулятора $\widehat{K}$, полученного методом ЛМН), а также матрицы наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 5{,}1504 & 2{,}7780 \\ -4{,}6186 & -1{,}0657 \\ 13{,}2831 & 5{,}5175 \\ 4{,}0128 & 3{,}0511 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 16{,}9272,$$

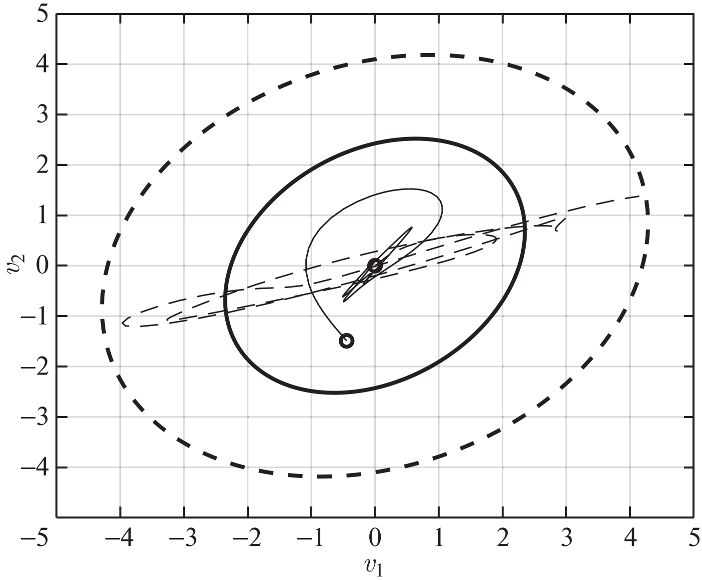

Рис. 3. Ограничивающие эллипсы и траектории выхода в примере 1.

и соответствующего ограничивающего эллипса по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 5{,}1094 & 0{,}9660 \\ 0{,}9660 & 4{,}9536 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} R^* = 10{,}0630.$$

На рис. 3 сплошной полужирной линией показан найденный ограничивающий эллипс; для сравнения полужирным пунктиром показан ограничивающий эллипс при LMI-подходе. На этом же рисунке сплошной линией показана траектория выхода z системы при некотором начальном условии и допустимом внешнем возмущении, а пунктиром — траектория ее оценки $\widehat{z} = C_2\widehat{x}$ при $\widehat{x}(0) = 0$; как видно, она покидает ограничивающий эллипс.

На рис. 4 сплошной линией показана динамика величины $|z(t)|$, а пунктиром — ее оценки $|\widehat{z}(t)|$.

Изменим теперь начальное приближение матрицы наблюдателя на

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -15 & 10 \\ 8 & -5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

В результате процесс сойдется к матрице регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} -8{,}4182 & -0{,}0044 & -3{,}1765 & -6{,}3851 \end{pmatrix},$$

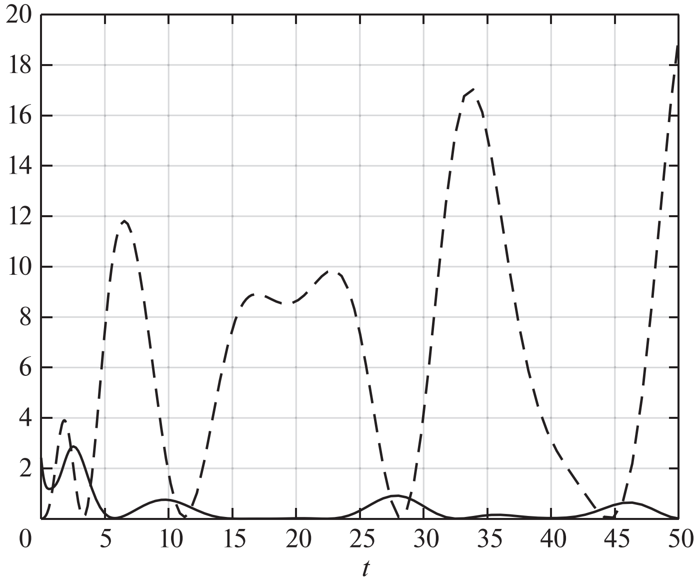

Рис. 4. Динамика изменения величин $|z(t)|$ и $|\widehat{z}(t)|$ в примере 1.

где $\|K^*\| = 11{,}0329$, матрице наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 6{,}3792 & 13{,}4718 \\ -5{,}7668 & -3{,}9960 \\ 7{,}8898 & 5{,}2154 \\ -3{,}8242 & -1{,}9790 \end{pmatrix},$$

для которой $\|L^*\| = 18{,}7649$, и соответствующему ограничивающему эллипсу по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 5{,}3326 & 0{,}8664 \\ 0{,}8664 & 5{,}0403 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} R^* = 10{,}3729.$$

При сравнительно различных матрицах регулятора и наблюдателя найденные эллипсы отличаются всего лишь на 3% по критерию следа, см. рис. 5. Для сравнения штрихпунктиром показан ограничивающий эллипс, полученный в соответствии с методом [17] синтеза линейных динамических регуляторов по выходу, основанным на решении ЛМН.

Пример 2. Вновь обратимся к системе из примера 1; пусть теперь наблюдению доступно все — зашумленное — состояние системы:

$$C_1 = I, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

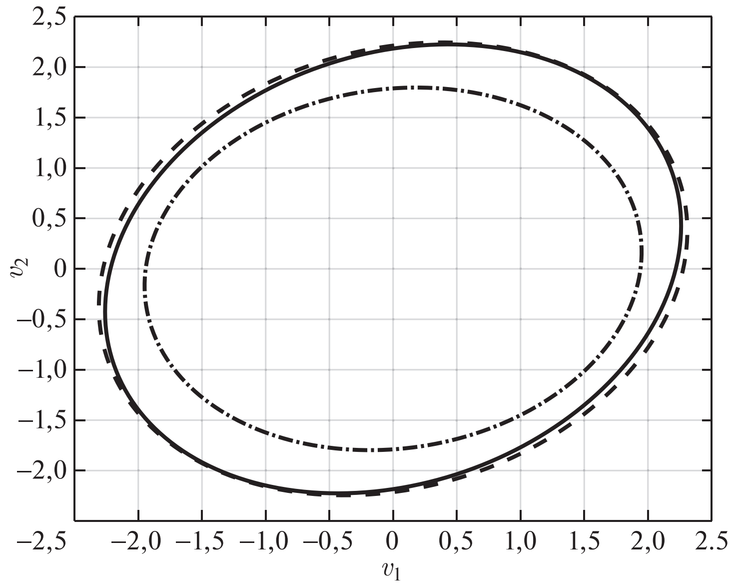

Рис. 5. Ограничивающие эллипсы в примере 1.

ЛМН-подход доставляет матрицу регулятора

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} -1{,}4474 & 1{,}0068 & -0{,}9406 & -0{,}9006 \end{pmatrix} \cdot 10^{10},$$

матрицу наблюдателя

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} 1{,}2219 & -0{,}3075 & 0{,}1889 & 0{,}3736 \\ 0{,}0869 & 0{,}8083 & 0{,}1552 & 0{,}4082 \\ -0{,}0833 & -0{,}2344 & 1{,}9514 & 0{,}0692 \\ 0{,}0543 & 0{,}3880 & -0{,}0735 & 0{,}8007 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по выходу z с матрицей

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 9{,}4702 & 2{,}4556 \\ 2{,}4556 & 9{,}7464 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} \widehat{R} = 19{,}2166.$$

Обратим внимание на величину матрицы регулятора. С целью ее уменьшения принято вводить компоненту управления в минимизируемый выход: $z = C_2x + B_2u$, что естественно приводит к дополнительному увеличению размера ограничивающего эллипсоида.

Предлагаемый подход при начальных приближениях

$$K_0 = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

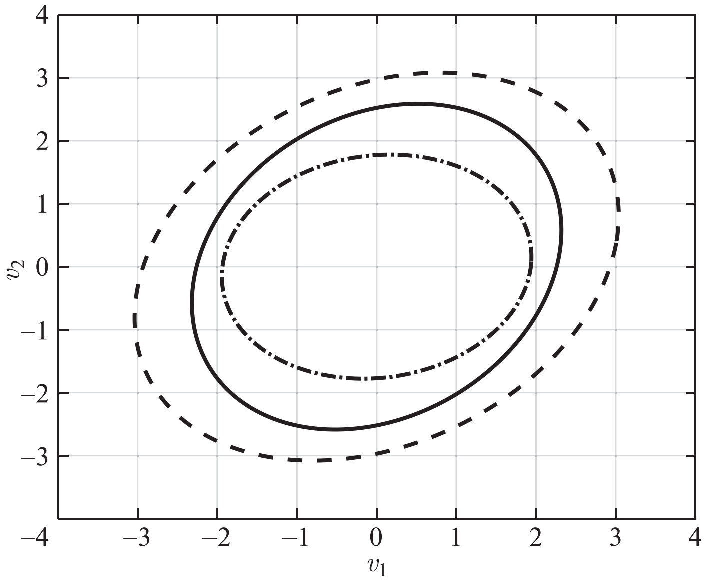

Рис. 6. Ограничивающие эллипсы в примере 2.

доставляет матрицу регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} -9{,}8237 & 2{,}9696 & -6{,}9974 & -1{,}1508 \end{pmatrix},$$

матрицу наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 9{,}9369 & 1{,}3231 & -0{,}3335 & 0{,}0487 \\ 1{,}1640 & 0{,}4330 & 0{,}8599 & 0{,}3908 \\ 10{,}0696 & 0{,}6950 & 0{,}4359 & 0{,}1733 \\ 0{,}9665 & 0{,}8494 & -0{,}3407 & -0{,}5958 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипсоид с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 5{,}3755 & 1{,}3414 \\ 1{,}3414 & 6{,}6900 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} R^* = 12{,}0655.$$

На рис. 6 сплошной линией показан найденный ограничивающий эллипс. Для сравнения точечной линией показан ограничивающий эллипс, полученный при помощи ЛМН-подхода, а штрихпунктиром — ограничивающий эллипс, предоставляемый линейным динамическим регулятором по выходу.

Пример 3. Рассмотрим двойной математический маятник, состоящий из двух невесомых стержней длины l_1 и l_2, на концах которых укреплены грузики массами m_1 и m_2. Система движется в вязкой среде с коэффициентом сопротивления γ, в вертикальной плоскости xy, и положение маятника определяется углами φ_1 и φ_2 отклонения стержней от вертикали, см. рис. 7.

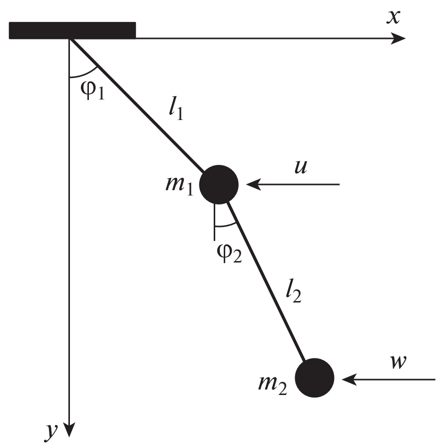

Рис. 7. Двойной математический маятник из примера 3.

Для компенсации ограниченного внешнего возмущения $w\colon |w| \leqslant 1$, воздействующего на “нижнее” тело, к “верхнему” телу приложено управляющее воздействие u.

Вводя переменные

$$\varphi_3 = \dot\varphi_1, \quad \varphi_4 = \dot\varphi_2,$$

приходим к линеаризованной системе

$$\begin{aligned}
&\dot\varphi_1 = \varphi_3,\\
&\dot\varphi_2 = \varphi_4,\\
&\dot\varphi_3 = -\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_1}\varphi_1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_1}\varphi_2 - \frac{\gamma}{m_1}\varphi_3 + \frac{1}{m_1}u,\\
&\dot\varphi_4 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_2}\varphi_1 - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{l_2}\varphi_2 - \frac{\gamma}{m_2}\varphi_4 + \frac{1}{m_2}w.
\end{aligned}$$

При

$$m_1 = m_2 = 1, \quad l_1 = l_2 = g, \quad \gamma = 0{,}2$$

матрицы системы имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -0{,}2 & 0\\ 2 & -2 & 0 & -0{,}2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}.$$

В качестве наблюдаемого выхода выберем

$$y = \begin{pmatrix} \varphi_1\\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 0,$$

а в качестве регулируемого выхода — вектор

$$z = \begin{pmatrix} \dot\varphi_1 \\ \dot\varphi_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вычислении *статической* обратной связи в соответствии с [15] получаем стабилизирующий регулятор по выходу

$$\widehat{K} = \begin{pmatrix} 0{,}0088 & -0{,}8657 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 1{,}5854 & -0{,}0437 \\ -0{,}0437 & 26{,}6679 \end{pmatrix}$$

ограничивающего эллипсоида; при этом $\operatorname{tr}\widehat{R} = 28{,}2533$.

Теперь воспользуемся предлагаемым подходом. Поскольку матрица A системы устойчива, в качестве начальных приближений казалось бы естественно выбирать нулевые, однако точка $K = L = 0$ является седловой для минимизируемой функции. Поэтому в качестве начального приближения для регулятора возьмем матрицу

$$K_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве начального приближения для наблюдателя сгенерируем некоторую матрицу

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0{,}7653 & -0{,}2647 \\ -0{,}1251 & 0{,}5897 \\ 0{,}6699 & -0{,}8014 \\ -0{,}3497 & 0{,}9036 \end{pmatrix},$$

оставляющую матрицу $A - LC_1$ устойчивой.

Процесс (при $\rho_K = 0{,}01$, $\rho_L = 0{,}001$) завершился нахождением матрицы регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} 0{,}5492 & 0{,}1428 & -1{,}4488 & 0{,}4888 \end{pmatrix}, \quad \|K^*\| = 1{,}6309,$$

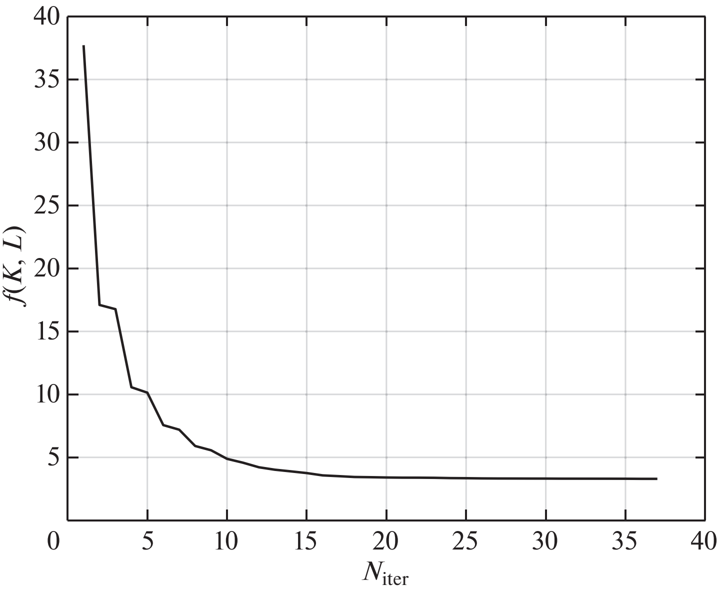

Рис. 8. Оптимизационная процедура в примере 3.

матрицы наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 1{,}0623 & -0{,}2113 \\ 0{,}5233 & 1{,}1165 \\ 1{,}3406 & -0{,}4269 \\ -0{,}2458 & 1{,}3874 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 1{,}9715,$$

и соответствующего ограничивающего эллипса по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 1{,}0674 & 0{,}3449 \\ 0{,}3449 & 2{,}1921 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} R^* = 3{,}2595.$$

Динамика изменения критерия $f(K, L)$ при расчете по вышеописанному алгоритму показана на рис. 8.

Для сравнения, при ином — также произвольном — начальном приближении

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0{,}0826 & -0{,}0346 \\ 0{,}7379 & 0{,}6160 \\ 0{,}1141 & 0{,}4720 \\ -0{,}9572 & 0{,}1446 \end{pmatrix}$$

процесс доставляет матрицу регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} 0{,}7847 & -0{,}0119 & -1{,}4160 & 0{,}5955 \end{pmatrix}, \quad \|K^*\| = 1{,}7250,$$

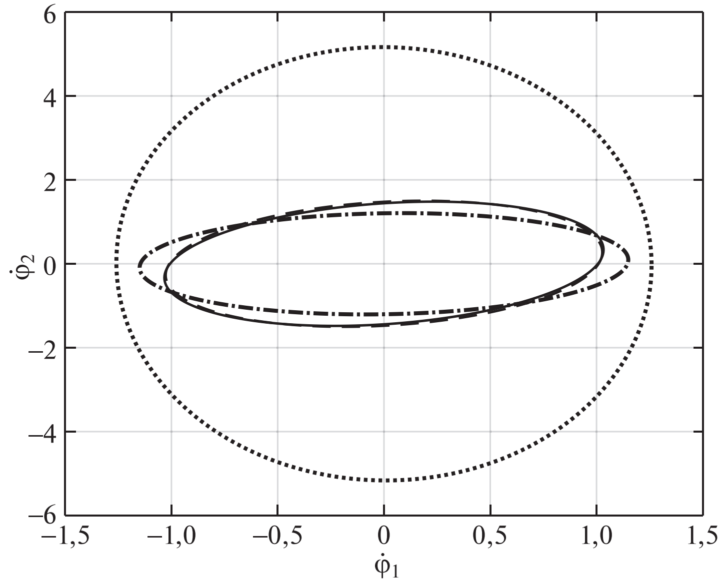

Рис. 9. Ограничивающие эллипсы в примере 3.

матрицу наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 1{,}0002 & -0{,}0842 \\ 0{,}7970 & 0{,}9984 \\ 0{,}9408 & -0{,}1216 \\ -1{,}0109 & 1{,}0961 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 1{,}9280,$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по выходу z с матрицей

$$R^* = \begin{pmatrix} 1{,}0529 & 0{,}2916 \\ 0{,}2916 & 2{,}2591 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} R^* = 3{,}3120.$$

Как и в примере 1, при различных матрицах регулятора и наблюдателя найденные эллипсы отличаются по критерию следа лишь на несколько процентов.

На рис. 9 сплошной линией и пунктиром показаны найденные ограничивающие эллипсы. Для сравнения точечной линией показан ограничивающий эллипс, полученный при помощи статической обратной связи, его размер в 8 раз больше (по критерию следа), а штрихпунктиром — ограничивающий эллипс, предоставляемый линейным динамическим регулятором по выходу.

6. Заключение

Предложен новый подход к задаче стабилизации по выходу. Он обладает преимуществами перед известным методом [4], основанным на ЛМН.

Важной задачей для дальнейших исследований является обобщение предлагаемого подхода на другие типы динамических регуляторов (а не только регуляторов с использованием наблюдателей).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2. Рассмотрим последовательность стабилизирующих матричных пар $\{K_j, L_j\} \subseteq \mathcal{S}$ такую, что

$$(K_j, L_j) \to (K, L) \in \partial\mathcal{S},$$

т.е. $\sigma(A_{K,L}) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\sigma(A_{K_j,L_j}) - \sigma(A_{K,L})| = \sigma(A_{K_j,L_j}) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \geqslant N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения Ляпунова (12), ассоциированного с парой (K_j, L_j):

$$\left(A_{K_j,L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)P_j + P_j\left(A_{K_j,L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha_j}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} = 0,$$

а Y_j — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left(A_{K_j,L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^{\mathrm{T}}Y_j + Y_j\left(A_{K_j,L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + \mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}} = 0.$$

Тогда (см. [15, лемма П.1])

$$f(K_j, L_j) = \operatorname{tr}\left(\mathcal{C}_2 P_j \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}\right) + \rho\|K_j\|_F^2 \geqslant \operatorname{tr}\left(P_j\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{tr}\left(Y_j\frac{1}{\alpha_j}\mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\alpha_j}\lambda_{\min}(Y_j)\|\mathcal{D}\|_F^2 \geqslant \frac{1}{\alpha_j}\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}})}{2\|A_{K_j,L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\|}\|\mathcal{D}\|_F^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}})}{4\sigma(A_{K_j,L_j})\|A_{K_j,L_j} + \frac{\alpha_j}{2}I\|}\|\mathcal{D}\|_F^2 \geqslant \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}})}{4\sigma(A_{K_j,L_j})(\|A_{K_j,L_j}\| + \frac{\alpha_j}{2})}\|\mathcal{D}\|_F^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}})}{4\sigma(A_{K_j,L_j})\left(\|A_{K_j,L_j}\| + \sigma(A_{K_j,L_j})\right)}\|\mathcal{D}\|_F^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}_2\mathcal{C}_2^{\mathrm{T}})}{4\varepsilon(\|A_{K_j,L_j}\| + \varepsilon)}\|\mathcal{D}\|_F^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} +\infty,$$

поскольку

$$0 < \alpha_j < 2\sigma(A_{K_j,L_j}).$$

С другой стороны,

$$f(K_j, L_j) = \operatorname{tr}(\mathcal{C}_2 P_j \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}) + \rho_K \|K_j\|_F^2 + \rho_L \|L_j\|_F^2 \geqslant \rho_K \|K_j\|_F^2 \geqslant$$
$$\geqslant \rho_K \|K_j\|^2 \xrightarrow[\|K_j\| \to +\infty]{} +\infty$$

и

$$f(K_j, L_j) = \operatorname{tr}(\mathcal{C}_2 P_j \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}}) + \rho_K \|K_j\|_F^2 + \rho_L \|L_j\|_F^2 \geqslant \rho_L \|L_j\|_F^2 \geqslant$$
$$\geqslant \rho_L \|L_j\|^2 \xrightarrow[\|L_j\| \to +\infty]{} +\infty.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Дифференцирование по α производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 3.1.

Для дифференцирования по K функции (11) при ограничении в виде уравнения Ляпунова

$$\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\right) P + P \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\right)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} = 0 \qquad (\text{П}.1)$$

относительно матрицы P инвариантного эллипсоида придадим величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение P через ΔP:

$$\left(\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2 L N_2 + \frac{\alpha}{2} I\right)(P + \Delta P) +$$
$$+ (P + \Delta P)\left(\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2 L N_2 + \frac{\alpha}{2} I\right)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} = 0.$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\left(A_{K,L} + M_1 \Delta P N_1 + \frac{\alpha}{2} I\right) P + P \left(A_{K,L} + M_1 \Delta P N_1 + \frac{\alpha}{2} I\right)^{\mathrm{T}} +$$
$$+ \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\right) \Delta P + \Delta P \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\right)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\alpha} \mathcal{D}\mathcal{D}^{\mathrm{T}} = 0.$$

После вычитания уравнения (П.1) из этого уравнения имеем:

$$\begin{gathered}\left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\right) \Delta P + \Delta P \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I\right)^{\mathrm{T}} + \\ + M_1 \Delta K N_1 P + P (M_1 \Delta K N_1)^{\mathrm{T}} = 0.\end{gathered} \qquad (\text{П}.2)$$

Вычислим приращение функционала $f(K, L, \alpha)$ по K, линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta_K f(K, L, \alpha) = \operatorname{tr} \mathcal{C}_2 \Delta P \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}} + \rho_K \operatorname{tr} K^{\mathrm{T}} \Delta K + \rho_K \operatorname{tr} (\Delta K)^{\mathrm{T}} K =$$
$$= \operatorname{tr} \mathcal{C}_2^{\mathrm{T}} \mathcal{C}_2 \Delta P + 2\rho_K \operatorname{tr} K^{\mathrm{T}} \Delta K.$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (16), двойственное к (П.2). Из двойственных уравнений (П.2) и (16) имеем (см. [15, лемма П.1]):

$$\Delta_K f(K,L,\alpha) = \operatorname{tr} 2N_1 PYM_1 \Delta K + 2\rho_K \operatorname{tr} K^{\mathrm{T}} \Delta K = \\ = \left\langle 2\left(\rho_K K + M_1^{\mathrm{T}} YPN_1^{\mathrm{T}}\right), \Delta K\right\rangle.$$

Таким образом,

$$\nabla_K f(K,L,\alpha) = 2\left(\rho_K K + M_1^{\mathrm{T}} YPN_1^{\mathrm{T}}\right).$$

Полностью аналогичным образом устанавливается, что

$$\nabla_L f(K,L,\alpha) = 2\left(\rho_L L + M_2^{\mathrm{T}} YPN_2^{\mathrm{T}}\right).$$

Лемма 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измайлов Р.Н.* Эффект “всплеска” в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // АиТ. 1987. № 8. С. 56–62.

   Izmailov R.N. The “Peak” Effect in Stationary Linear Systems with Scalar Inputs and Outputs // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 8. P. 1018–1024.
2. *Полоцкий В.Н.* О максимальных ошибках асимптотического идентификатора состояния // АиТ. 1978. № 8. С. 26–32.
3. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
4. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.

   Polyak B.T., Topunov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
5. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
7. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. AC-16. No. 6. P. 596–620.
8. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
9. *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
10. *Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M.* Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning. Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
11. *Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R.* Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control. Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.

12. *Zhang K., Hu B., Başar T.* Policy Optimization for $\mathcal{H}_2$ Linear Control with $\mathcal{H}_\infty$ Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // arXiv: 1910.09496, 2020.

13. *Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M.* LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // arXiv:1907.08921, 2019.

14. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optim. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.

15. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.

    Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.

16. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.

    Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.

17. *Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // АиТ. 2011. № 4. С. 27–42.

    Khlebnikov M.V. Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: A Linear Dynamic Output Controller // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 699–712.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 02.11.2021

После доработки 10.12.2021

Принята к публикации 24.12.2021