Автоматика и телемеханика, № 4, 2022

Стохастические системы

© 2022 г. К.Б. МАНСИМОВ, д-р физ.-мат. наук (kamilbmansimov@gmail.com)
(Бакинский государственный университет;
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку),
Р.О. МАСТАЛИЕВ, д-р философии по математике (mastaliyevrashad@gmail.com)
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ГУРСА–ДАРБУ

Рассмотрена задача оптимального управления стохастической системой, динамика которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка гиперболического типа с краевыми условиями Гурса. Получен стохастический аналог принципа максимума Понтрягина и исследованы на оптимальность особые в смысле принципа максимума управления.

Ключевые слова: нелинейная стохастическая система Гурса–Дарбу, необходимые условия, оптимальность, принцип максимума Понтрягина, формула приращения критерия качества, особое управление.

DOI: 10.31857/S0005231022040043, **EDN:** AAHNYR

1. Введение

Как известно [1–7], качественная теория задач оптимального управления системами Гурса–Дарбу к настоящему времени достаточно полно изучена. При этом получены необходимые условия оптимальности первого порядка, в том числе типа принципа максимума Понтрягина. Также в публикациях [2, 3, 5–7] исследованы особые случаи, связанные с вырождением принципа максимума Понтрягина и его следствий.

В перечисленных и других публикациях исследованы детерминированные системы Гурса–Дарбу, т.е. не учитывающие воздействие на объект регулирования случайных возмущений, присутствующих в реальных системах управления. По этой причине естественно особый интерес вызывают исследования задач управления стохастическими системами Гурса–Дарбу, поведение которых не может быть описано с полной определенностью. Подобные задачи имеют широкий спектр технических и физических приложений. Они возникают, например, при исследовании процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки и др. при наличии случайных воздействий типа “белых шумов” на плоскости [8–10].

Ряд вопросов, связанных с выводом необходимых условий оптимальности первого порядка в задачах управления, описываемых стохастическими системами Гурса–Дарбу, изучены в публикациях [8, 11–16 и др.].

В предлагаемой статье, используя некоторые идеи из [5–7], предложена схема вывода необходимых условий оптимальности первого и второго порядков при достаточно естественных условиях гладкости, наложенных на данные рассматриваемой задачи управления стохастической системой Гурса–Дарбу. Установлен стохастический аналог принцип максимума Понтрягина и исследованы на оптимальность особые управления.

2. Постановка задачи

Пусть $D = T \times X = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ — заданный прямоугольник, а поток σ-алгебр $F_y = F_{tx}(y = (t, x))$ есть семейство σ-алгебр $F_y \in F$, определенных на основном вероятностном пространстве (Ω, F, P), причем $F_y \subset F_{y'}$, если $y \le y'$, (т.е. $t \le t'$, $x \le x'$).

Здесь $F = \overline{\sigma}(W(\tau, s),\ t_0 \le \tau \le t,\ x_0 \le s \le x)$ — σ-алгебра, порожденная двухпараметрическим винеровским процессом $W(t, x)$, $(t, x) \in D$.

Допустим, что управляемый процесс в заданной области D описывается системой стохастических дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа

$$z_{tx} = f(t, x, z, z_t, z_x, u) + g(t, x, z)\frac{\partial^2 W(t, x)}{\partial t \partial x}, \quad (t, x) \in D, \tag{1}$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X,$$
$$z(t, x_0) = b(t), \quad t \in T, \quad a(x_0) = b(t_0). \tag{2}$$

Здесь $f(t, x, p, u)$ — заданная n-мерная вектор функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по p до второго порядка включительно, где $p = (z, z_t, z_x)'$, а $(')$ здесь и далее обозначает операцию транспонирования; $g(t, x, z)$ — заданная $(n \times n)$ матричная функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно; n-мерные краевые вектор функции $a(x)$, $b(t)$, заданные на X и T соответственно, удовлетворяют условию Липшица; $\frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t \partial x}$ — n-мерный двухпараметрический “белый шум” на плоскости [8, 17].

В качестве допустимых управлений выберем измеримые относительно борелевской σ-алгебры, ограниченные r-мерные вектор-функции $u(t, x)$, удовлетворяющие условию типа включения

$$u(t, x) \in U, \quad (t, x) \in D, \tag{3}$$

где U — заданное непустое и ограниченное множество из R^r.

Заметим, что краевая задача (1)–(2) эквивалентна следующему двумерному интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$z(t,x) = a(x) + b(t) - a(x_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} f(\tau, s, z, z_\tau, z_s, u)\,ds\,d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x} g(\tau, s, z)\frac{\partial^2 W(\tau, s)}{\partial\tau\partial s}\,ds\,d\tau. \tag{4}$$

В соотношении (4) последнее слагаемое понимается как стохастический интеграл по $W(t,x)$ (см., например, [8, 11]).

Отметим, что под решением задачи (1)–(2) понимается случайная функция $z(t,x)$, подчиненная потоку σ-алгебр $\{F_{tx},\ (t,x) \in D\}$, такое что интегралы в правой части (4) существуют и (4) выполняется с вероятностью единица (см., например, [8, 18, 19]).

Предполагается, что выполняются все предположения из [8], обеспечивающие для каждого допустимого управления $u(t,x)$ существование и единственность решения $z(t,x)$ краевой задачи (1)–(2).

На решениях краевой задачи (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями $u(t,x)$, $(t,x) \in D$, определим терминальный функционал качества

$$S(u) = \mathrm{E}\varphi(z(t_1, x_1)), \tag{5}$$

где $\varphi(z)$ — заданная, дважды непрерывно-дифференцируемая скалярная функция, E — знак математического ожидания.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти такое допустимое управление $u(t,x)$, чтобы функционал качества (5) принимал наименьшее возможное значение.

Цель настоящей статьи — получение стохастического аналога принципа максимума Понтрягина и изучение особых управлений (т.е. управлений, вдоль которых принцип максимума Понтрягина вырождается) для рассматриваемой задачи (1)–(5).

3. Формула приращения второго порядка

Пусть $u(t,x)$ и $\overline{u}(t,x) = u(t,x) + \Delta u(t,x)$, $(t,x) \in D$, — некоторые допустимые управления, а $z(t,x)$ и $\overline{z}(t,x) = z(t,x) + \Delta z(t,x)$, $(t,x) \in D$, — соответствующие им решения краевой задачи (1)–(2).

Для удобства далее введем обозначения:

$$H(t,x,p,u,\psi) = \psi' f(t,x,p,u),$$

$$\Delta_{\overline{u}}\, H[t,x] = H(t,x,p(t,x),\overline{u}(t,x),\psi(t,x)) - H(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),$$

$$H_p[t,x] = H_p(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x)),$$

$$f_p[t,x] = f_p(t,x,p(t,x),u(t,x)), \quad g_z[t,x] = g_z(t,x,z(t,x)),$$
$$\Delta_{\overline{u}}\, f[t,x] = f(t,x,p(t,x),\overline{u}(t,x)) - f(t,x,p(t,x),u(t,x)).$$

Здесь случайные процессы $(\psi(t,x),\beta(t,x)) \in L_\infty(D,\mathrm{R}^n) \times L_\infty(D,\mathrm{R}^{n\times n})$ являются решением стохастического линейного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра (сопряженная система):

$$\psi(t,x) = -\frac{\partial\varphi(z(t_1,x_1))}{\partial z} + \int\limits_t^{t_1} H_{z_x}[\tau,x]d\tau + \int\limits_x^{x_1} H_{z_t}[t,s]ds +$$
$$+\int\limits_t^{t_1}\int\limits_x^{x_1} H_z[\tau,s]dsd\tau + \int\limits_t^{t_1}\int\limits_x^{x_1} \beta(\tau,s)\frac{\partial^2 W(\tau,s)}{\partial\tau\partial s}dsd\tau,$$

штрих означает транспонирование.

С учетом принятых обозначений, используя формулу Тейлора, приращение функционала (4), соответствующее управлениям $u(t,x),\overline{u}(t,x)$, можно представить в виде

$$\Delta S(u) = S(\overline{u}) - S(u) =$$
$$= \mathrm{E}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H[t,x]dx\,dt + \frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi(z(t_1,x_1))}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x_1) -\right.$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H'_z[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H'_{z_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)dx\,dt -$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H'_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)dx\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)dx\,dt - \tag{6}$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta z'_t(t,x)H_{z_t z_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)dx\,dt -$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta z'_x(t,x)H_{z_x z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)dx\,dt\right\} + \eta_1(\Delta u(t,x)),$$

где по определению

$$\eta_1(\Delta u(t,x)) = \mathrm{E}\left\{o_1\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right) - \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} o_2\left(\|\Delta p(t,x)\|^2\right)dx\,dt -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta p'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{pp}[t,x]\Delta p(t,x)dx\,dt\right\}.$$

Здесь величины $o_1(\cdot), o_2(\cdot)$ определяются соответственно из разложений

$$\varphi\left(\overline{z}(t_1,x_1)\right)-\varphi\left(z(t_1,x_1)\right)=\frac{\partial\varphi(z(t_1,x_1))}{\partial z}\Delta z(t_1,x_1)+$$
$$+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi\left(z(t_1,x_1)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,x_1)+o_1\left(\|\Delta z(t_1,x_1)\|^2\right),$$
$$H\left(t,x,\overline{p}(t,x),\overline{u}(t,x),\psi(t,x)\right)-H\left(t,x,p(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)=$$
$$=H'_p[t,x]\Delta p(t,x)+\frac{1}{2}\Delta p'(t,x)H_{pp}\left(t,x,p(t,x),\overline{u}(t,x),\psi(t,x)\right)\Delta p(t,x)+$$
$$+o_2\left(\|\Delta p(t,x)\|^2\right).$$

С другой стороны, учитывая систему (1)–(2), согласно формуле Тейлора можно доказать, что приращение $\Delta z(t,x)$ состояния $z(t,x)$ является решением стохастической линеаризованной задачи:

$$\Delta z_{tx}=f'_z[t,x]\Delta z(t,x)+f'_{z_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)+f'_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)+ \tag{7}$$
$$+\Delta_{\overline{u}}f[t,x]+g_z[t,x]\frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t\partial x}+r_1(t,x),$$

$$\Delta z(t_0,x)=0,\quad x\in X,\qquad \Delta z(t,x_0)=0,\quad t\in T. \tag{8}$$

Здесь по определению

$$r_1(t,x)=\Delta_{\overline{u}}f'_p[t,x]\Delta p(t,x)+o_3(\|\Delta p(t,x)\|)+o_4(\|\Delta p(t,x)\|)\frac{\partial^2 W(t,x)}{\partial t\partial x},$$

а величины $o_3(\cdot), o_4(\cdot)$ определяются соответственно из разложений

$$f\left(t,x,\overline{p}(t,x),\overline{u}(t,x)\right)-f\left(t,x,p(t,x),u(t,x)\right)=$$
$$=f'_p\left(t,x,p(t,x),u(t,x)\right)\Delta p(t,x)+o_3\left(\|\Delta p(t,x)\|\right).$$

Интерпретируя уравнение (7) как линейное стохастическое неоднородное уравнение относительно приращения $\Delta z(t,x)$, на основе формулы об интегральном представлении решений линейных стохастических гиперболических уравнений [19] решение линеаризованной системы (7)–(8) можно представить в виде

$$\Delta z(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R(t,x;\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]dsd\tau+\alpha(t,x), \tag{9}$$

где

$$\alpha(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R(t,x;\tau,s)r_1(\tau,s)dsd\tau,$$

а $R(t,x;\tau,s)$ — измеримая и ограниченная $(n\times n)$ матрица Римана системы (7)–(8), являющаяся решением двумерного стохастического интегрального уравнения Вольтерра:

$$
\begin{gathered}
R(t,x;\tau,s)=I+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x;\alpha,\beta)f_z[\alpha,\beta]d\alpha d\beta+\\
+\int_{\tau}^{t}R(t,x;\alpha,s)f_{z_x}[\alpha,s]d\alpha+\int_{s}^{x}R(t,x;\tau,\beta)f_{z_t}[\tau,\beta]d\beta+\\
+\int_{\tau}^{t}\int_{s}^{x}R(t,x;\alpha,\beta)g_z[\alpha,\beta]\frac{\partial^2W(\alpha,\beta)}{\partial\alpha\partial\beta}d\alpha d\beta.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Здесь I — $(n\times n)$ единичная матрица.

Можно показать, что по первой паре аргументов $R(t,x;\tau,s)$ является решением стохастической задачи [19]:

$$
\begin{gathered}
R_{tx}(t,x;\tau,s)=f_z[t,x]R(t,x;\tau,s)+f_{z_t}[t,x]R_t(t,x;\tau,s)+\\
+f_{z_x}[t,x]R_x(t,x;\tau,s)+g_z[t,x]R(t,x;\tau,s)\frac{\partial^2W(t,x)}{\partial t\partial x},\\
R_t(t,s;\tau,s)=f_{z_x}[t,s]R(t,s;\tau,s),\\
R_x(\tau,x;\tau,s)=f_{z_t}[\tau,x]R(\tau,x;\tau,s),\\
R(\tau,s;\tau,s)=I.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Далее из представления (9) следует, что

$$
\Delta z_t(t,x)=\int_{x_0}^{x}R(t,x;t,s)\Delta_{\overline{u}}f[t,s]ds+r_2(t,x),
\tag{12}
$$

$$
\Delta z_x(t,x)=\int_{t_0}^{t}R(t,x;\tau,x)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,x]d\tau+r_3(t,x).
\tag{13}
$$

Здесь по определению

$$
r_2(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_t(t,x;\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f(\tau,s)dsd\tau+\alpha_t(t,x),
$$

$$
r_3(t,x)=\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}R_x(t,x;\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f(\tau,s)dsd\tau+\alpha_x(t,x).
$$

Используя формулы (12), (13) с учетом теоремы Фубини и формулы (Дирихле) [20] имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}} H_{z_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}} H_{z_t}[t,x] r_2(t,x)dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{x}^{x_1} \Delta_{\overline{u}} H_{z_t}[t,s]R(t,s;t,x)ds\right]\Delta_{\overline{u}} f[t,x]dx\,dt, \tag{14}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}} H_{z_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)dx\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}} H_{z_x}[t,x] r_3(t,x)dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{t}^{t_1} \Delta_{\overline{u}} H_{z_x}[\tau,x]R(\tau,x;t,x)d\tau\right]\Delta_{\overline{u}} f[t,x]dx\,dt. \tag{15}$$

Следуя [5–7], введем в рассмотрение $(n\times n)$ матричные функции

$$K(x,\tau,s) = \int_{\max(\tau,s)}^{t_1} R'(t,x;\tau,x)H_{z_x z_x}[t,x]R(t,x;s,x)dt, \tag{16}$$

$$M(t,\tau,s) = \int_{\max(\tau,s)}^{x_1} R'(t,x;t,\tau)H_{z_t z_t}[t,x]R(t,x;t,s)dx.$$

Используя формулы (12), (13) и рассуждая так же, как в [5–7], можно убедиться в справедливости соотношений:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z_t'(t,x)H_{z_t z_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)dx\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}} f'[t,\tau]M(t,\tau,s)\Delta_{\overline{u}} f[t,s]ds d\tau dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\left(\int_{x_0}^{x} R(t,x;t,s)\Delta_{\overline{u}} f[t,s]ds\right)' H_{z_t z_t}[t,x] r_2(t,x)dx\,dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} r_2(t,x)H_{z_t z_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)dx\,dt, \tag{17}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta z_x'(t,x)H_{z_xz_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)dx\,dt =$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}f'[\tau,x]K(x,\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f[s,x]ds\,dx\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\int\limits_{t_0}^{t}R(t,x;\tau,x)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,x]d\tau\right)'H_{z_xz_x}[t,x]r_3(t,x)dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}r_3(t,x)H_{z_xz_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)dx\,dt. \tag{18}$$

Учитывая (14)–(18), формулу приращения (6) можно представить в компактном и удобном для дальнейших исследований виде:

$$\Delta S(u) = \mathrm{E}\left\{-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H\,[t,x]dx\,dt -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}f'\,[t,\tau]\,M(t,\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f\,[t,s]\,ds\,d\tau\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}}f'\,[\tau,x]\,K(x,\tau,s)\Delta_{\overline{u}}f\,[s,x]\,ds\,dx\,d\tau -$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{t}^{t_1}\Delta_{\overline{u}}H_{z_x}\,[\tau,x]\,R(\tau,x;t,x)d\tau +\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{x}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_{z_t}\,[t,s]\,R(t,s;t,x)ds\right]\Delta_{\overline{u}}f\,[t,x]\,dx\,dt\right\} +$$

$$+\,\eta_2(\Delta u(t,x)), \tag{19}$$

где

$$\eta_2(\Delta u(t,x)) = \eta_1(\Delta u(t,x)) + \mathrm{E}\left\{\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta_{\overline{u}}H_{z_t}'[t,x]r_2(t,x) +\right.$$

$$+\,\Delta_{\overline{u}}H_{z_x}'[t,x]r_3(t,x) + \Delta_{\overline{u}}H_z'[t,x]\Delta z(t,x)\Big]dx\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{zz_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)+\Delta z_t'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{z_tz}[t,x]\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta z'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{zz_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)+\Delta z_x'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{z_xz}[t,x]\Delta z(t,x)+$$

$$+\Delta z_t'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{z_tz_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)+\Delta z_x'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{z_xz_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)+$$

$$+\Delta z'(t,x)\Delta_{\overline{u}}H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x)\Big]dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\left(\int\limits_{x_0}^{x}R(t,x;t,s)\Delta_{\overline{u}}f[t,s]ds\right)'H_{z_tz_t}[t,x]r_2(t,x)+\right. \tag{20}$$

$$+r_2(t,x)H_{z_tz_t}[t,x]\Delta z_t(t,x)+r_3(t,x)H_{z_xz_x}[t,x]\Delta z_x(t,x)+$$

$$\left.+\left(\int\limits_{t_0}^{t}R(t,x;\tau,x)\Delta_{\overline{u}}f[\tau,x]d\tau\right)'H_{z_xz_x}[t,x]r_3(t,x)\right]dx\,dt\Bigg\}.$$

Таким образом, получили формулу (19) представления второго порядка для приращения критерия качества (5), которая позволит в дальнейшем получить ряд критериев оптимальности первого и второго порядков.

4. Стохастический аналог принципа максимума Понтрягина

При помощи формулы приращения (19) доказывается теорема 1.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)–(5) *необходимо, чтобы неравенство*

$$\mathrm{E}\Delta_v H[\theta,\xi]\le 0 \tag{21}$$

выполнялось для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ и при $v\in U$.

Здесь $\Delta_v H[\theta,\xi]=H(\theta,\xi,p(\theta,\xi),v,\psi(\theta,\xi))-H(\theta,\xi,p(\theta,\xi),u(\theta,\xi),\psi(\theta,\xi))$, а $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ — произвольная точка Лебега (правильная точка [4] управления $u(t,x)$).

Соотношение (21) представляет собой стохастический аналог принципа максимума Понтрягина [4, 7, 21] для рассматриваемой задачи (1)–(5).

5. Необходимые условия оптимальности, особые в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений

Известно, что принцип максимума Понтрягина является самым сильным необходимым условием оптимальности первого порядка. Но нередки случаи, когда принцип максимума Понтрягина, вырождаясь, становится неэффективным. Такие случаи называются особыми, а соответствующие управления — особыми управлениями [3, 7, 22].

Дадим определение особого управления.

Определение. Допустимое управление $u(t,x)$ называется особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлением в задаче (1)–(5), *если для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ и при $v\in U$*

$$\mathrm{E}\Delta_v H[\theta,\xi]=0.$$

Полученные формулы приращения второго порядка (19) позволяют доказать необходимые условия оптимальности типа максимума Понтрягина и исследовать случаи их вырождения (особый случай).

Имеет место теорема 2.

Теорема 2. Вдоль особого, в смысле принцип максимума Понтрягина, оптимального управления в задаче (1)–(5) *для всех $(\theta,\xi)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ и при $v\in U$ выполняются следующие соотношения*:

$$\mathrm{E}\left\{\Delta_v f'[\theta,\xi]K(\xi,\theta,\theta)\Delta_v f[\theta,\xi]+\Delta_v H_{z_x}[\theta,\xi]\Delta_v f[\theta,\xi]\right\}\le 0,$$
$$\mathrm{E}\left\{\Delta_v f'[\theta,\xi]M(\theta,\xi,\xi)\Delta_v f[\theta,\xi]+\Delta_v H_{z_t}[\theta,\xi]\Delta_v f[\theta,\xi]\right\}\le 0.$$

Из формул (16) следует, что

$$K(\xi,\theta,\theta)=\int\limits_{\theta}^{t_1}R'(t,\xi;\theta,\xi)H_{z_xz_x}[t,\xi]R(t,\xi;\theta,\xi)dt,$$
$$M(\theta,\xi,\xi)=\int\limits_{\xi}^{x_1}R'(\theta,x;\theta,\xi)H_{z_tz_t}[\theta,x]R(\theta,x;\theta,\xi)dx.$$

Кроме этого, матричная функция $R(t,x;\tau,s)$ является решением уравнения (10). Используя эти факты, можно показать, что матричные функции $\Psi_1(\theta,\xi)=K(\xi,\theta,\theta)$ и $\Psi_2(\theta,\xi)=M(\theta,\xi,\xi)$ соответственно удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial\Psi_1(\theta,\xi)}{\partial\theta}=-\Psi_1(\theta,\xi)f_{z_x}[\theta,\xi]-f'_{z_x}[\theta,\xi]\Psi_1[\theta,\xi]-H_{z_xz_x}[\theta,\xi],\quad \Psi_1(t_1,\xi)=0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\Psi_2(\theta,\xi)}{\partial\xi}=-\Psi_2(\theta,\xi)f_{z_t}[\theta,\xi]-f'_{z_t}[\theta,\xi]\Psi_2[\theta,\xi]-H_{z_tz_t}[\theta,\xi],\quad \Psi_2(\theta,x_1)=0. \tag{23}$$

Заметим, что системы (22), (23) являются стохастическими аналогами систем уравнений, показанных в работах [5–7]. С другой стороны, такие системы типа (22), (23) различными методами введены в детерминированном случае в публикациях [2, 3] при исследовании особых управлений в системах Гурса–Дарбу.

Доказательства теорем 1 и 2 даны в Приложении.

6. Заключение

Применяя стохастический аналог метода приращений, доказана формула приращения второго порядка функционала качества в рассматриваемой стохастической задаче оптимального управления системами Гурса–Дарбу. На основе этой формулы сначала доказано необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. Затем, с помощью специальных вариаций, доказываются необходимые условия оптимальности особых (в смысле принципа максимума Понтрягина) управлений.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам за ценные замечания по содержанию статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть $u(t,x)$ — оптимальное управление. Определим специальное приращение (аналог вариация Макшейна) $\Delta u_\varepsilon(t,x)$ управления $u(t,x)$ в виде

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} v - u(t,x), & (t,x) \in D_\varepsilon = [\theta, \theta+\epsilon) \times [\xi, \xi+\varepsilon), \\ 0, & (t,x) \in D \backslash D_\varepsilon. \end{cases} \tag{П.1}$$

Здесь и в дальнейшем $(\theta,\xi) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$ — произвольная правильная точка (точка Лебега) управления $u(t,x)$, $v \in U$ — произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число.

Через $\Delta z_\varepsilon(t,x)$ обозначим специальное приращение состояния $z(t,x)$, соответствующее приращению (П.1) управления $u(t,x)$.

Пусть D_i, $i = \overline{1,4}$, — подмножества прямоугольника D, определяемые соответственно в виде:

$$D_\varepsilon = [\theta, \theta+\varepsilon) \times [\xi, \xi+\varepsilon), \quad D_2 = [\theta, \theta+\varepsilon) \times [\xi+\varepsilon, x_1),$$
$$D_3 = [\theta+\varepsilon, t_1) \times [\xi, \xi+\varepsilon), \quad D_4 = [\theta+\varepsilon, t_1) \times [\xi+\varepsilon, x_1),$$
$$D_1 = D \backslash (D_\varepsilon \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4).$$

Тогда согласно оценкам, полученным в [16], получаем, что

$$\mathrm{E}\|\Delta z_\varepsilon(t,x)\| \le \begin{cases} 0, & (t,x) \in D_1, \\ L\varepsilon^2, & (t,x) \in D_\varepsilon \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4, \end{cases} \tag{П.2}$$

$$\mathrm{E}\left\|(\Delta z_\varepsilon(t,x))_t\right\| \le \begin{cases} 0, & (t,x) \in D_1, \\ L\varepsilon, & (t,x) \in D_\varepsilon \cup D_2, \\ L\varepsilon^2, & (t,x) \in D_3 \cup D_4, \end{cases} \tag{П.3}$$

$$\mathrm{E}\left\|(\Delta z_\varepsilon(t,x))_x\right\| \le \begin{cases} 0, & (t,x) \in D_1, \\ L\varepsilon, & (t,x) \in D_\varepsilon \cup D_3, \\ L\varepsilon^2, & (t,x) \in D_2 \cup D_4. \end{cases} \tag{П.4}$$

Рассмотрим специальное приращение функционала (19) на игольчатой вариации (П.1) управления $u(t,x)$. Учитывая оценки (П.2)–(П.4), нетрудно убедиться в том, что остаточный член $\eta_2(\Delta u_\varepsilon(t,x))$ в формуле (20) является величиной $o(\varepsilon^4)$. Поэтому получим, что

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u+\Delta u_\varepsilon) - S(u) = \mathrm{E}\left\{ -\int\limits_\theta^{\theta+\varepsilon}\int\limits_\xi^{\xi+\varepsilon} \Delta_v H[t,x]dx\,dt - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\theta^{\theta+\varepsilon}\int\limits_\xi^{\xi+\varepsilon}\int\limits_\xi^{\xi+\varepsilon} \Delta_v f'[t,\tau]M(t,\tau,s)\Delta_{\overline{u}} f[t,s]ds\,d\tau\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_\theta^{\theta+\varepsilon}\int\limits_\xi^{\xi+\varepsilon}\int\limits_\theta^{\theta+\varepsilon} \Delta_{\overline{u}} f'[\tau,x]K(x,\tau,s)\Delta_{\overline{u}} f[s,x]ds\,dx\,d\tau -$$

$$-\int\limits_\theta^{\theta+\varepsilon}\int\limits_\xi^{\xi+\varepsilon}\left[\int\limits_t^{t_1} \Delta_{\overline{u}} H'_{z_x}[\tau,x]R(\tau,x;t,x)d\tau + \right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_x^{x_1} \Delta_{\overline{u}} H'_{z_t}[t,s]R(t,s;t,x)ds\right]\Delta_{\overline{u}} f[t,x]dx\,dt\right\} + o(\varepsilon^4).$$

Отсюда, учитывая теорему о среднем, получаем, что вдоль оптимального управления

$$\Delta S_\varepsilon(u) = \mathrm{E}\Big\{-0{,}5\varepsilon^2\Delta_v H[\theta,\xi] - 0{,}5\varepsilon^3\Big[\Delta_v f'[\theta,\xi]M(\theta,\xi,\xi)\Delta_v f[\theta,\xi] +$$

$$+\Delta_v f'[\theta,\xi]K(\xi,\theta,\theta)\Delta_v f[\theta,\xi] + \Delta_v H'_{z_x}[\theta,\xi]\Delta_v f[\theta,\xi] +$$

$$+\Delta_v H'_{z_t}[\theta,\xi]\Delta_v f[\theta,\xi]\Big]\Big\} + o(\varepsilon^4) \geq 0.$$

Из последнего неравенства в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует справедливость утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u(t,x)$ — особое в смысле принципа максимума Понтрягина оптимальное управление в задаче (1)–(5), а его специальное приращение определим так:

$$\text{(П.5)}\qquad \Delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} v - u(t,x), & (t,x)\in D_\varepsilon = [\theta,\theta+\varepsilon)\times[\xi,\xi+\varepsilon^2),\\ 0, & (t,x)\in D\backslash D_\varepsilon.\end{cases}$$

Отсюда на основе оценок из публикации [16] следует, что

$$\text{(П.6)}\qquad \mathrm{E}\|\Delta z_\varepsilon(t,x)\| \leq \begin{cases} 0, & (t,x)\in D_1,\\ L\varepsilon^3, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_2\cup D_3\cup D_4,\end{cases}$$

$$
\text{(П.7)} \qquad \mathrm{E}\|(\Delta z_\varepsilon(t,x))_t\| \le \begin{cases} 0, & (t,x)\in D_1,\\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_\varepsilon\cup D_2,\\ L\varepsilon^3, & (t,x)\in D_3\cup D_4,\end{cases}
$$

$$
\text{(П.8)} \qquad \mathrm{E}\|(\Delta z_\varepsilon(t,x))_x\| \le \begin{cases} 0, & (t,x)\in D_1,\\ L\varepsilon, & (t,x)\in D_\varepsilon,\\ L\varepsilon^2, & (t,x)\in D_3,\\ L\varepsilon^3, & (t,x)\in D_2\cup D_4.\end{cases}
$$

Здесь $L = \mathrm{const} > 0$, $D_2 = [\theta,\theta+\varepsilon)\times[\xi+\varepsilon^2, x_1)$, $D_3 = [\theta+\varepsilon, t_1)\times[\xi,\xi+\varepsilon^2)$, $D_4 = [\theta+\varepsilon, t_1)\times[\xi+\varepsilon^2, x_1)$, $D_1 = D\backslash(D_\varepsilon\cup D_2\cup D_3\cup D_4)$.

Учитывая полученные оценки (П.6)–(П.8), из формулы (20) получаем, что в особом случае на специальной вариации (П.5) управления $u(t,x)$ $\eta_2(\Delta u_\varepsilon(t,x)) = o(\varepsilon^4)$.

Тогда из разложения (19) следует, что

$$
\text{(П.9)} \qquad \Delta S_\varepsilon(u) = S(u+\Delta u_\varepsilon) - S(u) =
$$

$$
= \mathrm{E}\left\{ -0{,}5\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\xi^{\xi+\varepsilon^2}\int_\theta^{\theta+\varepsilon} \Delta_v f'[\tau,x]K(x,\tau,s)\Delta_v f[s,x]ds\,dx\,d\tau - \right.
$$

$$
\left. - \int_\theta^{\theta+\varepsilon}\int_\xi^{\xi+\varepsilon^2}\left[\int_t^{t_1}\Delta_v H'_{z_x}[\tau,x]R(\tau,x;t,x)d\tau\right]\Delta_v f[t,x]dx\,dt\right\} + o(\varepsilon^4) =
$$

$$
= -0{,}5\varepsilon^4\mathrm{E}\left\{\Delta_v f'[\theta,\xi]K(\xi,\theta,\theta)\Delta_v f[\theta,\xi] + \Delta_v H'_{z_x}[\theta,\xi]\Delta_v f[\theta,\xi]\right\} + o(\varepsilon^4).
$$

Если же специальное приращение управления $u(t,x)$ определить по формуле

$$
\Delta u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} v - u(t,x), & (t,x)\in[\theta,\theta+\varepsilon^2)\times[\xi,\xi+\varepsilon),\\ 0, & (t,x)\in D\backslash[\theta,\theta+\varepsilon^2)\times[\xi,\xi+\varepsilon),\end{cases}
$$

то симметричными рассуждениями доказательства формулы (П.9) можно убедиться в справедливости разложения

$$
\text{(П.10)} \qquad \Delta S_\varepsilon(u) = -0{,}5\varepsilon^4\mathrm{E}\Big\{\Delta_v f'[\theta,\xi]M(\theta,\xi,\xi)\Delta_v f[\theta,\xi] +
$$

$$
+ \Delta_v H'_{z_t}[\theta,\xi]\Delta_v f[\theta,\xi]\Big\} + o(\varepsilon^4).
$$

Из разложений (П.9), (П.10) следует утверждение теоремы 2. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров А.И.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // АиТ. 1964. Т. 25. № 5. С. 613–623.

Egorov A.I. Concerning Optimum Control of Processes in Some Systems with Distributed Parameters // Autom. Remote Control. 1964. Vol. 25. No. 5.

2. *Срочко В.А.* Условия оптимальности для одного класса систем с распределенными параметрами // Сиб. математический журнал. 1976. № 5. С. 1108–1115.
3. *Ащепков Л.Т., Васильев О.В., Коваленок И.Л.* Усиленное условие оптимальности особых управлений в системе Гурса–Дарбу // Диффер. уравнения. 1980. № 6. С. 1054–1059.
4. *Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И.* Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: Изд-во ГГУ, 1986.
5. *Мансимов К.Б.* Многоточечные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений // АиТ. 1982. № 10. С. 53–58.

   Mansimov K.B. Multile Point Necessary Conditions for Optimality of Quasisingular Controls // Autom. Remote Control. 1982. Vol. 43. No. 10. P. 1271–1275.
6. *Мансимов К.Б.* Интегральные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в системах Гурса–Дарбу // АиТ. 1993. № 5. С. 36–43.

   Mansimov K.B. Integral Necessary Conditions for Optimality of Quasisingular Controls in Goursat–Darboux Systems // Autom. Remote Control. 1993. Vol. 54. No. 5. P. 732–739.
7. *Мансимов К.Б., Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку: Изд-во Элм, 2010.
8. *Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И.* Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Киев: Наукова Думка, 1978.
9. *Рачинский В.В.* Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964.
10. *Тихинов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
11. *Шайхет Л.Е.* Об оптимальном управлении одним классом стохастических дифференциальных уравнений в частных производных // Математ. заметки. 1982. № 6. С. 933–936.
12. *Shaikhet L.E.* Optimal Control of Certain Hyperbolic and Integral Stochastic Equations // J. Soviet Mathematics. 1991. No. 4. P. 457–462.
13. *Shaikhet L.E.* About an Unsolved Optimal Control Problem for Stochastic Partial Differential Equation // XVI Int. Conf. Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation. Kiev: 2013. P. 332–334.
14. *Qi Lu, Xu Zhang.* Control Theory for Stochastic Distributed Parameter Systems, an Engineering Perspective // Annual Reviews in Control. 2021. V. 51. P. 268–330.
15. *Qi Lu, Xu Zhang.* Mathematical control theory for stochastic partial differential equations. Springer, 2021.
16. *Масталиев Р.О.* Необходимые условия оптимальности первого порядка в стохастических системах Гурса–Дарбу // Дальневост. матем. журн. 2021. Т. 21. № 1. С. 89–104.
17. *Walsh J.B.* An introduction to stochastic partial differential equations. Berlin, 1986.
18. *Пономаренко Л.Л.* Стохастическая бесконечномерная задача Гурса / Математический анализ и теория вероятностей. Киев: 1978. С. 140–143.
19. *Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.* Представление решения задачи Гурса для линейных стохастических гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. математика, Т. 36. № 2. С. 29–43.

20. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
21. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: URSS, 2011.
22. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 07.06.2021

После доработки 25.12.2021

Принята к публикации 30.12.2021