

# Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),  
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
В.А. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (petrov.va@misis.ru)  
(Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)  
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет  
«МИСиС»)

## АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ЧАСТЬ I. ОБЪЕКТЫ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ<sup>1</sup>

Предложен новый закон настройки параметров регулятора, гарантирующий при выполнении условия конечного возбуждения регрессора и постоянстве идеальных неизвестных параметров регулятора экспоненциальную устойчивость классической динамической модели ошибки слежения без использования ее координат в законе настройки и ослабляющий ряд классических допущений и требований теории адаптивного управления (необходимость знания знака/значения коэффициента усиления объекта, необходимость экспериментального выбора коэффициента усиления закона адаптации и условие строгой положительной вещественности в задаче адаптивного управления по выходу). Показана применимость предложенного закона в задачах адаптивного управления по вектору состояний и выходу. Математически и экспериментально продемонстрированы преимущества предлагаемого подхода над известными.

*Ключевые слова:* адаптивное управление, управление по выходу, относительная степень, постоянные параметры, параметрическая ошибка, конечное возбуждение, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231022040055, EDN: AARMRT

### 1. Введение

В литературе по адаптивному управлению распространенной формой представления объекта управления с параметрической неопределенностью является динамическое уравнение в отклонениях [1, 2]:

$$(1.1) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref} e_{ref} + B \tilde{\theta}^T \omega, \quad e_{ref}(0) = e_{0ref},$$

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД-1787.2022.4).

где  $e_{ref} \in R^q$  — вектор ошибок слежения объектом управления за эталонной моделью,  $e_{ref}(0) \in R^q$  — вектор начальных условий,  $A_{ref} \in R^{q \times q}$  — гурвицева матрица эталонной модели,  $B \in R^q$  — вектор коэффициентов усиления объекта,  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \in R^m$  — параметрическая ошибка между настраиваемыми и идеальными неизвестными, но постоянными ( $\dot{\theta} = 0$ ) параметрами закона управления,  $\omega \in R^m$  — измеримый регрессор. Матрица  $A_{ref}$  известна, а пара  $(A_{ref}, B)$  полностью управляема.

В случае, если прямому измерению доступна только одна ошибка слежения, уравнение (1.1) принимает форму:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref} &= A_{ref} e_{ref} + B \tilde{\theta}^T \omega \quad e_{ref}(0) = e_{0ref}, \\ \varepsilon &= c^T e_{ref}, \end{aligned}$$

$c \in R^q$  — вектор, формирующий доступную прямому измерению ошибку  $\varepsilon$ .

Обычно к модели ошибок (1.1) приводит параметризация, выполняемая в задачах адаптивного управления по вектору состояний объекта управления, а к модели (1.2) — в задачах адаптивного управления по выходу (подробнее см. в [1–3]).

Хорошо известно [1–3], что при полном измерении вектора ошибок  $e_{ref}$  для асимптотической устойчивости модели (1.1) достаточно выбрать закон настройки параметров регулятора в виде

$$(1.3) \quad \dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \omega e_{ref}^T P B,$$

где  $\Gamma$  — матрица коэффициентов усиления соответствующей размерности, а  $P \in R^{q \times q}$  — решение уравнения Ляпунова  $A_{ref} P + P A_{ref}^T = -Q$ , в котором  $Q \in R^{q \times q}$  — положительно определенная матрица.

Также известно, что если передаточная функция  $c^T (pI - A_{ref})^{-1} B$  является строго положительно вещественной, то одновременно существует решение уже двух уравнений [1–3]:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} A_{ref} P + P A_{ref}^T &= -Q, \\ P B &= c^T, \end{aligned}$$

а для обеспечения асимптотической устойчивости модели ошибки (1.2) можно использовать закон настройки в форме

$$(1.5) \quad \dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \omega \varepsilon.$$

Если дополнительно выполняется требование постоянного возбуждения регрессора  $\omega \in PE$ , то законы настройки (1.3) и (1.5) обеспечивают [1, 2] экспоненциальную устойчивость обобщенной ошибки слежения  $\xi = \begin{bmatrix} e_{ref}^T & \tilde{\theta}^T \end{bmatrix}^T$ .

Основными недостатками законов настройки (1.3) и (1.5) являются экспоненциальная устойчивость ошибки  $\xi$  только при выполнении ограничительного условия  $\omega \in PE$ , а также низкое качество переходных процессов по ошибкам слежения  $e_{ref}$ ,  $\varepsilon$  и настраиваемым параметрам  $\hat{\theta}$ . Для устранения этих

недостатков в литературе были предложены различные модификации [4–12] законов настройки (1.3) и (1.5), позволяющие ослабить условие постоянного возбуждения и/или улучшить качество переходных процессов по ошибкам слежения  $e_{ref}$ ,  $\varepsilon$  и настраиваемым параметрам  $\hat{\theta}$ .

Кроме того, в задаче управления по выходу закон настройки (1.5) может быть реализован, если и только если выполняется требование строгой положительной вещественности передаточной функции  $c^T (pI - A_{ref})^{-1} B$  [1–3, 13]. Для преодоления условия строгой положительной вещественности были разработаны [3, 13, 14] метод расширенной ошибки [15], алгоритм высокого порядка [16], метод шунтирования [17], итеративные процедуры синтеза [18] и их различные модификации [3]. Однако большинство из этих подходов являются помехочувствительными, громоздкими и сложными для практической реализации [14]. Последние два свойства проявляются тем ярче, чем выше относительная степень объекта.

В этой работе для преодоления условий реализуемости закона (1.5), а также для повышения качества процесса настройки параметров регулятора в задачах адаптивного управления по выходу и вектору состояний предлагается новый закон настройки, не использующий координаты уравнения в отклонениях (1.1), равноприменимый к моделям ошибок с измеримым состоянием (1.1) и выходом (1.2), обеспечивающий при выполнении условия конечного возбуждения регрессора экспоненциальную устойчивость ошибки  $\xi$ , поэлементную монотонность настраиваемых параметров регулятора  $\hat{\theta}$  и дополнительно решающий ряд классических проблем теории адаптивного управления (необходимость знания знака/значения вектора коэффициентов усиления  $B$ , необходимость ручного выбора значений матриц коэффициентов усиления  $\Gamma$ ).

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 сформулирована теорема существования нового закона настройки параметров  $\hat{\theta}$ , обеспечивающего экспоненциальную устойчивость ошибки  $\xi$  при выполнении условия конечного возбуждения регрессора, и предложены простые алгоритмы его реализации в задачах адаптивного управления по вектору состояний и выходу. В разделе 3 приводится краткое обсуждение полученных в работе результатов, а в разделе 4 — результаты математического моделирования разработанного закона настройки.

В работе при доказательстве теорем и утверждений будут использованы определение конечного возбуждения регрессора и следствие из леммы Калмана–Якубовича–Попова:

*Определение 1. Регрессор  $\omega$  возбуждается конечно ( $\omega \in FE$ ) на интервале  $[t_r^+; t_e]$ , если существуют  $t_r^+ \geq 0$ ,  $t_e \geq t_r^+$  и  $\alpha$  такие, что верно неравенство*

$$(1.6) \quad \int_{t_r^+}^{t_e} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I,$$

где  $\alpha > 0$  — степень возбуждения,  $I$  — единичная матрица.

*Следствие.* Скалярная передаточная функция  $H(s) = d$ , где  $d > 0$ , является строго положительно вещественной, если и только если существует гурвицева матрица  $A$ , матрица  $P = P^T > 0$ , вектор  $q$ , вектор  $B$  и константа  $\mu > 0$  такие, что [1–3]

$$(1.7) \quad \begin{aligned} A^T P + P A &= -q q^T - \mu P, \\ P B &= \sqrt{2d} q. \end{aligned}$$

## 2. Основной результат

Предположим, что для вектора неизвестных параметров  $\theta$  в моделях (1.1) и (1.2) существует линейная регрессионная модель вида

$$(2.1) \quad \Upsilon = \Omega(\Delta) \theta,$$

где  $\Omega \in R$ ,  $\Upsilon \in R^m$ ,  $\Delta \in R$  — измеримый регрессор, регрессионная функция и аргумент регрессора, не зависящие от вектора координат  $e_{ref}$  уравнения в отклонениях (1.1).

Тогда на основании регрессии (2.1) можем сформулировать и доказать теорему существования закона настройки параметров  $\hat{\theta}$ , не использующего координаты уравнения в отклонениях (1.1) и обеспечивающего экспоненциальную устойчивость ошибки  $\xi$ .

*Теорема.* Если при  $\Delta \in FE$  регрессор  $\Omega$  является таким, что

$$а) \quad \forall t \geq t_r^+ \quad \Omega(t) \in L_\infty, \quad \Omega(t) \geq 0;$$

$$б) \quad \forall t \geq t_e \quad 0 < \Omega_{LB} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{UB},$$

то существует закон настройки

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} &= \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \Omega (\Omega \hat{\theta} - \Omega \theta) = -\gamma \Omega^2 \tilde{\theta}, \\ \gamma &= \begin{cases} 1, & \text{если } \Omega = 0, \\ \frac{\gamma_0 \lambda_{\max}(\omega \omega^T) + \gamma_1}{\Omega^2} & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

обеспечивающий следующие свойства:

$$1) \quad \forall t_a \geq t_b \quad \left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right|;$$

$$2) \quad \forall t \geq t_r^+ \quad \xi \in L_\infty;$$

3)  $\forall t \geq t_e$  ошибка  $\xi$  экспоненциально сходится к нулю со скоростью, минимальное значение которой прямо пропорционально параметрам  $\gamma_0 \geq 1$  и  $\gamma_1 \geq 0$ .

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Согласно результатам теоремы закон настройки (2.2) равноприменим к динамическим моделям как с измеримым состоянием (1.1), так и с измеримым выходом (1.2). По сравнению с базовыми законами настройки (1.3) и (1.5) закон (2.2) обеспечивает поэлементную монотонность настраиваемых

параметров регулятора  $\hat{\theta}$ , для экспоненциальной сходимости ошибки  $\xi$  требует выполнение условия  $\Delta \in \text{FE}$ , которое строго слабее  $\omega \in \text{PE}$ , не требует знания знака/значения вектора  $B$ , менее требователен к ручному выбору коэффициента  $\gamma$  и, дополнительно, в задаче адаптивного управления по выходу в отличие от существующих решений [15, 16] позволяет преодолеть условие строгой положительной вещественности без существенного усложнения системы управления при увеличении относительной степени объекта.

*З а м е ч а н и е 1.* Закон настройки (2.2) менее требователен к ручному выбору коэффициента  $\gamma$ , поскольку, во-первых, содержит динамическое слагаемое  $\gamma_0 \lambda_{\max}(\omega \omega^T)$ , не требующее ручного выбора, а во-вторых, с помощью значения  $\gamma_1$  минимальная скорость сходимости ошибки  $\xi$  к нулю может быть установлена на требуемом уровне независимо от величины  $\Omega_{\text{LB}}$ .

Принципиальной практической трудностью реализации закона настройки (2.2) является получение для каждой конкретной задачи адаптивного управления линейной регрессионной модели (2.1) с регрессором  $\Omega$ , удовлетворяющим требованиям теоремы.

В следующих подразделах покажем, каким образом такая регрессионная модель может быть получена в наиболее общих классических задачах адаптивного управления по вектору состояний и выходу, приводящим к моделям ошибок (1.1) и (1.2) соответственно.

### 2.1. Управление по вектору состояний

Рассмотрим задачу адаптивного управления по вектору состояний классом LTI SISO объектов [1–3]:

$$(2.1.1) \quad \dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0,$$

где  $x \in R^n$  — измеримый вектор координат состояния,  $x(0) \in R^n$  — неизвестный вектор начальных условий,  $u \in R$  — управляющее воздействие,  $A \in R^{n \times n}$  — матрица состояний системы,  $B \in R^n$  — вектор коэффициентов усиления. Пара  $(A, B)$  управляема, а значения элементов  $A$  и  $B$  постоянны и неизвестны. Доступными для прямого измерения считаются вектор координат состояний  $x$  и управление  $u$ .

Эталонная модель, определяющая требуемое качество управления в замкнутой управлением  $u$  системе (2.1.1), имеет вид

$$(2.1.2) \quad \dot{x}_{\text{ref}} = A_{\text{ref}} x_{\text{ref}} + B_{\text{ref}} r \quad x_{\text{ref}}(0) = x_{0\text{ref}},$$

где  $x_{\text{ref}} \in R^n$  — вектор координат состояния эталонной модели,  $x_{\text{ref}}(0) \in R^n$  — вектор начальных условий,  $r \in R$  — сигнал задания,  $A_{\text{ref}} \in R^{n \times n}$  — гурвицева матрица состояний эталонной модели,  $B_{\text{ref}} \in R^n$  — вектор коэффициентов усиления эталонной модели.

Закон управления для объекта (2.1.1) выбран в форме

$$(2.1.3) \quad u = \hat{k}_x x + \hat{k}_r r,$$

где  $\hat{k}_x^T \in R^n$  и  $\hat{k}_r \in R$  — настраиваемые параметры, а  $\hat{k}_r(0) \neq 0$ .

Подставив закон управления (2.1.3) в (2.1.1), имеем описание замкнутого контура:

$$(2.1.4) \quad \dot{x} = \left( A + B\hat{k}_x \right) x + B\hat{k}_r r.$$

Для объекта (2.1.4) предполагается выполненным условие Эрцбергера [19]:

*Допущение 1. Существуют идеальные параметры закона управления  $k_x^T \in R^n$  и  $k_r \in R$  такие, что выполняются равенства*

$$(2.1.5) \quad A + Bk_x = A_{ref}; \quad Bk_r = B_{ref}.$$

Тогда уравнение в отклонениях между уравнением замкнутой системы (2.1.4) и эталонной модели (2.1.2) имеет вид

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref} &= A_{ref} e_{ref} + B \left[ \hat{k}_x x + \hat{k}_r r \right] - (A_{ref} - A) x - B_{ref} r = \\ &= A_{ref} e_{ref} + B \left[ \tilde{k}_x x + \tilde{k}_r r \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $e_{ref} = x - x_{ref}$ ,  $\tilde{k}_x = \hat{k}_x - k_x$ ,  $\tilde{k}_r = \hat{k}_r - k_r$ . Введем в (2.1.6) обозначения:

$$(2.1.7) \quad \omega = \begin{bmatrix} x^T & r \end{bmatrix}^T, \quad \tilde{\theta}^T = \begin{bmatrix} \tilde{k}_x & \tilde{k}_r \end{bmatrix} = \hat{\theta}^T - \theta^T,$$

где  $\omega \in R^{n+1}$  — регрессор,  $\tilde{\theta} \in R^{n+1}$  — вектор настраиваемых параметров закона управления.

Тогда уравнение (2.1.6) с учетом (2.1.7) и начальных условий может быть записано в форме (1.1):

$$(2.1.8) \quad \dot{e}_{ref} = A_{ref} e_{ref} + B\tilde{\theta}^T \omega, \quad e_{ref}(0) = x_0 - x_{0ref}.$$

В задаче управления по вектору состояний построение закона настройки (2.2) состоит из двух основных этапов: 1) вычисление линейного регрессионного уравнения  $Y(t) = \Delta(t)\theta$  с измеримыми регрессором  $\Delta \in R$  и функцией  $Y \in R^{n+1}$ ; 2) обработка этого уравнения с целью вычисления регрессии (2.1) с регрессором  $\Omega$ , функционально зависящим от  $\Delta$  и обладающим необходимыми в соответствии с теоремой свойствами.

Для вычисления регрессионного уравнения  $Y(t) = \Delta(t)\theta$  запишем уравнение объекта управления (2.1.1) в виде линейного регрессионного уравнения:

$$(2.1.9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \theta_{AB}^T \Phi, \\ \theta_{AB}^T &= \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} x^T & u \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

где  $\Phi \in R^{n+1}$  — измеримый регрессор,  $\theta_{AB}^T \in R^{n \times (n+1)}$  — матрица неизвестных параметров.

Несмотря на недоступность  $\dot{x}$  для прямого измерения, введем линейные устойчивые фильтры для всех динамических величин уравнения (2.1.9):

$$(2.1.10) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\mu}} &= -l\bar{\mu} + \dot{x}, & \bar{\mu}(0) &= 0_n, \\ \dot{\bar{\Phi}} &= -l\bar{\Phi} + \Phi, & \bar{\Phi}(0) &= 0_{n+1}, \end{aligned}$$

где  $l > 0$  – постоянная фильтра.

Регрессор  $\bar{\Phi}$  определяется решением второго дифференциального уравнения из (2.1.10), а функция  $\bar{\mu}$  согласно [20] может быть вычислена без знания  $\dot{x}$  следующим образом:

$$(2.1.11) \quad \bar{\mu}(t) = e^{-lt}\bar{\mu}(0) + x(t) - e^{-lt}x(0) - l\bar{x}(t) + le^{-lt}\bar{x}(0),$$

где  $\bar{x}$  – элемент вектора  $\bar{\Phi}$ .

С учетом фильтрации (2.1.10) и неизвестности начальных условий в (2.1.11) перепишем уравнение (2.1.9):

$$(2.1.12) \quad \begin{aligned} \bar{z} &= x - l\bar{x} = \bar{\mu} + e^{-lt}x(0) = \theta_{AB}^T \bar{\Phi} + e^{-lt}x(0) = \bar{\theta}_{AB}^T \bar{\varphi}, \quad \forall t \geq 0, \\ \bar{\varphi} &= [\bar{\Phi}^T \quad e^{-lt}]^T, \quad \bar{\theta}_{AB}^T = [A \quad B \quad x(0)], \end{aligned}$$

где  $\bar{z}$  – измеримая функция,  $\bar{\varphi} \in R^{n+2}$  – измеримый регрессор,  $\bar{\theta}_{AB}^T \in R^{n \times (n+2)}$  – расширенный вектор неизвестных параметров.

С помощью процедуры DREM [21, 22] от уравнения (2.1.12) с векторным регрессором  $\bar{\varphi}$  перейдем к уравнению со скалярным регрессором. Следуя [21, 22], вводим минимально фазовые динамические фильтры в количестве  $n + 2$ :

$$(2.1.13) \quad (\cdot)_{f_i(t)} := [H_i(\cdot)](t), \quad H_i(p) = \frac{\alpha_i^f}{p + \beta_i^f}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n + 2\},$$

где  $\alpha_i^f, \beta_i^f > 0$  и  $\alpha_i^f \neq \alpha_j^f$  для всех  $i \neq j$ .

Пропустив через (2.1.13) функцию  $\bar{z}$  и регрессор  $\bar{\varphi}$ , сформируем расширенное регрессионное уравнение

$$(2.1.14) \quad \begin{aligned} \bar{z}_f(t) &= \bar{\varphi}_f(t) \bar{\theta}_{AB}, \\ \bar{z}_f(t) &:= [\bar{z}(t) \quad \bar{z}_{f_1}(t) \quad \dots \quad \bar{z}_{f_{n+2}}(t)]^T, \quad \bar{\varphi}_f(t) := [\bar{\varphi}(t) \quad \bar{\varphi}_{f_1}(t) \quad \dots \quad \bar{\varphi}_{f_{n+2}}(t)]^T, \end{aligned}$$

где  $\bar{z}_f \in R^{(n+3) \times n}$ ,  $\bar{\varphi}_f \in R^{(n+3) \times (n+2)}$ .

Домножив уравнение (2.1.14) слева на величину  $\text{adj} \left\{ \bar{\varphi}_f^T \bar{\varphi}_f \right\} \bar{\varphi}_f^T$  и используя равенство  $\text{adj} \left\{ \bar{\varphi}_f^T \bar{\varphi}_f \right\} \bar{\varphi}_f^T \bar{\varphi}_f = \det \left\{ \bar{\varphi}_f^T \bar{\varphi}_f \right\} I$ , получим уравнение со скалярным регрессором:

$$(2.1.15) \quad \begin{aligned} z(t) &= \varphi(t) \bar{\theta}_{AB}, \\ z(t) &= \text{adj} \left\{ \bar{\varphi}_f^T \bar{\varphi}_f \right\} \bar{\varphi}_f^T \bar{z}_f(t), \quad \varphi(t) = \det \left\{ \bar{\varphi}_f^T \bar{\varphi}_f \right\}, \end{aligned}$$

где  $z \in R^{(n+2) \times n}$ ,  $\varphi \in R$ .

С учетом определения  $\bar{\theta}_{AB}$  и  $\varphi \in R$  из (2.1.15) нетрудно составить регрессионные уравнения:

$$(2.1.16) \quad z_A = z^T H = \varphi A, \quad z_B = z^T e_{n+1} = \varphi B,$$

где

$$z_A \in R^{n \times n}, \quad z_B \in R^n, \\ H = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times 2}]^T \in R^{(n+2) \times n}, \quad e_{n+1} = [0_{1 \times n} \quad 1 \quad 0]^T \in R^{n+2}.$$

Теперь от регрессий (2.1.16) возможно перейти к регрессии относительно параметров  $\theta$  закона управления (2.1.3). Чтобы это осуществить, умножим условие адаптируемости (2.1.5) на регрессор  $\varphi \in R$  и подставим функции (2.1.16):

$$(2.1.17) \quad \bar{Y} = \theta \bar{\Delta}, \\ \bar{\Delta} = \varphi B^T = z_B^T, \\ \bar{Y} = \varphi [A_{ref} - A \quad B_{ref}]^T = [\varphi A_{ref} - z_A \quad \varphi B_{ref}]^T,$$

где  $\bar{Y} \in R^{(n+1) \times n}$ ,  $\bar{\Delta} \in R^{1 \times n}$ .

Получим из векторного регрессора  $\bar{\Delta}$  скалярный регрессор  $\Delta$ , для этого умножим уравнение (2.1.17) на  $\bar{\Delta}^T$ :

$$(2.1.18) \quad Y(t) = \Delta(t) \theta, \\ Y = \bar{Y}(t) \bar{\Delta}^T(t), \quad \Delta(t) = \bar{\Delta} \bar{\Delta}^T,$$

где  $Y \in R^{n+1}$ ,  $\Delta \in R$ .

*Замечание 2.* Согласно результатам леммы 6.8 [2] и в силу устойчивости фильтров (2.1.10), если  $\Phi \in FE$ , то и  $\bar{\varphi} \in FE$ . В [22] для схемы расширения (2.1.13)–(2.1.15) доказана импликация  $\bar{\varphi} \in FE \Rightarrow \varphi \in FE$ . Тогда поскольку регрессор  $\bar{\Delta}$  зависит от одной динамической величины  $\varphi$ , а при  $\varphi = \text{const}$  не является вырожденным по допущению 1, то также верны импликации  $\varphi \in FE \Rightarrow \bar{\Delta} \in FE \Rightarrow \Delta \in FE$ . Таким образом, при использовании процедуры (2.1.9)–(2.1.18) возбуждение исходного регрессора  $\Phi$  не ликвидируется и верно  $\Phi \in FE \Rightarrow \Delta \in FE$ .

Обработаем выражение (2.1.18) с целью получения регрессии (2.1) с регрессором  $\Omega$ , обладающим необходимыми с точки зрения теоремы свойствами.

Воспользуемся результатами работ [20, 23, 24] и введем фильтр с экспоненциальным списыванием:

$$(2.1.19) \quad \begin{cases} \dot{\beta} = \sigma, & \beta(0) = 0, \\ \dot{v}_f = \exp(-\beta) v, & v_f(0) = 0, \end{cases}$$

где  $\sigma > 0$  — варьируемый параметр,  $v$  и  $v_f$  — вход и выход фильтра соответственно.



Пропустим через фильтр (2.1.19) расширенный регрессор  $\Delta^2$  и функцию  $\Delta Y$ :

$$(2.1.20) \quad \Upsilon = \Omega\theta,$$

$$\Omega(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau, \quad \Upsilon(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta(\tau) Y(\tau) d\tau,$$

где  $\Upsilon \in R^{n+1}$ ,  $\Omega \in R$ .

Для полученного регрессора  $\Omega$  в [23] было доказано следующее

*Утверждение 1. Если  $\Delta \in \text{FE}$  на интервале  $[t_r^+; t_e]$  и  $\Delta \in L_\infty$ , то*

$$1) \quad \forall t \geq t_r^+ \quad \Omega(t) \in L_\infty, \quad \Omega(t) \geq 0;$$

$$2) \quad \forall t \geq t_e \quad \Omega(t) > 0, \quad \int_{t_r^+}^{t_e} e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau \leq \Omega(t) \leq \delta_\Delta^2 \sigma^{-1},$$

где  $\delta_\Delta = \sup_{t \geq 0} |\Delta(t)|$ .

Доказательство утверждения 1 приведено в [23].

В утверждении 1 рассмотрен случай, когда  $\Delta \in L_\infty$ , но с точки зрения практики применения адаптивных систем управления нельзя априорно утверждать  $\Delta \in L_\infty$ , поскольку  $\Delta$  зависит (2.1.9)–(2.1.18) от координат состояния  $x$ . Поэтому в следующем утверждении рассмотрим ситуацию, при которой  $\Delta \notin L_\infty$ , но возрастает не быстрее некоторой известной экспоненты.

*Утверждение 2. Если  $\Delta \in \text{FE}$  на интервале  $[t_r^+; t_e]$  и  $\forall t \geq t_r^+ \quad |\Delta| \leq c_1 e^{c_2 t}$  и  $\sigma > 2c_2$ , то:*

$$1) \quad \forall t \geq t_r^+ \quad \Omega(t) \in L_\infty, \quad \Omega(t) \geq 0;$$

$$2) \quad \forall t \geq t_e \quad \Omega(t) > 0, \quad \frac{c_1^2}{c_3} \left( e^{-c_3 t_r^+} - e^{-c_3 t_e} \right) \leq \Omega(t) \leq \frac{c_1^2}{c_3},$$

где  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ,  $c_3 = \sigma - 2c_2 > 0$ .

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении.

Согласно утверждению 2 всегда можно выбрать значение параметра  $\sigma$  таким, что даже при  $\Delta \notin L_\infty$  регрессор  $\Omega \in L_\infty$  и удовлетворяет требованиям теоремы (на практике для регрессора  $\Delta$  любого неустойчивого объекта возможно задание мажорирующей консервативной экспоненты  $|\Delta| \leq c_1 e^{c_2 t}$  с известными  $c_1$  и  $c_2$ , а поэтому требования утверждения 2 не являются ограничительными).

Обобщим результаты вторых пунктов утверждений 1 и 2, введя неравенство для  $\Omega$ , справедливое для любого  $t \geq t_e$  и для любого  $\Delta \in \text{FE}$  такого, что

$\Delta \in L_\infty$  или  $|\Delta| \leq c_1 e^{c_2 t}$ :

$$(2.1.21) \quad 0 < \underbrace{\min \left\{ \int_{t_r^+}^{t_e} e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau; \frac{c_1^2}{c_3} \left( e^{-c_3 t_r^+} - e^{-c_3 t_e} \right) \right\}}_{\Omega_{LB}} \leq \Omega(t) \leq \underbrace{\max \left\{ \delta_\Delta^2 \sigma^{-1}; \frac{c_1^2}{c_3} \right\}}_{\Omega_{UB}}.$$

Согласно выражению (2.1.21) регрессор  $\Omega$  при выполнении условия  $\Delta \in FE$  обладает необходимыми с точки зрения теоремы свойствами, а значит, если настройку параметров закона управления (2.1.3) осуществлять в соответствии с (2.2), то ошибка  $\xi$  в задаче адаптивного управления по вектору состояний экспоненциально устойчива.

Таким образом, адаптивная система управления по вектору состояний с разработанным законом настройки (2.2) состоит из закона управления (2.1.3), а также процедур вычисления (2.1.9)–(2.1.18) линейной регрессии  $Y(t) = \Delta(t)\theta$  и ее обработки (2.1.19)–(2.1.20).

По сравнению с базовым законом (1.3) предложенный закон настройки (2.2) обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки  $\xi$  к нулю при более слабом условии  $\Delta \in FE$ , а по сравнению с различными композитными законами настройки [5, 8–10], получившими распространение в последние годы, предложенный закон (2.2) обеспечивает поэлементную монотонность настраиваемых параметров регулятора  $\hat{\theta}$ , не требует знания знака/значения вектора  $B$  и менее требователен к ручному выбору коэффициента усиления закона настройки  $\gamma$ . Полученный результат может быть прямо обобщен на случай ММО ЛТИ объектов.

## 2.2. Управление по выходу

Рассмотрим задачу адаптивного управления по выходу классом линейных стационарных объектов [1–3] вида

$$(2.2.1) \quad y(t) = b_m \frac{Z(p)}{R(p)} u(t),$$

где  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования,  $y$  — выходная переменная,  $u$  — управляющее воздействие,  $b_m$  — коэффициент усиления объекта,  $Z(p) = p^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i b_m^{-1} p^i$  и  $R(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i$  — характеристические полиномы с квазистационарными ( $\dot{b}_i \approx 0$ ,  $\dot{a}_i \approx 0$ ) неизвестными параметрами.

Желаемое качество управления объектом (2.2.1) определяется эталонной моделью

$$(2.2.2) \quad y_{ref}(t) = b_{ref} \frac{Z_{ref}(p)}{R_{ref}(p)} r(t),$$

где  $y_{ref}$  — выходная переменная эталонной модели,  $r$  — задающее воздействие,  $b_{ref}$  — коэффициент усиления эталонной модели,  $Z_{ref}(p)$  и  $R_{ref}(p)$  — гурвицевы характеристические полиномы степеней  $m^*$  и  $n^*$  соответственно. Относительная степень эталонной модели  $\rho^* = n^* - m^*$  предполагается равной относительной степени объекта  $\rho = n - m$ .

Задача управления объектом (2.2.1) заключается в обеспечении асимптотического слежения выходом объекта управления (2.2.1) за выходом эталонной модели (2.2.2):

$$(2.2.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_{ref}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Данную задачу в работе будем решать при следующих классических [1–3, 13, 14] допущениях:

*Допущение 2. Полином числителя  $Z(p)$  является гурвицевым.*

*Допущение 3. Известны степени  $n$ ,  $m$ , а значит, и относительная степень объекта  $\rho = n - m \geq 1$ .*

*Допущение 4. Прямому измерению доступны только  $y$  и  $u$ , но не их производные.*

Чтобы параметризовать задачу адаптивного управления и в конечном итоге получить уравнение в отклонениях (1.2), для объекта управления (2.2.1) в соответствии с [1–3] введем фильтры состояния:

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} \dot{v}_1 &= \Lambda v_1 + h u, & v_1(0) &= 0, \\ \dot{v}_2 &= \Lambda v_2 + h y, & v_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

где  $v_1 \in R^{n-1}$ ,  $v_2 \in R^{n-1}$ ,  $h = [0, 0, \dots, 0, 1]^T \in R^{n-1}$ ,  $\Lambda$  — сопровождающая матрица гурвицева полинома  $\Lambda(p) = \Lambda_0(p)Z_{ref}(p)$ .

Тогда с учетом фильтров (2.2.3) объект управления (2.2.1) может быть [1–3] приведен к виду

$$(2.2.5) \quad y = \frac{Z_{ref}(p)}{R_{ref}(p)} b_m [u - k_1^T v_1 - k_2^T v_2 - k_3 y] + \varepsilon_y,$$

где  $k_1 \in R^{n-1}$ ,  $k_2 \in R^{n-1}$ ,  $k_3 \in R$ ,  $\varepsilon_y$  — экспоненциально затухающее возмущение, вызванное несоответствием начальных условий.

На основании (2.2.5) для достижения цели (2.2.3) выберем настраиваемый закон управления в форме

$$(2.2.6) \quad u = \hat{k}_1^T v_1 + \hat{k}_2^T v_2 + \hat{k}_3 y + \hat{k}_4 r,$$

где  $\hat{k}_4(0) \neq 0$ .

Учитывая (2.2.6), вычтем из (2.2.5) уравнение эталонной модели (2.2.2):

$$(2.2.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{Z_{ref}(p)}{R_{ref}(p)} b_m \left[ (\hat{k}_4 - b_m^{-1} b_{ref}) r + \tilde{k}_1^T v_1 + \tilde{k}_2^T v_2 + \tilde{k}_3 y \right] + \varepsilon_y = \\ &= \frac{Z_{ref}(p)}{R_{ref}(p)} b_m \left[ \tilde{k}_4 r + \tilde{k}_1^T v_1 + \tilde{k}_2^T v_2 + \tilde{k}_3 y \right] + \varepsilon_y, \end{aligned}$$

где  $k_4 = b_m^{-1} b_{ref}$ .

Переходя из описания вход-выход (2.2.7) в пространство координат состояний, получим динамическое уравнение в отклонениях с измеримым выходом (1.2):

$$(2.2.8) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref} &= A_{ref} e_{ref} + B \tilde{\theta}^T \omega, & e_{ref}(0) &= e_{0ref}, \\ \varepsilon &= c^T e_{ref}, \end{aligned}$$

где  $A_{ref} \in R^{n^* \times n^*}$  — сопровождающая матрица полинома  $R_{ref}(p)$ ,

$B \in R^{n^*}$  — вектор коэффициентов усиления,

$c \in R^{n^*}$  — вектор выхода,

$\omega = [r \quad v_1 \quad v_2 \quad y]^T \in R^{2n}$  — вектор регрессора,

$\tilde{\theta} = [\tilde{k}_4 \quad \tilde{k}_1^T \quad \tilde{k}_2^T \quad \tilde{k}_3]^T \in R^{2n}$  — вектор параметрических ошибок.

В задаче адаптивного управления по выходу построение закона настройки (2.2) также включает два этапа: 1) вычисление линейного регрессионного уравнения  $Y(t) = \Delta(t)\theta$  с измеримыми регрессором  $\Delta \in R$  и функцией  $Y \in R^{2n}$ ; 2) обработка этого уравнения с целью вычисления регрессии (2.1) с регрессором  $\Omega$ , функционально зависящим от  $\Delta$  и обладающим необходимыми в соответствии с теоремой свойствами.

Чтобы получить линейное регрессионное уравнение  $Y(t) = \Delta(t)\theta$ , введем закон управления с идеальными параметрами:

$$(2.2.9) \quad u^* = k_1^T v_1 + k_2^T v_2 + k_3 y + k_4 r = k_1^T \frac{\alpha(p)}{\Lambda(p)} u + k_2^T \frac{\alpha(p)}{\Lambda(p)} y + k_3 y + k_4 r,$$

где  $\alpha(p)$  — оператор дифференцирования, определенный следующим образом:

$$(2.2.10) \quad \alpha(p) = \begin{cases} [p^{n-2}, p^{n-3}, \dots, p, 1]^T, & \text{если } n \geq 2, \\ 0, & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Подставив (2.2.9) в (2.2.1), получим описание замкнутого контура управления:

$$(2.2.11) \quad y(t) = \frac{k_4 b_m Z(p) \Lambda(p)}{[\Lambda(p) - k_1^T \alpha(p)] R(p) - b_m Z(p) [k_2^T \alpha(p) + k_3 \Lambda(p)]} r(t).$$

С учетом  $\Lambda(p) = \Lambda_0(p) Z_{ref}(p)$ , приравняв (2.2.11) и описание эталонной модели (2.2.2), имеем условие адаптируемости (аналог (2.1.5)):

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} b_{ref} k_1^T \alpha(p) R(p) + b_{ref} b_m Z(p) [k_2^T \alpha(p) + k_3 \Lambda(p)] + \\ + k_4 b_m Z(p) \Lambda_0(p) R_{ref}(p) = b_{ref} \Lambda(p) R(p). \end{aligned}$$

*Замечание 3.* Согласно результатам работ [1–2, 25, 26] в условиях принятого допущения 3 уравнение (2.2.12) разрешимо относительно параметров  $k_1, k_2, k_3, k_4$  и имеет ровно одно решение.

Теперь для вычисления на основании (2.2.12) уравнения  $Y(t) = \Delta(t)\theta$  представим объект (2.2.1) в канонической наблюдаемой форме:

$$(2.2.13) \quad \begin{cases} \dot{x} = A_o x + B_o u, & x(0) = x_0, \\ y = C^T x; \end{cases}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} -a & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}; \quad B_o = \begin{bmatrix} 0_{n-(m+1)} \\ b \end{bmatrix}; \quad C^T = [1 \quad 0_{1 \times (n-1)}],$$

где  $x \in R^n$  — не доступный прямому измерению вектор состояний,  $a \in R^n = [a_{n-1} \dots a_0]^T$ ,  $b \in R^{m+1} = [b_m \dots b_0]^T$ .

Введем в рассмотрение гурвицеву матрицу канонического вида  $\Psi_c \in R^{n \times n}$  и с учетом равенства  $(\psi - a)C^T = A_o - \Psi_c$  добавим к (2.2.13) выражение  $\pm \Psi_c x$ :

$$(2.2.14) \quad \dot{x} = \Psi_c x + (\psi - a)y + B_o u,$$

где  $\psi \in R^n$  — вектор коэффициентов характеристического полинома матрицы  $\Psi_c$ .

Для выделения из (2.2.13) регрессии относительно векторов параметров  $a$  и  $b$  воспользуемся параметризацией Крейссельмейера [27]. Аналогично (2.2.4) введем набор линейных фильтров состояния:

$$(2.2.15) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{f1} &= \Psi_c^T \eta_{f1} + C u, & \eta_{f1}(0) &= 0_n, \\ \dot{\eta}_{f2} &= \Psi_c^T \eta_{f2} + C y, & \eta_{f2}(0) &= 0_n, \end{aligned}$$

где  $\eta_{f1}, \eta_{f2} \in R^n$ .

Тогда согласно результатам [27] имеем регрессионное уравнение

$$(2.2.16) \quad x = \Phi \theta_{(\psi-a)B_o} + e^{\Psi_c t} x(0),$$

$$\Phi = [\Phi_{f1} \dots \Phi_{f2n}], \quad \Phi_{fi} = T_i \eta_{f1}, \quad \Phi_{fi+n} = T_i \eta_{f2}, \quad i = \overline{1, n},$$

где  $\Phi \in R^{n \times 2n}$  — измеримый регрессор,  $\theta_{(\psi-a)B_o} \in R^{2n} = [\psi^T - a^T \quad B_o^T]^T$  — вектор неизвестных параметров,  $T_i \in R^{n \times n}$  — матрица трансформации, составленная из коэффициентов полинома числителя векторной функции  $(sI - \Psi_c)^{-1} e_i$ ,  $e_i$  — вектор с единичным  $i$ -м элементом.

Умножив уравнение (2.2.16) на матрицу  $C^T$ , получим измеримую регрессионную функцию

$$(2.2.17) \quad \begin{aligned} \bar{z} &= y - C^T \Phi \theta_\psi = C^T \Phi \theta_{(\psi-a)B_o} - C^T \Phi \theta_\psi + C^T e^{\Psi_c t} x(0) = \bar{\theta}_{-aB_o}^T \bar{\varphi}, \\ \bar{\varphi} &= [C^T \Phi \quad C^T e^{\Psi_c t}]^T, \\ \bar{\theta}_{-aB_o} &= [-a^T \quad B_o^T \quad x(0)]^T \theta_\psi = [\psi^T \quad 0_{1 \times n}]^T, \end{aligned}$$

где  $\bar{\varphi} \in R^{3n}$ ,  $\bar{\theta}_{-aB_o} \in R^{3n}$ .

Чтобы из (2.2.17) получить регрессию со скалярным регрессором  $\Delta$ , применим процедуру [22, 28], в соответствии с которой введем следующую схему расширения:

$$(2.2.18) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{z}}_f^T &= -l\bar{z}_f^T + \bar{z}\bar{\varphi}^T, & \bar{z}_f(0) &= 0, \\ \dot{\bar{\varphi}}_f^T &= -l\bar{\varphi}_f^T + \bar{\varphi}\bar{\varphi}^T, & \bar{\varphi}_f(0) &= 0, \end{aligned}$$

где  $l > 0$ .

Пропустив через (2.2.18) функцию  $\bar{z}$  и регрессор  $\bar{\varphi}$ , получим расширенное регрессионное уравнение

$$(2.2.19) \quad \bar{z}_f(t) = \bar{\varphi}_f(t)\bar{\theta}_{-aB_0},$$

где  $\bar{z}_f \in R^{3n}$ ,  $\bar{\varphi}_f \in R^{3n \times 3n}$ .

Домножив уравнение (2.2.19) слева на величину  $\text{adj}\{\bar{\varphi}_f\}$  и используя равенство  $\text{adj}\{\bar{\varphi}_f\}\bar{\varphi}_f = \det\{\bar{\varphi}_f\}I$ , имеем:

$$(2.2.20) \quad \begin{aligned} z(t) &= \varphi(t)\bar{\theta}_{-aB_0}, \\ z(t) &= \text{adj}\{\bar{\varphi}_f\}\bar{z}_f(t), & \varphi(t) &= \det\{\bar{\varphi}_f\}, \end{aligned}$$

где  $\varphi, z \in R^{3n}$  — измеримый регрессор и функция.

*Замечание 4.* Для вычисления расширенной регрессии (2.2.19) возможно также использовать схему (2.1.13)–(2.1.14), что добавляет степень свободы в алгоритм вычисления регрессии (2.2.20). Достоинством схемы (2.2.18)–(2.2.19) по сравнению с (2.1.13)–(2.1.14) является необходимость выбора меньшего числа параметров. Схему расширения (2.2.18)–(2.2.19) также допустимо использовать вместо (2.1.13)–(2.1.14) и в задаче управления по состоянию.

Учитывая определение  $\bar{\theta}_{-aB_0}$  и  $\varphi \in R$  из (2.2.20), нетрудно составить регрессионные уравнения:

$$(2.2.21) \quad \begin{aligned} z_a &= H_1 z = \varphi a, & z_b &= H_2 z = \varphi b, \\ H_1 &= [-I_{n \times n} \quad 0_{n \times 2n}], \\ H_2 &= [0_{(m+1) \times (2n-(m+1))} \quad I_{(m+1) \times (m+1)} \quad 0_{(m+1) \times n}], \end{aligned}$$

где  $z_a \in R^n$ ,  $z_b \in R^{m+1}$  — измеримые функции,  $H_1 \in R^{n \times 3n}$ ,  $H_2 \in R^{(m+1) \times 3n}$  — матрицы трансформации.

Тогда умножив условие адаптируемости (2.2.12) на  $\varphi$ , приравняв в левой и правой частях полученного уравнения коэффициенты при соответствующих степенях оператора дифференцирования  $p$  и подставив из (2.2.21) соответствующие скалярные уравнения относительно  $a_{n-1} \dots a_0$  и  $b_m \dots b_0$ , запишем матричное регрессионное уравнение относительно неизвестных параметров  $\theta$  идеального закона управления (2.2.9):

$$(2.2.22) \quad N = M\theta,$$

где  $M \in R^{2n \times 2n}$ ,  $N \in R^{2n}$  — измеримый регрессор и функция.

Теперь из матричного регрессора  $M$  опять получим скалярный регрессор  $\Delta$ . Для этого умножим уравнение (2.2.22) на матрицу  $\text{adj}\{M\}$ , а также воспользуемся равенством  $\text{adj}\{M\}M = \det\{M\}I$ :

$$(2.2.23) \quad \begin{aligned} Y(t) &= \Delta(t)\theta, \\ Y(t) &= \text{adj}\{M(t)\}N(t), \quad \Delta(t) = \det\{M(t)\}, \end{aligned}$$

где  $Y \in R^{2n}$ ,  $\Delta \in R$  — скалярный регрессор.

*Замечание 5.* Согласно результатам работы [28] при использовании схемы расширения (2.2.18)–(2.2.20) верна импликация  $\bar{\varphi} \in \text{FE} \Rightarrow \varphi \in \text{FE}$ . Поскольку регрессор  $M$  определяется единственной динамической величиной  $\varphi$  и при  $\varphi = \text{const}$  в соответствии с замечанием 3 не является вырожденным, то верно  $\varphi \in \text{FE} \Rightarrow M \in \text{FE} \Rightarrow \Delta \in \text{FE}$ . Таким образом, в выполненной параметризации (2.2.13)–(2.2.23) возбуждение исходного регрессора  $\bar{\varphi}$  не ликвидируется и верно  $\bar{\varphi} \in \text{FE} \Rightarrow \Delta \in \text{FE}$ .

Перейдем от (2.2.23) к регрессии (2.2.1) с регрессором  $\Omega$ , обладающим необходимыми с точки зрения теоремы свойствами. Для этого воспользуемся результатами работ [20, 23, 24] и введем фильтр с экспоненциальным списыванием (2.1.19).

Пропустим через фильтр (2.1.19) расширенный регрессор  $\Delta^2$  и функцию  $\Delta Y$ :

$$(2.2.24) \quad \begin{aligned} \Upsilon &= \Omega\theta, \\ \Omega(t) &= \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau, \quad \Upsilon(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta(\tau) Y(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где  $\Upsilon \in R^{2n}$ ,  $\Omega \in R$ .

По доказанному в утверждениях 1 и 2 регрессор  $\Omega$  при  $\Delta \in \text{FE}$  обладает необходимыми с точки зрения теоремы свойствами:

*Утверждение 3.* Если  $\Delta \in \text{FE}$  на интервале  $[t_r^+; t_e]$  и  $\Delta \in L_\infty$  или  $|\Delta| \leq c_1 e^{c_2 t}$  и  $\sigma > 2c_2$ , то

- 1)  $\forall t \geq t_r^+ \quad \Omega(t) \in L_\infty, \quad \Omega(t) \geq 0$ ;
- 2)  $\forall t \geq t_e \quad \Omega(t) > 0, \quad 0 < \Omega_{\text{LB}} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{\text{UB}}$ ,

где

$$\delta_\Delta = \sup_{t \geq 0} \max |\Delta(t)|, \quad c_3 = \sigma - 2c_2 > 0.$$

*Справедливость утверждения 3 следует из доказательств утверждений 1 и 2, а оценки величин  $\Omega_{\text{LB}}$  и  $\Omega_{\text{UB}}$  совпадают с оценками, приведенными в (2.1.21).*

Тогда если настройку параметров закона управления (2.2.6) осуществлять в соответствии с (2.2), то ошибка  $\xi$  в задаче управления по выходу экспоненциально устойчива.

Таким образом, адаптивная система управления по выходу с разработанным законом настройки (2.2) состоит из закона управления (2.2.6), а также процедур вычисления (2.2.13)–(2.2.23) линейной регрессии  $Y(t) = \Delta(t)\theta$  и ее обработки (2.2.24).

По сравнению с базовым законом (1.5) предложенный закон настройки (2.2) не требует строгой положительной вещественности передаточной функции  $c^T(pI - A_{ref})^{-1}B$ , обеспечивает экспоненциальную сходимость ошибки  $\xi$  к нулю при более слабом условии  $\Delta \in FE$ , а по сравнению с другими подходами [3, 13, 14] в дополнение к преодолению условия строгой положительной вещественности предложенный закон (2.2): 1) обеспечивает поэлементную монотонность настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$  закона управления, 2) существенно легче для практической реализации, 3) не требует знания знака/значения коэффициента усиления объекта  $b_m$  и 4) менее требователен к ручному выбору коэффициента усиления  $\gamma$ .

### 3. Обсуждение результатов

#### 3.1. Сравнение с существующими концепциями адаптивного управления

Традиционно в теории беспоиcкового адаптивного управления выделяют системы прямого [1–3, 26], непрямого [1–3, 26] и комбинированного/композитного [4, 5] адаптивного управления. В системах прямого адаптивного управления производится непосредственная настройка параметров закона управления, например в соответствии с законами (1.3) или (1.5), в системах непрямого адаптивного управления сначала осуществляется оценка параметров объекта управления, а после в соответствии с условиями адаптируемости (2.1.5) или (2.2.12) осуществляется пересчет параметров объекта управления в параметры закона управления. Устоявшегося определения систем комбинированного/композитного адаптивного управления на сегодняшний день не существует, а поэтому к данному классу адаптивных систем относят модификации прямых законов настройки, основанные на комбинировании (сложении) различных законов адаптации и робастных добавок [4–12].

Предложенный в данной работе закон (2.2) согласно приведенной классификации является прямым, поскольку осуществляет непосредственную настройку параметров закона управления без идентификации параметров объекта управления. Однако параметризация (2.1.9)–(2.1.12) или (2.2.13)–(2.2.17), приводящая к (2.2), ранее использовалась только в системах с непрямой адаптацией. В данной же работе, благодаря процедуре скаляризации регрессора DREM, на основании (2.1.11) и (2.2.17) удалось предложить новый тип параметризации, основанный на аналитическом переходе от скалярных регрессий относительно параметров объекта управления  $\theta_{AB}$  или  $\bar{\theta}_{-aB_0}$  к матричной регрессии относительно неизвестных параметров регулятора  $\theta$ . Такой



способ параметризации позволяет синтезировать прямой закон настройки, не требующий знания знака/значения вектора  $B$  или высокочастотного коэффициента  $b_m$  передаточной функции объекта, и при этом в отличие от недавних работ [20, 29] не требует использования нелинейных операций защиты от пересечения нуля настраиваемым параметром прямого канала закона управления.

Ранее в литературе по адаптивному беспойсковому управлению [1–3] общепринято считалось, что строго гарантировать асимптотическую устойчивость классического уравнения в отклонениях (1.1) возможно, только используя его координаты в законе адаптации. В задаче адаптивного управления по выходу это привело к возникновению условия строгой положительной вещественности, которое требует, чтобы измеримый выход динамического уравнения в отклонениях описывался строго положительно вещественной передаточной функцией  $H(p) = c^T (pI - A_{ref})^{-1} B$ . В данной же работе с помощью следствия из леммы Калмана–Якубовича–Попова показано, что асимптотическая устойчивость динамического уравнения в отклонениях при выполнении условия (1.6) может быть гарантирована и законом настройки, не использующим вектор ошибок или его измеримый элемент, что и позволило ослабить требование строгой положительной вещественности. Фактически, целью базовых законов настройки (1.3) и (1.5) является асимптотическая стабилизация выхода динамического уравнения в отклонениях  $e_{ref}$  или  $\varepsilon$ , в то время как целью предложенного закона настройки является асимптотическая стабилизация входа  $\tilde{\theta}^T \omega$ , благодаря чему и удалось заменить требование строгой положительной вещественности передаточной функции по выходу уравнения в отклонениях  $H(p) = c^T (pI - A_{ref})^{-1} B$  на требование строгой положительной вещественности виртуальной передаточной функции по его входу  $H(p) = d$ , которое всегда выполняется.

Интересным результатом представляется полученное условие экспоненциальной устойчивости разработанной замкнутой системы адаптивного управления, которое может быть вычленено из (П.6)

$$(3.1.1) \quad \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} \leq 0.$$

Условие (3.1.1) может быть интерпретировано как требование выбора коэффициента усиления  $\gamma$  достаточно большим, чтобы покрыть неопределенность системы, сосредоточенную в слагаемом  $\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta}$ . В работе для выполнения условия (3.1.1) предлагается определить коэффициент усиления  $\gamma$  в соответствии с (2.2), но такое определение является консервативным и не единственным. Обсудим один из вариантов менее консервативного выбора коэффициента  $\gamma$ :

$$(3.1.2) \quad \gamma = \begin{cases} 1, & \text{если } \Omega = 0, \\ \frac{\gamma_0 \omega \omega^T + \gamma_1}{\Omega^2} & \text{иначе.} \end{cases}$$

При  $\gamma_0 \geq 1$ ,  $\gamma_1 = 0$  и  $\Omega \neq 0$  выбор коэффициента  $\gamma$  в соответствии с (3.1.2) позволяет покрыть влияние неопределенности системы  $\tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta}$  с минимальным неположительным запасом  $(1 - \gamma_0) \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta}$ . Однако при использовании определения коэффициента (3.1.2) устраняется свойство поэлементной монотонности параметрических ошибок  $\tilde{\theta}_i$ , которое заменяется свойством монотонности нормы вектора  $\tilde{\theta}$ , что ухудшает качество получаемых оценок и качество адаптивного управления в целом. Поэтому одним из направлений совершенствования предложенной адаптивной системы является поиск скалярного  $\gamma$ , являющегося решением оптимизационной задачи

$$(3.1.3) \quad \gamma_{opt} = \arg \min_{\forall t \geq t_r^+} \left[ \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} \right].$$

Здесь же необходимо отметить, что используемая в определении коэффициента  $\gamma$  (2.2) или (3.1.2) операция деления на квадрат регрессора  $\Omega$  является «безопасной» и обоснованной процедурой, поскольку регрессор  $\Omega$  представляет собой положительно полуопределенную функцию, равную нулю только в момент времени  $t_r^+$  начала интервала возбуждения  $[t_r^+; t_e]$ .

Таким образом, основными отличиями предложенного прямого закона настройки (2.2) от известных в литературе является:

- 1) поэлементная монотонность процесса настройки параметров регулятора  $\hat{\theta}$ ;
- 2) ослабленное условие экспоненциальной сходимости настраиваемых параметров регулятора  $\hat{\theta}$  к их истинным значениям  $\theta$ ;
- 3) отсутствие необходимости знания знака/значения вектора  $B$  или коэффициента усиления  $b_m$ ;
- 4) возможность при отсутствии возмущений априорного выбора минимальной скорости сходимости к нулю обобщенной ошибки слежения  $\xi$ .

Необходимо отметить, что свойства 1–4 и все свойства, заявленные в теореме, обеспечиваются законом (2.2), только если  $\Delta \in \text{FE}$ , а это в соответствии с замечаниями 2, 5 требует  $\Phi \in \text{FE}$  в задаче управления по состоянию и  $\bar{\varphi} \in \text{FE}$  в задаче управления по выходу. При невыполнении условия (1.6) для  $\Phi$ ,  $\bar{\varphi}$  закон (2.2) в отличие от базовых законов (1.3) и (1.5) не гарантирует даже ограниченности ошибки слежения  $e_{ref}$ , поскольку  $\Omega \equiv 0$  при  $\Delta \notin \text{FE}$ , а адаптация параметров закона управления в соответствии с (2.2) не осуществляется. Условие конечного возбуждения регрессора (1.6) с практической точки зрения является достаточно слабым и для линейных объектов (2.1.1) и (2.2.1) рассматриваемого класса *ad hoc* выполняется в задачах слежения (при  $r \neq 0$ ), но может не выполняться в задачах стабилизации (при  $r = 0$ ). Поэтому, если требуется решить задачу адаптивной стабилизации с помощью закона (2.2), необходимо свести ее к задаче слежения, например, положив  $r = r_0 e^{-r_1 t}$ ,  $r_1 > 0$ . Формулирование более строгих условий, при которых условие (1.6) выполняется для регрессоров  $\Phi$ ,  $\bar{\varphi}$  объектов (2.1.1) и (2.2.1), выходит за рамки работы и является перспективной темой отдельного исследования.

### 3.2. Робастность системы к влиянию начальных условий и возмущений

На практике координаты состояния  $x$ , выход  $y$  и управление  $u$  обычно измеряются с некоторой ограниченной помехой. В этом случае регрессионное уравнение (2.1) принимает вид

$$(3.2.1) \quad \Upsilon = \Omega(\Delta)\theta + w,$$

где  $w$  — возмущение, вызванное шумами измерения и несоответствием начальных условий фильтров начальным условиям объекта управления. В [30] было доказано, что при использовании интегральной фильтрации с экспоненциальным списыванием (2.1.19) возмущение  $w$  является ограниченным  $\|w\| \leq w_{\max}$ .

С учетом уравнения (3.2.1) закон настройки параметров регулятора (2.1) принимает вид

$$(3.2.2) \quad \dot{\hat{\theta}} = \dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\Omega(\Omega\hat{\theta} - \Omega\theta - w) = -\gamma\Omega^2\tilde{\theta} + \gamma\Omega w.$$

На основании (3.2.2) не составляет труда показать, что если регрессор  $\Omega$  удовлетворяет требованиям теоремы, то параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}$  при наличии возмущения экспоненциально сходится к ограниченному множеству  $\|\tilde{\theta}\| \leq \frac{w_{\max}}{\Omega_{LB}}$ . Тогда в соответствии с (1.1) установившееся значение ошибки слежения  $e_{ref}$  может быть уменьшено путем увеличения  $\Omega_{LB}$  или уменьшения  $w_{\max}$ . Уменьшить значение  $w_{\max}$  возможно путем выбора параметров фильтров (2.1.10), (2.1.13) или (2.2.15), (2.2.18), в частности выбирая их так, чтобы все фильтры представляли собой фильтры нижних частот. Увеличить  $\Omega_{LB}$  возможно уменьшением значения параметра  $\sigma$  интегрального фильтра с экспоненциальным списыванием (2.1.19). Таким образом, в разработанной адаптивной системе управления присутствует прямая связь между качеством идентификации параметров регулятора и качеством управления.

Более обширный и строгий анализ робастности разработанной адаптивной системы к шумам измерения и другим внешним возмущениям выходит за рамки постановки задачи работы и является темой отдельного исследования.

### 3.3. Вычислительная ликвидация возбуждения регрессора

В соответствии с замечаниями 2 и 3 в предложенных алгоритмах реализации закона настройки (2.2) в задачах адаптивного управления по вектору состояний и выходу возбуждение исходного регрессора математически не ликвидируется. Однако при численной реализации алгоритмов (2.1.9)–(2.1.18) и (2.2.13)–(2.2.23) вычисления регрессии (2.1) возможна ликвидация возбуждения регрессора используемой численной процедурой.

Хорошо известно, что современные среды моделирования и средства программирования контроллерной техники оперируют величинами ограниченной размерности. Например, в Matlab/Simulink числа менее  $10^{-324}$  и более  $10^{309}$  считаются равными соответственно нулю и бесконечности. Используемая процедура DREM на этапе (2.1.15) и (2.2.20) в зависимости от степени

возбуждения исходного регрессора, параметров и числа выбранных фильтров (2.1.13) может генерировать регрессор  $\varphi$  достаточно малой амплитуды (пусть для конкретности дальнейших рассуждений  $\varphi = 10^{-81} = \text{const}$ ). Далее полученный скалярный регрессор  $\varphi$  преобразуется рядом предложенных алгебраических операций для получения регрессора  $\Omega$  с требуемыми теоремой свойствами. В результате данных операций регрессор  $\Delta$ , вычисляемый на основании  $\varphi$ , может принимать значения менее  $10^{-324}$ , которые для Matlab/Simulink эквивалентны нулю, что и представляет собой вычислительную ликвидацию возбуждения регрессора.

Для численного описания данной проблемы раскроем в определении регрессора  $\Omega$  функциональную зависимость для величины  $\Delta$ . Для случая управления по вектору состояний, подставив  $\Delta = \bar{\Delta}\bar{\Delta}^T = \varphi^2 B^T B$  в (2.1.19), имеем:

$$(3.3.1) \quad \Omega(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau = (B^T B)^2 \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \varphi^4(\tau) d\tau.$$

В рассматриваемом частном случае  $\varphi = 10^{-81} = \text{const}$ , в (3.3.1) получаем  $\varphi^4 = 10^{-324}$ , что при реализации (3.3.1) в Matlab/Simulink равнозначно  $\varphi^4 \equiv 0$  и  $\Omega \equiv 0$ .

Для случая управления по выходу, подставив  $\Delta = \det\{M\} = \varphi^{2n} \det\{M_{ss}\}$  в (2.2.19), имеем:

$$(3.3.2) \quad \Omega(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau = \det^2\{M_{ss}\} \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \varphi^{4n}(\tau) d\tau,$$

где  $M_{ss} = \varphi^{-1}M$  — матрица, полученная из уравнения (2.2.12) путем записи уравнений не динамической (2.2.17), а статической регрессии относительно параметров  $\theta$ .

В рассматриваемом частном случае  $\varphi = 10^{-81} = \text{const}$  имеем  $\varphi^{4n} = 10^{-324n}$ , что при реализации (3.3.1) в Matlab/Simulink равнозначно  $\varphi^{4n} \equiv 0$  и  $\Omega \equiv 0$ .

Таким образом, с точки зрения аналитических выкладок при  $\varphi = 10^{-81} = \text{const}$  нет никаких барьеров для настройки параметров закона управления, но с точки зрения конкретной численной реализации в Matlab/Simulink настройка параметров закона управления при  $\varphi = 10^{-81} = \text{const}$  оказывается невозможной, поскольку  $\Omega = 0 \forall t$ .

Имея в распоряжении не статический регрессор  $\varphi = 10^{-81} = \text{const}$ , а динамический, такой что  $\forall t \in [t_r^+; t_0]$   $\varphi < 10^{-81}$ , получаем возможность настройки параметров регулятора начиная с некоторого момента времени  $t_0$ . Тогда моментом времени  $t_0$  ограничивается максимальная достижимая скорость сходимости оценок неизвестных параметров к истинным значениям, а значит, и качество адаптивного управления.

Устранить проблему вычислительной ликвидации возбуждения регрессора возможно, выбирая достаточно большими коэффициенты усиления  $\alpha_i^f$  фильтров (2.1.13) или используя предложенную в [31] процедуру нормализации возбуждения скалярного регрессора  $\varphi$ . В соответствии с [31] введем нормирующую функцию

$$(3.3.3) \quad f(\varphi) := \text{sat}(\varphi) = \begin{cases} \text{sgn}(\varphi)\varphi_{\min}, & \text{если } |\varphi| \leq \varphi_{\min}, \\ \varphi & \text{иначе.} \end{cases}$$

Разделим регрессии (2.1.15), (2.2.20) на нормирующую функцию (3.3.3):

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} z_n(t) &= \varphi_n(t)\bar{\theta}_{AB}, & z_n(t) &= \varphi_n(t)\bar{\theta}_{-aB_0}, \\ z_n &:= \frac{z}{f(\varphi)}; & \varphi_n &:= \frac{\varphi}{f(\varphi)} = \begin{cases} |\varphi|\varphi_{\min}^{-1}, & \text{если } |\varphi| \leq \varphi_{\min}, \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $\varphi_n$  — нормированный скалярный регрессор.

Тогда, если определить допустимые значения параметра  $\varphi_{\min}$  следующим образом:

$$(3.3.5) \quad \varphi_{\min} \leq 10^{-81},$$

то выбором значения параметра  $\varphi_{\min}$  возможно регулирование момента времени  $t_0$ , а значит, и максимальной достижимой скорости сходимости неизвестных параметров к истинным значениям.

Так, например, для рассматриваемого ранее статического регрессора  $\varphi = 10^{-81} = \text{const}$  при  $\varphi_{\min} = 10^{-81}$  получим  $\varphi_n = 1$ . Подставив значение  $\varphi_n = 1$  вместо  $\varphi$  в (3.3.1) и (3.3.2), нетрудно убедиться, что при использовании нормализации (3.3.3)–(3.3.5) возбуждение регрессора вычислительной процедурой Matlab/Simulink не ликвидируется.

Таким образом, при численной реализации предложенного закона настройки средствами программирования контроллерной техники или в средах моделирования необходимо учитывать возможность вычислительной ликвидации возбуждения регрессора.

#### 3.4. Потеря идентифицирующей способности и адаптивное управление объектами с кусочно-постоянными неизвестными параметрами

В работе обсуждается задача адаптивного управления объектами с постоянными неизвестными параметрами, однако на практике наибольший интерес представляет задача адаптивного управления объектами с изменяющимися во времени параметрами, которые могут: 1) непрерывно зависеть от времени, 2) являться кусочно-постоянными. Поэтому любое решение задачи адаптивного управления объектами с постоянными параметрами должно иметь возможность расширения как минимум на один из классов изменяющихся во времени параметров.

Непосредственному применению разработанного закона настройки (2.2) для решения задачи адаптивного управления объектами с переменными параметрами противостоит две проблемы: 1) потеря чувствительности фильтра (2.1.19) через (3–5)  $\sigma^{-1}$  к новым данным [24] и суперпозиционное смешивание фильтром (2.1.19) информации о регрессиях с различными параметрами [23], 2) генерация процедурой DREM (2.1.14), (2.1.15) или (2.2.19), (2.2.20) скалярных возмущенных регрессионных уравнений при ее применении к регрессиям с переменными параметрами [32].

Для решения этих проблем в случае кусочно-постоянных неизвестных параметров объекта управления и кусочно-постоянного задания  $r$  в [32, 33] было предложено вместо (2.1.14) и (2.2.19) применить новую процедуру расширения, основанную на интегральной фильтрации с экспоненциальным списыванием и периодическим сбросом:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_f(t_k) &= \bar{\varphi}_f(t_r^+) = 0; & \bar{z}_f(t_k) &= \bar{z}_f(t_r^+) = 0, \\
 t_r^+(0) &= 0, \\
 t_r^+ &= \begin{cases} t, & \text{если } r(t) \neq r(t - T_d), \\ t_r^+, & \text{иначе,} \end{cases} \\
 \bar{\varphi}_f^T(t) &= \int_{t_k}^t \exp\left(-\int_0^\tau \sigma d\tau_1\right) \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau; \\
 \bar{z}_f^T(t) &= \int_{t_k}^t \exp\left(-\int_0^\tau \sigma d\tau_1\right) \bar{z}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau,
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1}$$

и добавить к фильтру (2.1.19) процедуру периодического сброса на интервале возбуждения  $[t_r^+; t_e]$ , вызванного изменением кусочно-постоянного задания  $r$ :

$$\begin{aligned}
 \Omega(t_k) &= \Omega(T^+) = \Omega(t_r^+) = \Upsilon(t_k) = \Upsilon(T^+) = \Upsilon(t_r^+) = 0, \\
 \Omega(t) &= \begin{cases} \int_{t_k}^t e^{-\int_0^\tau \sigma d\tau_1} \Delta^2(\tau) d\tau, & \text{если } t < T^+, \\ \int_{T^+}^t e^{-\int_0^\tau \sigma d\tau_1} \Delta^2(\tau) d\tau, & \text{если } t \geq T^+, \end{cases} \\
 \Upsilon(t) &= \begin{cases} \int_{t_k}^t e^{-\int_0^\tau \sigma d\tau_1} Y(\tau) \Delta(\tau) d\tau, & \text{если } t < T^+, \\ \int_{T^+}^t e^{-\int_0^\tau \sigma d\tau_1} Y(\tau) \Delta(\tau) d\tau, & \text{если } t \geq T^+, \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.2}$$

где  $t_k = T \cdot \text{floor}(t/T)$  — момент времени начала нового интервала фильтрации ( $\text{floor}(\cdot)$  — функция целочисленного округления),  $0 < T < t_e - t_r^+$  — ширина окна фильтрации,  $T_+ = t_r^+ + T_\Delta$  — момент времени окончания интервальной фильтрации на интервале возбуждения,  $T_d \rightarrow 0$  — постоянная алгоритма детектирования изменения кусочно-постоянного задающего воздействия  $r$ ,  $0 < T_\Delta < t_e - t_r^+$  — постоянная алгоритма интервальной фильтрации.

С помощью фильтраций (3.4.1) и (3.4.2) каждый интервал возбуждения  $[t_r^+; t_e]$ , вызванный изменением кусочно-постоянного задающего воздействия  $r$ , разбивается на малые интервалы фильтрации  $[t_k; t_{k+1}]$ , благодаря чему и решаются обозначенные ранее проблемы: 1) фильтр (2.1.19) становится чувствительным к новым данным, а в каждый момент времени  $t_r^+$  или  $t_k$  возможное суперпозиционное смешивание информации о регрессиях с различными параметрами ликвидируется [33]; 2) при использовании алгоритма расширения (3.4.1) процедурой DREM генерируются скалярные регрессионные уравнения с регулируемым уровнем возмущения [32].

Основные свойства контура настройки, построенного по регрессии  $Y(t) = \Delta(t)\theta$ , генерируемой с использованием (3.4.1) и (3.4.2), можно сформулировать в виде следующих утверждений [33]. Если момент времени  $t_j$  изменения параметров объекта управления принадлежит интервалу фильтрации  $[t_k; t_{k+1}]$ , то существует  $\bar{T}_{0k} \in [t_k; t_{k+1}]$  такой, что закон настройки (2.2) для всех  $t \in [\bar{T}_{0k}; t_{k+1}]$  гарантирует интервальную ограниченность параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$ . Если, дополнительно,  $t_{j+1} \notin [t_{k+1}; t_{k+2}]$ , то существует  $\bar{T}_{0(k+1)} \in [t_{k+1}; t_{k+2}]$  такой, что для всех  $t \in [\bar{T}_{0(k+1)}; t_{k+2}]$  закон настройки (2.2) гарантирует экспоненциальную ограниченность ошибки  $\tilde{\theta}$ . Если  $t_j \in [T_+; t_e]$ , то для всех  $t \geq t_e$  законом настройки (2.2) гарантируется равномерная предельная ограниченность ошибки  $\tilde{\theta}$ . Если  $t_j \notin [T_+; t_e]$ , то для всех  $t \geq t_e$  законом настройки (2.2) обеспечивается экспоненциальная сходимость  $\tilde{\theta}$  к нулю.

Таким образом, согласно результатам работ [32, 33] описанная модификация (3.4.1) и (3.4.2) процедуры вычисления регрессии  $\Upsilon(t) = \Omega(t)\theta$  позволяет построить закон настройки, способный обеспечивать интервальную экспоненциальную ограниченность ошибки идентификации параметров  $\theta$ , которые являются кусочно-постоянными на интервале возбуждения  $[t_r^+; t_e]$  и постоянными за его пределами. Однако в [33] проводится доказательство интервальной экспоненциальной ограниченности только ошибки  $\tilde{\theta}$ , а поэтому, несмотря на прямую связь между качеством оценки идеальных параметров регулятора и качеством управления, перспективным направлением дальнейших исследований, выходящим за рамки данной работы, является анализ интервальных свойств ошибки  $\xi$  при использовании модификаций (3.4.1), (3.4.2) и решении задачи адаптивного управления по вектору состояний и выходу объектами с кусочно-постоянными неизвестными параметрами.

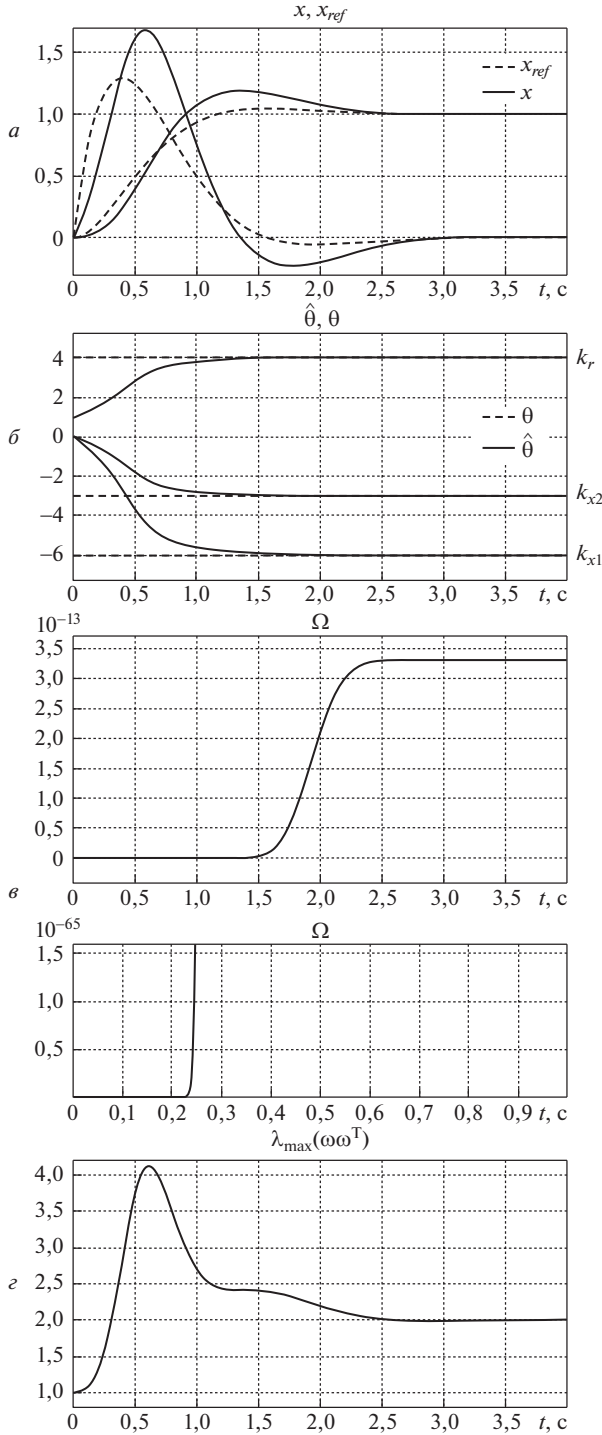


Рис. 1. Переходные процессы  $a$  — координат состояния объекта (4.1.1) и эталонной модели (4.1.2),  $b$  — настраиваемых параметров закона управления,  $c$  — регрессора  $\Omega$ ,  $z$  — величины  $\lambda_{\max}(\omega\omega^T)$ .



#### 4. Численный пример

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенных в разделе 2 данной работы адаптивных систем управления по выходу и вектору состояний. Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации  $\tau_s = 10^{-4}$  с.

##### 4.1. Адаптивное управление по вектору состояний

В качестве объекта в задаче управления по вектору состояний выберем неустойчивое аperiodическое звено второго порядка:

$$(4.1.1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Требуемое качество управления определим следующей эталонной моделью:

$$(4.1.2) \quad \dot{x}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} x_{ref} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} r, \quad x_{ref}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Величину задания  $r$ , параметры фильтров (2.1.10), (2.1.13), (2.1.18), параметры  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и начальные значения коэффициентов закона управления (2.1.3) установим в соответствии с выражением:

$$(4.1.3) \quad r = 1; \quad l = 1; \quad \alpha_i^f = \beta_i^f = i; \quad i \in \overline{1, 5}; \quad \sigma = \frac{5}{10}; \\ \gamma_0 = 1; \quad \gamma_1 = 0; \quad \hat{\theta}(0) = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

На рис. 1 приведены переходные процессы  $a$  — координат состояния объекта (4.1.1) и эталонной модели (4.1.2),  $b$  — настраиваемых параметров закона управления  $\hat{\theta}$ ,  $c$  — регрессора  $\Omega$  и  $g$  — величины  $\lambda_{\max}(\omega\omega^T)$ .

Временные диаграммы рис. 1 валидируют теоретические выводы и подтверждают экспоненциальную устойчивость обобщенной ошибки слежения  $\xi$  при использовании предложенного закона настройки (2.2).

Проверим адаптивность закона (2.2) по отношению к знаку вектора  $B$ . Для этого установим начальные значения коэффициентов закона управления так:  $\hat{\theta}(0) = [0 \ 0 \ -1]^T$ . На рис. 2 приведены переходные процессы  $a$  — координат состояния объекта (4.1.1) и эталонной модели (4.1.2) и  $b$  — настраиваемых параметров закона управления.

Как видно из графиков рис. 2, закон настройки (2.2) работоспособен при неизвестном знаке вектора коэффициентов усиления  $B$ .

Выполним моделирование разработанной системы в важном для практики режиме стабилизации, для этого установим  $x(0) = [1 \ 0]^T$  и в соответствии с рекомендациями, данными в разделе 3.1, выберем  $r = e^{-1t}$ . Начальные условия эталонной модели и остальные параметры схемы зададим в соответствии с (4.1.2) и (4.1.3).

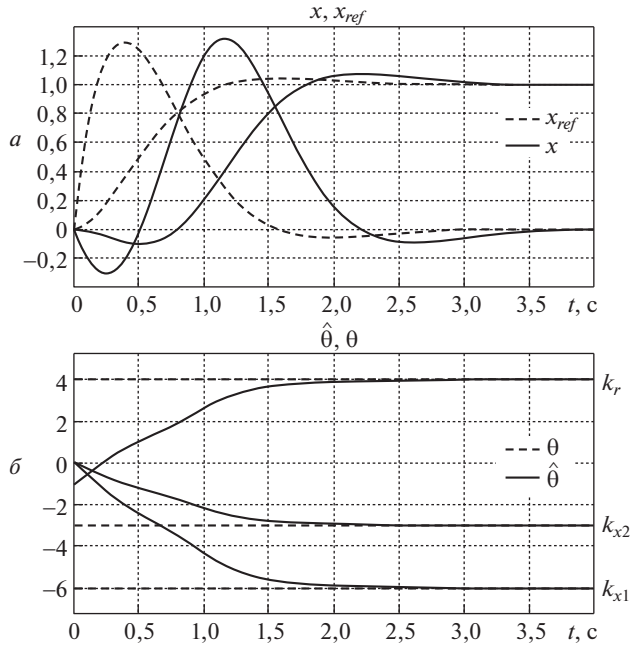


Рис. 2. Переходные процессы  $a$  — координат состояния объекта (4.1.1) и эталонной модели (4.1.2),  $b$  — настраиваемых параметров закона управления  $\hat{\theta}$ .

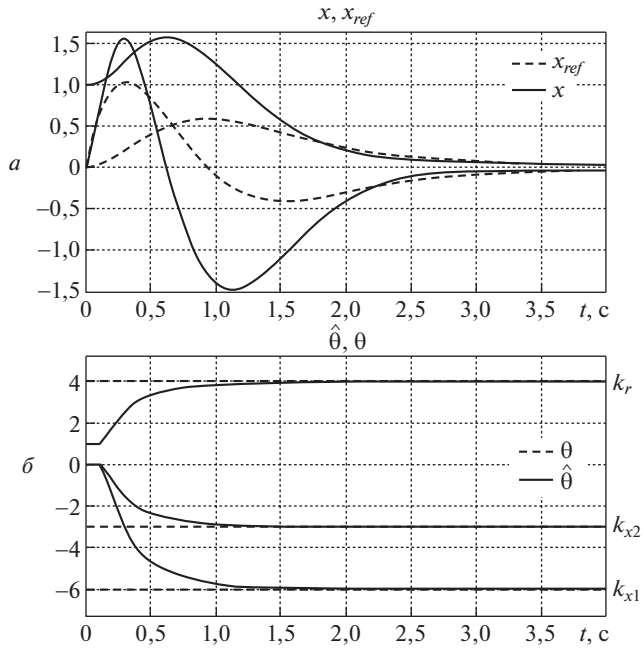


Рис. 3. Переходные процессы  $a$  — координат состояния объекта (4.1.1) и эталонной модели (4.1.2),  $b$  — настраиваемых параметров закона управления  $\hat{\theta}$ .

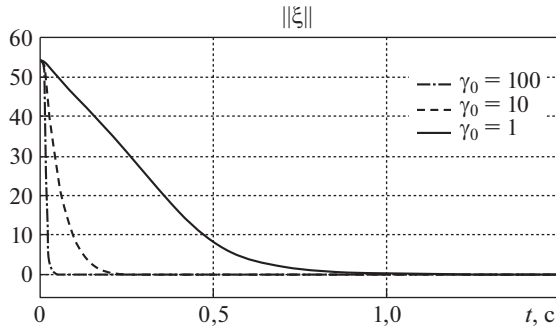


Рис. 4. Зависимость  $\|\xi\|$  от значений коэффициента  $\gamma_0$ .

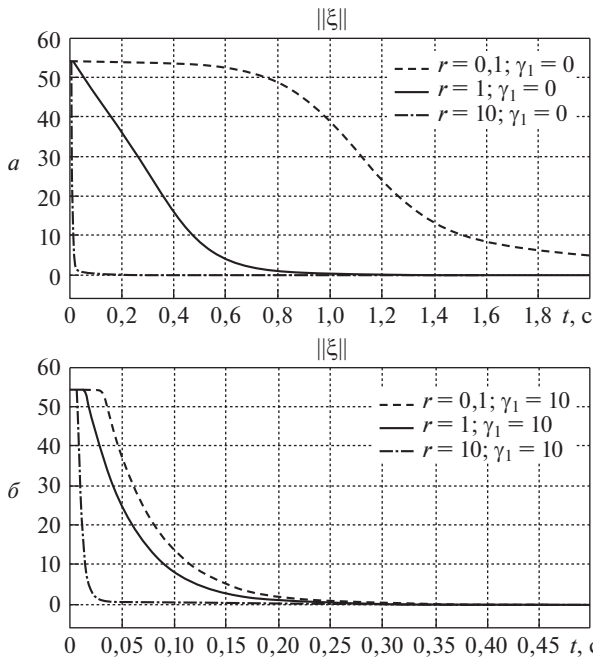


Рис. 5. Зависимость  $\|\xi\|$  от задания  $r$  и коэффициента  $\gamma_1$ .

Результаты моделирования, приведенные на рис. 3, демонстрируют эффективность предложенного закона адаптации (2.2) и при решении задачи адаптивной стабилизации по вектору состояний.

На рис. 4 представлены нормы ошибки  $\xi$  при различных значениях коэффициента  $\gamma_0$ .

Рисунок 4 подтверждает выводы, полученные при доказательстве теоремы, и демонстрирует возможность увеличения скорости сходимости ошибки  $\xi$  к нулю с помощью увеличения коэффициента  $\gamma_0$ .

Проверим отмеченную в замечании 1 возможность в разработанной адаптивной системе управления с помощью выбора параметра  $\gamma_1$  устанавливать

значение минимальной скорости сходимости ошибки  $\xi$  к нулю. Для этого промоделируем систему при  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 10$  и различных по амплитуде задающих воздействиях  $r$ . На рис. 5 изображены переходные процессы по  $\|\xi\|$  при  $\gamma_1 = 0$  и различных  $r$  (рис. 5,а), а также при тех же  $r$  и  $\gamma_1 = 10$  (рис. 5,б).

Результаты эксперимента, представленные на рис. 5, подтверждают возможность с помощью выбора значения параметра  $\gamma_1$  определять значение минимальной скорости сходимости ошибки  $\|\xi\|$  к нулю. В данном эксперименте на отрезке  $t \in [0; 0,04]$  ошибки  $\|\xi\|$  для различных значений  $r$  не убывают вследствие отмеченной в разделе 3.3 проблемы вычислительной ликвидации возбуждения регрессора.

#### 4.2. Адаптивное управление по выходу

В качестве объекта управления и эталонной модели в задаче управления по выходу будем рассматривать (4.1.1) и (4.2.2), но записанные в форме вход-выход

$$(4.2.1) \quad y = \frac{2}{p^2 - 2p - 4}u; \quad y_{ref} = \frac{8}{p^2 + 4p + 8}r$$

и при доступности для прямого измерения только выхода  $y = x_1$  и управления  $u$ .

Величину задания  $r$ , параметры фильтров (2.2.4), (2.2.15), (2.2.16), (2.2.18), (2.2.24), параметры  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  и начальные значения выхода объекта управления и эталонной модели, а также коэффициенты (2.1.3) установим следующим образом:

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} r &= 1; \quad \Lambda = -1; \quad \psi = [20 \ 100]^T; \quad l = 0,1; \\ T_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}; \quad y(0) = y_{ref}(0) = 0; \\ \sigma &= \frac{5}{10}; \quad \gamma_0 = 1; \quad \gamma_1 = 0; \quad \hat{\theta}(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \end{aligned}$$

На рис. 6 приведены переходные процессы  $a$  — выхода объекта  $y$  и эталонной модели  $y_{ref}$ ,  $b$  — настраиваемых параметров закона управления  $\hat{\theta}$ ,  $c$  — регрессора  $\Omega$  и  $z$  — величины  $\lambda_{\max}(\omega\omega^T)$ .

Результаты моделирования валидируют теоретические выводы и подтверждают экспоненциальную устойчивость обобщенной ошибки слежения  $\xi$  в задаче управления по выходу при использовании предложенного закона настройки (2.2).

Проверим адаптивность закона настройки (2.2) по отношению к знаку коэффициента усиления  $b_m$ . Для этого установим начальные значения коэффициентов закона управления как  $\hat{\theta}(0) = [-1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . На рис. 7 приведены переходные процессы  $a$  — величин  $y$  и  $y_{ref}$ ,  $b$  — настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$ .

Переходные процессы, представленные на рис. 7, подтверждают работоспособность закона настройки (2.2) даже при неизвестном знаке коэффициента усиления  $b_m$ .

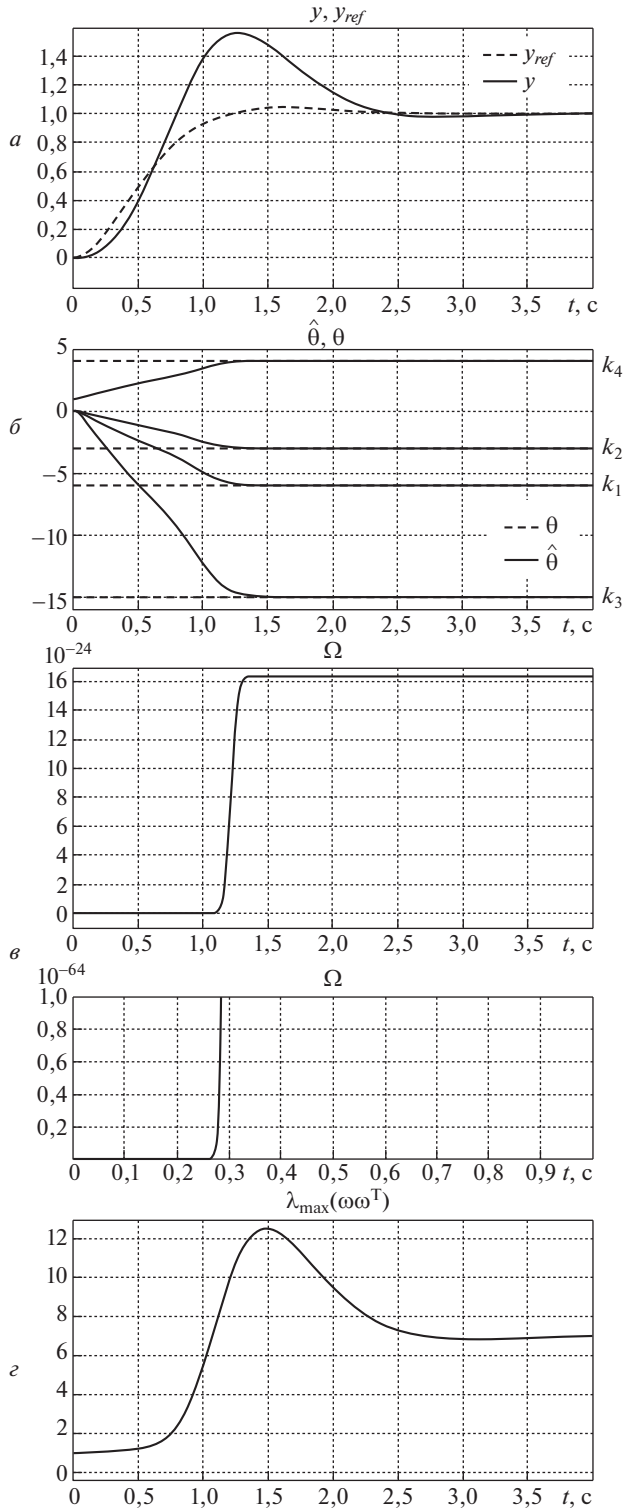


Рис. 6. Переходные процессы  $a - y$  и  $y_{ref}$ ,  $\hat{b}$  — настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{b}$  — регрессора  $\Omega$ ,  $z$  — величины  $\lambda_{\max}(\omega\omega^T)$ .

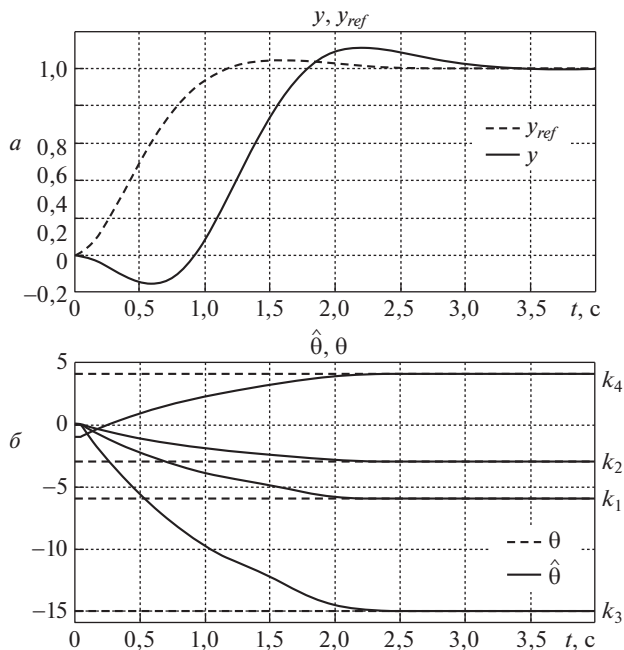


Рис. 7. Переходные процессы  $a - y$  и  $y_{ref}$ ,  $\bar{b}$  — настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$ .

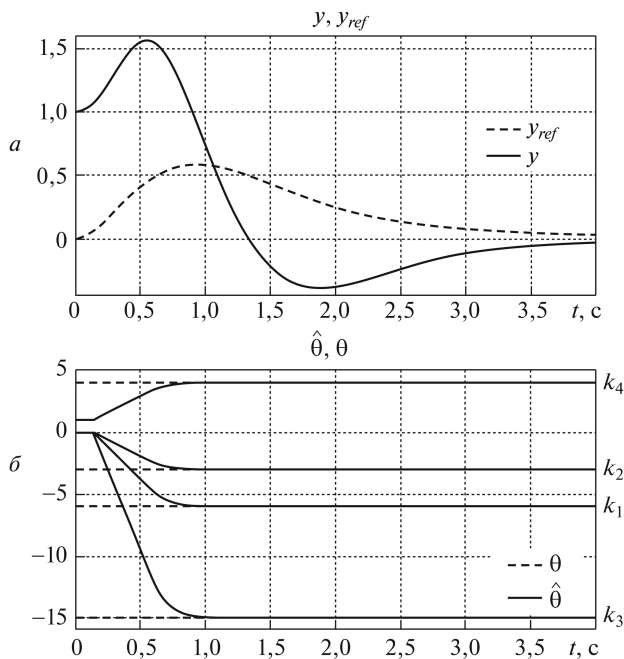


Рис. 8. Переходные процессы  $a - y$  и  $y_{ref}$ ,  $\bar{b}$  — настраиваемых параметров  $\hat{\theta}$ .

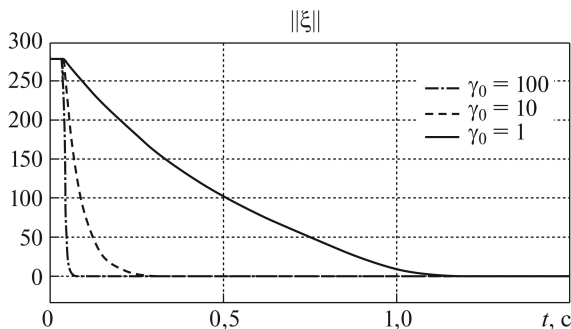


Рис. 9. Зависимость  $\|\xi\|$  от значений коэффициента  $\gamma_0$ .

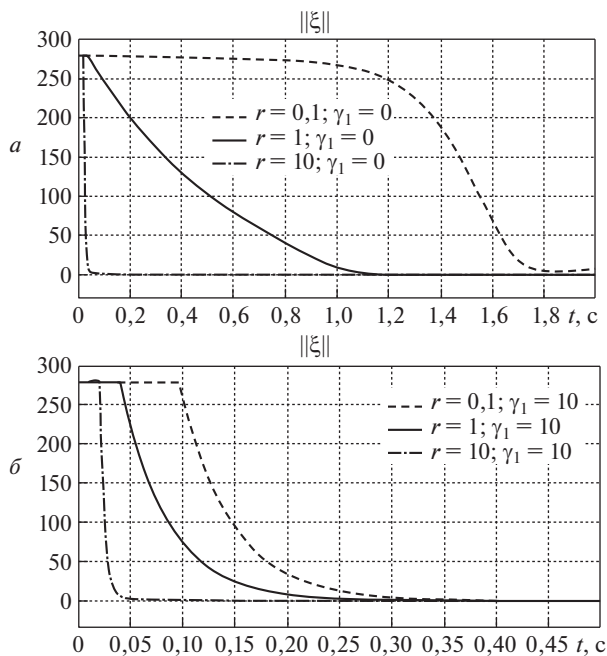


Рис. 10. Зависимость  $\|\xi\|$  от задания  $r$  и коэффициента  $\gamma_1$ .

Выполним моделирование разработанной системы в режиме стабилизации. Для этого установим  $y(0) = 1$  и в соответствии с рекомендациями, данными в разделе 3.1, выберем  $r = e^{-1t}$ . Начальные условия эталонной модели и остальные параметры схемы примем равными значениям (4.2.1) и (4.2.2).

Переходные характеристики рис. 8 демонстрируют эффективность разработанной адаптивной системы управления и при решении задачи адаптивной стабилизации по выходу.

Промоделируем разработанную систему управления по выходу при различных значениях коэффициента  $\gamma_0$ . На рис. 9 представлены переходные процессы по  $\|\xi\|$ , полученные при различных значениях коэффициента  $\gamma_0$ .

Временные диаграммы рис. 9 подтверждают выводы, полученные при доказательстве теоремы, и демонстрируют возможность увеличения скорости сходимости ошибки  $\xi$  к нулю с помощью увеличения коэффициента  $\gamma_0$ .

Проверим отмеченную в замечании 1 возможность в разработанной адаптивной системе управления с помощью выбора параметра  $\gamma_1$  устанавливать значение минимальной скорости сходимости ошибки  $\xi$  к нулю. Для этого выполним моделирование разработанной системы при  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 10$  и различных задающих воздействиях  $r$ . На рис. 10 представлены переходные процессы по  $\|\xi\|$   $a$  — при  $\gamma_1 = 0$  и различных  $r$ , а также  $b$  — при тех же  $r$  и  $\gamma_1 = 10$ .

Результаты эксперимента, представленные на рис. 10, подтверждают возможность с помощью выбора значения параметра  $\gamma_1$  задавать значение минимальной скорости сходимости ошибки  $\|\xi\|$  к нулю.

В этом эксперименте на отрезке  $t \in [0; 0,1]$  ошибки  $\|\xi\|$  для различных значений  $r$  не убывают вследствие отмеченной в разделе 3.3 проблемы вычислительной ликвидации возбуждения регрессора.

## 5. Заключение

В работе предложен новый закон настройки параметров регулятора, равноприменимый к моделям ошибок с измеримым состоянием (1.1) и выходом (1.2), обеспечивающий при выполнении условия конечного возбуждения регрессора  $\Delta \in FE$  и постоянстве неизвестных идеальных параметров регулятора  $\theta$  экспоненциальную устойчивость ошибки  $\xi$ , поэлементную монотонность настраиваемых параметров регулятора  $\hat{\theta}$ , а также, дополнительно, решающий ряд проблем теории адаптивного управления (необходимость знания знака/значения вектора коэффициентов усиления  $B$ , необходимость ручного выбора значений матриц коэффициентов усиления  $\Gamma$ ).

Целью дальнейших исследований является анализ робастности разработанной адаптивной системы управления к возмущениям, формулирование условий, при которых для исходных регрессоров параметризаций (2.1.9) и (2.2.16) выполняется требование (1.6), а также расширение полученных результатов на объекты управления с переменными параметрами. Вторая часть работы будет посвящена решению задачи адаптивного управления по вектору состояний и выходу объектами с кусочно-постоянными неизвестными параметрами, а третья часть работы — объектами с переменными параметрами определенного класса.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$(П.1) \quad \tilde{\theta}_i(t) = e^{-\int_{t_r^+}^t \gamma(\tau)\Omega^2(\tau)d\tau} \tilde{\theta}_i(t_r^+).$$

Так как  $\text{sign}(\gamma\Omega^2) = \text{const} > 0$ , то из (П.1) следует  $|\tilde{\theta}_i(t_a)| \leq |\tilde{\theta}_i(t_b)| \forall t_a \geq t_b$ , что и требовалось доказать в первой части теоремы. Перейдем к доказательству второй и третьей частей теоремы.



Поскольку в уравнении (1.1) матрица  $A_{ref}$  гурвицева, то согласно следствию из леммы Калмана–Якубовича–Попова всегда можно найти некоторое число  $d > 0$  и соответствующий ему виртуальный недоступный измерению выход

$$(II.2) \quad y_e = d\tilde{\theta}^T\omega,$$

такой что передаточная функция  $H(s) = d$  является строго положительно вещественной и верны уравнения

$$(II.3) \quad \begin{aligned} A_{ref}^T P + P A_{ref}^T &= -qq^T - \mu P, \\ PB &= \sqrt{2d}q. \end{aligned}$$

Тогда для анализа устойчивости динамического уравнения в отклонениях (1.1) при использовании закона настройки (2.2) можно выбрать квадратичную форму

$$(II.4) \quad \begin{aligned} V &= \xi^T H \xi = e_{ref}^T P e_{ref} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}, \\ H &= \text{blockdiag} \left\{ P, \frac{1}{2} I \right\}, \quad \underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\xi\|^2 \leq V(\|\xi\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\xi\|^2, \end{aligned}$$

где матрица  $P$  соответствует решению уравнений (II.3).

Производная квадратичной формы (II.4) в силу уравнений (1.1) и (2.2) имеет вид

$$(II.5) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= e_{ref}^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T P B - \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T q q^T e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T q \sqrt{2d} - \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Так как согласно (II.2)  $d > 0$ , то для определенности допустимо принять  $d = 0,5$ . В этом случае из (II.5) имеем:

$$(II.6) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T q q^T e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T q \pm \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - \left( e_{ref}^T q - \tilde{\theta}^T \omega \right)^2 + \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим две ситуации  $t < t_e$  и  $t \geq t_e$ . В первой ситуации, в самом плохом случае, согласно (2.1) и (2.2) верно  $\Omega = 0$  и  $\|\tilde{\theta}\| = \|\tilde{\theta}(0)\|$ . Тогда для любого  $t < t_e$  можем переписать уравнение (II.6) в виде

$$(II.7) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T(0) \omega \omega^T \tilde{\theta}(0) \pm \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \tilde{\theta}^T(0) \omega \omega^T \tilde{\theta}(0) + \tilde{\theta}^T(0) \tilde{\theta}(0). \end{aligned}$$

Введем понятие максимального собственного числа матрицы  $\omega\omega^T$  на интервале времени  $[0; t_e]$ :

$$(П.8) \quad \delta = \sup_{\forall t < t_e} \lambda_{\max}(\omega\omega^T).$$

С учетом (П.8) уравнение (П.7) для  $t < t_e$  может быть переписано в виде

$$(П.9) \quad \dot{V} \leq -\mu\lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - \|\tilde{\theta}\|^2 + (\delta + 1) \|\tilde{\theta}(0)\|^2 \leq -\eta_1 V + r_B,$$

где  $\eta_1 = \min \left\{ \frac{\mu\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}; 2 \right\}$ ;  $r_B = (\delta + 1) \|\tilde{\theta}(0)\|^2$ .

Решив дифференциальное уравнение (П.9), имеем

$$(П.10) \quad \forall t < t_e : V \leq e^{-\eta_1 t} V(0) + \frac{r_B}{\eta_1}.$$

Учитывая  $\lambda_m \|\xi\|^2 \leq V$  и  $V(0) \leq \lambda_M \|\xi(0)\|^2$ , из (П.10) имеем оценку для всех  $t < t_e$  на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$(П.11) \quad \|\xi\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} e^{-\eta_1 t} \|\xi(0)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m \eta_1}} \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \|\xi(0)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m \eta_1}}.$$

Откуда следует ограниченность  $\xi$  для всех  $t < t_e$ .

Перейдем к рассмотрению второй ситуации. Учитывая справедливость для всех  $t \geq t_e$  неравенства  $0 < \Omega_{LB} \leq \Omega \leq \Omega_{UB}$  и определение коэффициента усиления  $\gamma$ , из (П.6) для  $t \geq t_e$  получим

$$(П.12) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \frac{(\gamma_0 \lambda_{\max}(\omega\omega^T) + \gamma_1) \Omega^2}{\Omega^2} \tilde{\theta} = \\ &= -\mu e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T [\gamma_0 \lambda_{\max}(\omega\omega^T) + \gamma_1] \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Учтем справедливость для любого  $\omega$  неравенства

$$(П.13) \quad \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma_0 \lambda_{\max}(\omega\omega^T) \tilde{\theta} = \tilde{\theta}^T \underbrace{(\omega\omega^T - \gamma_0 \lambda_{\max}(\omega\omega^T) I)}_{\leq -\kappa I} \tilde{\theta} \leq 0$$

и перепишем (П.12) в виде

$$(П.14) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - \tilde{\theta}^T (\kappa + \gamma_1) \tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\mu\lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - (\kappa + \gamma_1) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq -\eta_2 V, \end{aligned}$$

где  $\eta_2 = \min \left\{ \frac{\mu\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}; 2(\kappa + \gamma_1) \right\}$ .

Решив дифференциальное неравенство (П.14), для  $t \geq t_e$  имеем

$$(П.15) \quad V \leq e^{-\eta_2 t} V(t_e).$$

Учитывая  $\lambda_m \|\xi\|^2 \leq V$ ,  $V(t_e) \leq \lambda_M \|\xi(t_e)\|^2$  и выражение (П.11), из (П.15) получим для  $t \geq t_e$  оценку на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$(П.16) \quad \|\xi\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} e^{-\eta_2 t} \|\xi(t_e)\|^2} \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \left( \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \|\xi(0)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m \eta_1} \right)}.$$

Откуда вместе с (П.11) следует  $\xi \in L_\infty$  и экспоненциальная сходимость для всех  $t \geq t_e$  ошибки  $\xi$  к нулю со скоростью, прямо пропорциональной параметрам  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ , что и требовалось доказать во втором и третьем пунктах теоремы.

*Доказательство утверждения 2.* Для доказательства первой части утверждения 2 учтем  $|\Delta| \leq c_1 e^{c_2 t}$  и подставим оценку  $\Delta^2 \leq c_1^2 e^{2c_2 t}$  в определение регрессора  $\Omega$ :

$$(П.17) \quad \Omega(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau \leq c_1^2 \int_{t_r^+}^t e^{(2c_2 - \sigma)\tau} d\tau.$$

Учитывая  $\sigma > 2c_2$  по условию утверждения 2 в (П.17), имеем

$$(П.18) \quad \Omega(t) \leq c_1^2 \int_{t_r^+}^t e^{-c_3\tau} d\tau = \frac{c_1^2}{c_3} (1 - e^{-c_3 t}) \leq \frac{c_1^2}{c_3}.$$

Откуда следует  $\Omega(t) \in L_\infty \forall t \geq t_r^+$ , что и требовалось доказать в первой части утверждения.

Для доказательства второй части утверждения, следуя определению (1.6), запишем условие конечного возбуждения регрессора  $\Delta$  на отрезке  $[t_r^+; t_e]$ :

$$(П.19) \quad \int_{t_r^+}^{t_e} \Delta^2(\tau) d\tau \geq \alpha.$$

Тогда для  $t \geq t_e$  следующее неравенство верно:

$$(П.20) \quad \int_{t_r^+}^t \Delta^2(\tau) d\tau > 0.$$

Поскольку  $\forall t < t_e e^{-\sigma t} > 0$  и выполняется неравенство (П.20), то верно

$$(П.21) \quad \Omega(t) = \int_{t_r^+}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau > 0, \quad \forall t \geq t_e.$$

Для дальнейшего доказательства на основе определения  $\Omega$  введем запись:

$$(П.22) \quad \Omega(t) = \int_{t_r^+}^{t_e} e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau + \int_{t_e}^t e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau.$$

Так как  $\Delta^2 \leq c_1^2 e^{2c_2 t}$ , то первый интеграл в (П.22) ограничен:

$$(П.23) \quad \int_{t_r^+}^{t_e} e^{-\sigma\tau} \Delta^2(\tau) d\tau \leq c_1^2 \int_{t_r^+}^{t_e} e^{-c_3\tau} d\tau = \frac{c_1^2}{c_3} \left( e^{-c_3 t_r^+} - e^{-c_3 t_e} \right).$$

С учетом (П.18) и (П.22), (П.23) для  $t \geq t_e$  верно неравенство

$$(П.24) \quad 0 < \frac{c_1^2}{c_3} \left( e^{-c_3 t_r^+} - e^{-c_3 t_e} \right) \leq \Omega(t) \leq \frac{c_1^2}{c_3},$$

что завершает доказательство утверждения 2.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
2. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
3. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
4. *Duarte M.A., Narendra K.S.* Combined Direct and Indirect Approach to Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 10. P. 1071–1075.
5. *Lavretsky E.* Combined/Composite Model Reference Adaptive Control // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. V. 54. No. 11. P. 2692–2697.
6. *Lavretsky E.* Reference Dynamics Modification in Adaptive Controllers for Improved Transient Performance // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf. 2011. P. 1–13.
7. *Yucelen T., De La Torre G., Johnson E.N.* Improving Transient Performance of Adaptive Control Architectures Using Frequency-Limited System Error Dynamics // Int. J. Control. 2014. V. 87. No. 11. P. 2383–2397.
8. *Chowdhary G., Muhlegg M., Johnson E.* Exponential Parameter and Tracking Error Convergence Guarantees for Adaptive Controllers without Persistency of Excitation // Int. J. Control. 2014. V. 87. No. 8. P. 1583–1603.
9. *Roy S.B., Bhasin S., Kar I.N.* A UGES Switched MRAC Architecture Using Initial Excitation // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 7044–7051.
10. *Pan Y., Bobtsov A., Darouach M., Joo Y.-H.* Efficient Learning from Adaptive Control under Sufficient Excitation // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2019. V. 29. No. 10. P. 3111–3124.
11. *Gerasimov D.N., Nikiforov V.O., Belyaev M.E.* Performance Improvement of MRAC by Dynamic Regressor Extension // IEEE Conf. Decision and Control. 2018. P. 3032–3037.

12. *Gerasimov D.N., Belyaev M.E., Nikiforov V.O.* Improvement of Transient Performance in MRAC by Memory Regressor Extension // Eur. J. Control. 2021. V. 59. P. 264–273.
13. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // АиТ. 1994. № 9. P. 3–22.  
*Nikiforov V.O., Fradkov A.L.* Adaptive-Control Systems with Augmented Errors // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 9. P. 1239–1255.
14. *Бобцов А.А., Никифоров В.О.* Адаптивное управление по выходу: проблематика, прикладные задачи и решения // Научн.-техн. вест. информ. технологий, механики и оптики. 2013. Т. 83. № 1. P. 1–14.
15. *Monopoli R.V.* Model Reference Adaptive Control with an Augmented Signal // IEEE Trans. Autom. Control. 1974. V. 19. No. 5. P. 474–484.
16. *Morse A.S.* High-Order Parameter Tuners for Adaptive Control on Nonlinear Systems // Systems, Models and Feedback: Theory and Appl. Isidori A., Tarn T.I. (Ed). New York: Birkhanser, 1992. P. 339–364.
17. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999.
18. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovich P.V.* Adaptive Nonlinear Control without Overparametrization // Syst. Control Lett. 1992. V. 19. P. 177–185.
19. *Erzberger H.* Analysis and Design of Model Following Control Systems by State Space Techniques // Proc. Joint Autom. Control Conf. 1967. P. 572–581.
20. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* I-DREM MRAC with Time-Varying Adaptation Rate & No A Priori Knowledge of Control Input Matrix Sign to Relax PE Condition // Eur. Control Conf. 2021. P. 2175–180.
21. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
22. *Yi B., Ortega R.* Conditions for Convergence of Dynamic Regressor Extension and Mixing Parameter Estimator Using LTI Filters // arXiv preprint arXiv:2007.15224, 2020. P. 1–6.
23. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Regression Filtration with Resetting to Provide Exponential Convergence of MRAC for Plants with Jump Change of Unknown Parameters // arXiv preprint arXiv:2102.10359. 2021. P. 1–12.
24. *Глушченко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.* I-DREM: ослабление условия квадратичной интегрируемости // АиТ. 2021. № 7. С. 147–165.  
*Glushchenko A.I., Petrov V.A., Lastochkin K.A.* I-DREM: Relaxing the Square Integrability Condition // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 7. P. 1233–1247.
25. *Feuer A., Morse A.S.* Adaptive Control of Single-Input, Single-Output Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1978. V. 23. No. 4. P. 557–569.
26. *Narendra K.S., Valavani L.S.* Stable Adaptive Controller Design—Direct Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1978. V. 23. No. 4. P. 570–583.
27. *Kreisselmeier G.* Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
28. *Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Vedyakov A.* On Parameter Tuning and Convergence Properties of the DREM Procedure // Eur. Control Conf. 2020. P. 53–58.

29. *Gerasimov D.N., Ortega R., Nikiforov V.O.* Relaxing the High-Frequency Gain Sign Assumption in Direct Model Reference Adaptive Control // Eur. J. Control. 2018. V. 43. P. 12–19.
30. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Robust Method to Provide Exponential Convergence of Model Parameters Solving Linear Time-Invariant Plant Identification Problem // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2021. V. 35. No. 6. P. 1120–1137.
31. *Глущенко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.* Нормализация возбуждения регрессора в процедуре динамического расширения и смешивания // АиТ. 2022. № 1. С. 22–39.
32. *Глущенко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.* Проблема применения процедуры DREM в задаче идентификации интервально заданных параметров // Научн.-техн. вест. информ. технологий, механики и оптики. 2021. Т. 21. № 4. С. 449–456.
33. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Exponential Convergence of Piecewise-Constant Parameters Identification under Finite Excitation Condition // arXiv preprint arXiv:2106.02108. 2021. P. 1–10.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.*

Поступила в редакцию 28.07.2021

После доработки 01.11.2021

Принята к публикации 27.01.2022