

# Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. Ю.В. МИТРИШКИН, д-р техн. наук (yvm@mail.ru)  
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),  
П.С. КОРЕНЕВ (pkorenev92@mail.ru),  
А.Е. КОНЬКОВ (konkov@physics.msu.ru),  
Н.М. КАРЦЕВ, канд. техн. наук (n.kartsev@yandex.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ПОДАВЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЙ ПЛАЗМЫ ПО ВЕРТИКАЛИ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ПЛАЗМЫ В D-ОБРАЗНОМ ТОКАМАКЕ<sup>1</sup>

Обеспечение устойчивости вертикального положения плазмы является первостепенной задачей магнитного управления для современных D-образных токамаков. Введение дополнительной катушки горизонтального поля, расположенной вблизи вакуумной камеры, обеспечивает более чем на порядок больший размер области управляемости по вертикали, чем использование пары катушек полоидального поля R6 & R12 в проекте токамака ИГНИТОР. Синтезированы две робастные системы управления вертикальным положением плазмы: методом  $H_\infty$ -теории оптимизации и посредством настройки ПИД-регуляторов в каскадной системе методом линейных матричных неравенств. Результаты математического моделирования систем управления показывают, что модернизация полоидальной системы проекта токамака ИГНИТОР приводит к повышению запаса устойчивости системы управления вертикальным положением плазмы, качества управления при парировании возмущений и надежности токамака.

*Ключевые слова:* плазма, D-образный токамак, ИГНИТОР, вертикальная неустойчивость плазмы, область управляемости,  $H_\infty$ - и LMI-системы управления.

DOI: 10.31857/S0005231022040067, EDN: AAYAUJ

### 1. Введение

Управляемый термоядерный синтез — это наиболее перспективный источник энергии будущего. Физические условия для его осуществления могут быть достигнуты в специальных установках — токамаках, позволяющих

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-79-20180), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-31-90136), а также частично финансировалась АО «ГНЦ РФ ТРИНИТИ», г. Троицк.

удерживать высокотемпературную плазму в магнитном поле и представляющих собой тороидальную аксиально-симметричную магнитную конфигурацию, создаваемую катушками тороидального и полоидального полей.

Современные D-образные токамаки с вытянутым по вертикали поперечным сечением [1] обеспечивают повышенное давление плазмы при том же тороидальном магнитном поле по сравнению с первым поколением токамаков с круглым вертикальным сечением. При максимальном использовании объема токамака, т.е., при приближении границы плазмы к первой стенке, удается получить плазму с наилучшими параметрами. Однако вытянутое по вертикали сечение плазмы приводит к неустойчивости положения плазмы в вертикальном направлении и в связи с этим к повышенной опасности соприкосновения плазмы с элементами конструкции установки, что может привести к их разрушению. Поэтому для плазмы в современном токамаке как сложном неустойчивом динамическом объекте требуются стабилизация неустойчивого вертикального положения и управление ее формой [2, 3]. Такая плазма может существовать только в системе с обратной связью, обеспечивающей внутреннюю устойчивость замкнутого контура управления [4].

Для достижения требуемых показателей в параметрах плазмы и одновременно высокого уровня надежности установки необходимо одновременно решать множество задач магнитного и кинетического управления плазмой. Первостепенной задачей для современного токамака является задача магнитного управления положением, током и формой плазмы. Обзор систем магнитного управления плазмой в токамаках [2, 5–8] показал, что в современных действующих токамаках существует большое разнообразие полоидальных систем и соответствующих подходов к синтезу и архитектуре систем магнитного управления плазмой. В данный момент в мире не существует отработанной общей методики синтеза систем магнитного управления плазмой, ее разработка в совокупности с оптимизацией конфигурации исполнительных систем магнитных катушек полоидального поля далека от завершения и требует дополнительных исследований и новых идей.

Данная статья посвящена анализу устойчивости системы управления вертикальным положением плазмы к смещениям по вертикали с учетом ограничений на величину управляющих сигналов для проекта токамака ИГНИТОР [9, 10]. Проект ИГНИТОР особенно выделяется, поскольку он является одним из немногих, в котором имеется возможность получить самоподдерживающуюся термоядерную реакцию [1, 9], что делает его наиболее близким к термоядерным электростанциям будущего [8]. В проекте установки ИГНИТОР имеется большое количество катушек полоидального поля и секций центрального соленоида по сравнению с другими проектами и действующими токамаками, что приблизит систему магнитного управления плазмой в нем к системе с распределенным управлением и позволит создавать разнообразные магнитные конфигурации плазмы. Это даст возможность исследовать и оптимизировать систему магнитного управления плазмой для достижения наилучших характеристик автоматического управления по сравнению с известными системами данного вида.

В данной работе проводятся анализ и сравнение двух вариантов полоидальных систем токамака ИГНИТОР с разными управляющими катушками горизонтального поля: пара Р6 & Р12; катушка НФС (Horizontal Field Coil), расположенная вблизи камеры, предложенная и обоснованная в [11].

## 2. Постановка задачи

Основная задача системы управления вертикальным положением плазмы с обратной связью в D-образном токамаке — это подавление вертикальной неустойчивости плазмы. При этом система за счет обратной связи способна подавлять резкие возмущения вертикального положения плазмы, вызванные разными причинами, например: различными неустойчивостями плазмы с временем развития меньшим, чем время реакции системы управления; задержками в контуре управления; шумами на входе регулятора ошибки управления, малыми срывами (сбросами давления плазмы и ее внутренней индуктивности).

Математическая постановка задачи в работе сводится к следующим этапам.

- Для оценки зон работоспособности систем управления при смещениях вертикального положения плазмы необходимо синтезировать динамическую модель плазмы с использованием законов Кирхгофа и баланса сил Ньютона. Сами смещения предлагается моделировать как мгновенные возмущения вектора состояний  $x$  [3] в модели плазмы в пространстве состояний вида

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu + B_1w, \quad y = Cx,$$

где входом модели  $u$  является подаваемое на управляющую катушку напряжение, выходом  $y$  — координаты центра массы плазмы и токи в катушках токамака, вектор состояния модели  $x$  — приращения токов в катушках полоидального поля и секциях центрального соленоида токамака, плазме и элементах вакуумной камеры,  $w$  — внешнее координатное возмущение в виде импульса длительностью 1 мс, приводящее к смещению плазмы по вертикали,  $B_1$  — вектор-столбец, через который возмущение подается в состояния модели объекта управления. Возмущение  $w$  имитирует процесс, вызванный различными указанными выше причинами, который вызывает смещение плазмы по вертикали.

- Предлагается рассмотреть конфигурации полоидальной системы токамака ИГНИТОР с парой Р6 & Р12 в качестве управляющей вертикальным положением плазмы катушки (рис. 3,а) [9] и расположенной на расстоянии 1 см от камеры управляющей катушкой НФС (рис. 3,б) [11]. Целью исследований является сравнение эффективности управления вертикальным положением плазмы с применением двух разных катушек в токамаке ИГНИТОР: Р6 & Р12 и НФС. Сравнение предлагается проводить по критерию величины области управляемости по вертикали [11], т.е. наибольшей

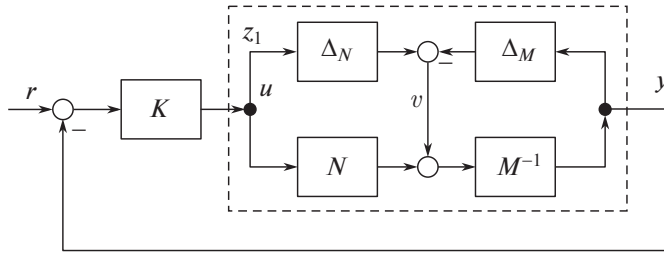


Рис. 1. Схема факторизованной модели объекта с неопределенностями, охваченной отрицательной обратной связью с регулятором  $K$ .

величине вертикального смещения  $Z$  плазмы, при котором плазму возможно вернуть в положение  $Z = 0$ , не выходя за ограничение на величину управляющего напряжения. Таким образом, имеются фазовые ограничения в пространстве состояний модели объекта, которые в задаче управления плазмой по вертикали выражаются в ограничения по  $Z$  [12]:

$$(2) \quad |u| < u_{\max} \Rightarrow Z(t) \in [-Z_{\max} + Z_{\max}], \quad t > t_0.$$

Это означает, что если по каким-либо причинам изображающая точка выйдет из области управляемости, например из-за действия внешних возмущений, то при заданном ограничении на управляющее воздействие изображающую точку будет уже невозможно вернуть в область управляемости.

- Предлагается синтезировать робастные системы управления посредством оптимизации норм передаточных функций в замкнутых системах управления. Возмущенная модель  $G_p$  с неопределенностью типа немоделируемой динамики  $\Delta_M$  и  $\Delta_N$  факторизуется как [4, 13, 14]

$$G_p(s) = (M + \Delta_M)^{-1} (N + \Delta_N),$$

где  $\Delta_M$  и  $\Delta_N$  — неизвестные устойчивые передаточные функции, которые представляют неопределенность в номинальной модели объекта

$$G = M^{-1}N.$$

По теореме о малом коэффициенте усиления [4] запас робастной устойчивости  $\varepsilon$  в синтезированной замкнутой системе удовлетворяет неравенству (рис. 1)

$$\varepsilon = \|\Delta_M \quad \Delta_N\|_{\infty} < 1/\|Q\|_{\infty},$$

где

$$Q = - \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} M^{-1}$$

является передаточной функцией замкнутой системы без неопределенности, т.е. передаточной функцией от  $v$  к  $\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$ ,  $(I + GK)^{-1}$  — функция чувствительности для отрицательной обратной связи,  $K$  — передаточная функция регулятора из класса стабилизирующих регуляторов.

Для нахождения оптимального робастного регулятора  $K_{opt}$ , доставляющего максимум запаса устойчивости  $\varepsilon$ , требуется решение задачи оптимизации вида

$$(3) \quad K_{opt} = \arg \min_{K \text{ stabilizing}} \|Q\|_{\infty}.$$

При решении задачи (3) определяется и минимальная  $H_{\infty}$ -норма передаточной функции  $Q$ , которая позволяет вычислить максимальный запас робастной устойчивости  $\varepsilon$  при найденном оптимальном робастном регуляторе  $K_{opt}$ .

- Другая система управления (рис. 2) содержит ПИД-регуляторы с передаточной функцией

$$(4) \quad C(s) = K_P + \frac{1}{s}K_I + \frac{s}{1 + \tau s}K_D,$$

где  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  — неизвестные параметры ПИД-регулятора. Алгоритм настройки таких ПИД-регуляторов предполагает минимизацию спектральной нормы матрицы (модуля в скалярном случае) статической и низкочастотной чувствительности замкнутой системы  $(P(0)K_I)^{-1}$  с моделью объекта управления  $P(s)$  и коэффициентом при интеграторе в ПИД-регуляторе  $K_I$ , которая получается посредством разложения в ряд Тейлора функции чувствительности замкнутой системы в нуле

$$S(s) = \left( I + P(s) \left( K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{\tau s + 1} \right) \right)^{-1},$$

$$\left. \frac{dS}{ds} \right|_{s=0} = (P(0)K_I)^{-1}, \quad S(s) \approx s(P(0)K_I)^{-1}$$

для малых  $s$ . Также в замкнутой системе необходимо обеспечить выполнение ограничений  $H_{\infty}$ -норм функций чувствительности  $S$ , дополнительной функции чувствительности  $T$  и  $Q$ -параметра замкнутой системы  $Q(s) = C(s)S(s)$  [4, 15]. Для подавления внешнего возмущения необходимо ограничить передаточную функцию  $R(s)$  между внешним возмущением  $d$  и ошибкой  $e$  (рис. 2):

$$\begin{cases} \min & \left\| (P(0)K_I)^{-1} \right\|_2, \\ \text{s.t.} & \|S(s)\|_{\infty} \leq S_{\max}, \\ & \|T(s)\|_{\infty} \leq T_{\max}, \\ & \|Q(s)\|_{\infty} \leq Q_{\max}, \\ & \|R(s)\|_{\infty} \leq R_{\max}. \end{cases}$$

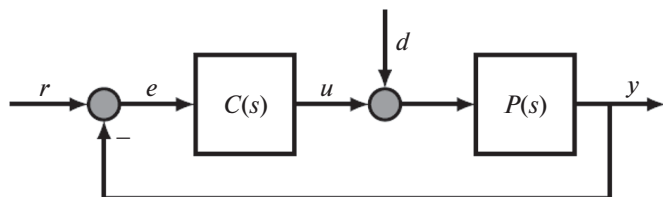


Рис. 2. Классическая система с обратной связью с управлением по ошибке.

$$R(s) = -(I + P(s)C(s))^{-1} P(s).$$

Таким образом, в замкнутой системе обеспечивается слежение с минимально возможной ошибкой между задающим воздействием и выходом при ограниченном входном воздействии на модель объекта управления, а также решается задача отражения (подавления) внешнего входного возмущения.

- После синтеза систем управления предлагается их математическое моделирование в среде MATLAB/Simulink с целью их сравнения для двух видов обмоток горизонтального поля: HFC и P6 & P12.

### 3. Физико-математический ход решения задачи

Высокотемпературная плазма в токамаке (тороидальной камере с магнитными катушками) представляет чрезвычайно сложное явление. Это газ, состоящий из положительно (ионы) и отрицательно (электроны) заряженных частиц, неравномерно распределенных внутри тороидальной камеры и удерживаемых в магнитном поле. По газу протекает электрический ток в тороидальном и полоидальном направлениях. Для удержания плазмы в магнитном поле создается система тороидальных и полоидальных магнитных обмоток (рис. 3). Тороидальная обмотка создает сильное тороидальное поле, что избавляет плазму от большого количества разного вида неустойчивостей.

Во избежание взаимодействия плазмы с первой стенкой токамака создаются секции центрального соленоида (индуктора), которые не только за счет трансформаторного эффекта создают ток в плазме, но и совместно с обмотками полоидального поля удерживают плазму вблизи первой стенки. Несмотря на довольно длительное развитие токамаков (около семи десятков лет), методы выбора количества катушек полоидального поля и методики оптимизации их расположения до конца не исследованы и отсутствуют общепринятые стандарты для решения данных задач. В современных токамаках и при их проектировании не учитываются важные аспекты управляемости плазмы. По этой причине возникает необходимость коррекции полоидальных систем либо посредством переноса некоторых обмоток [2], либо посредством добавления новых обмоток [8, 11]. В этой связи введение новых обмоток горизонтального и вертикального поля в проекте токамака ИГНИТОР вызвало необходимость оптимизации их положения и синтеза новых регуляторов для управления положением плазмы. Исходя из этого возник физико-математический

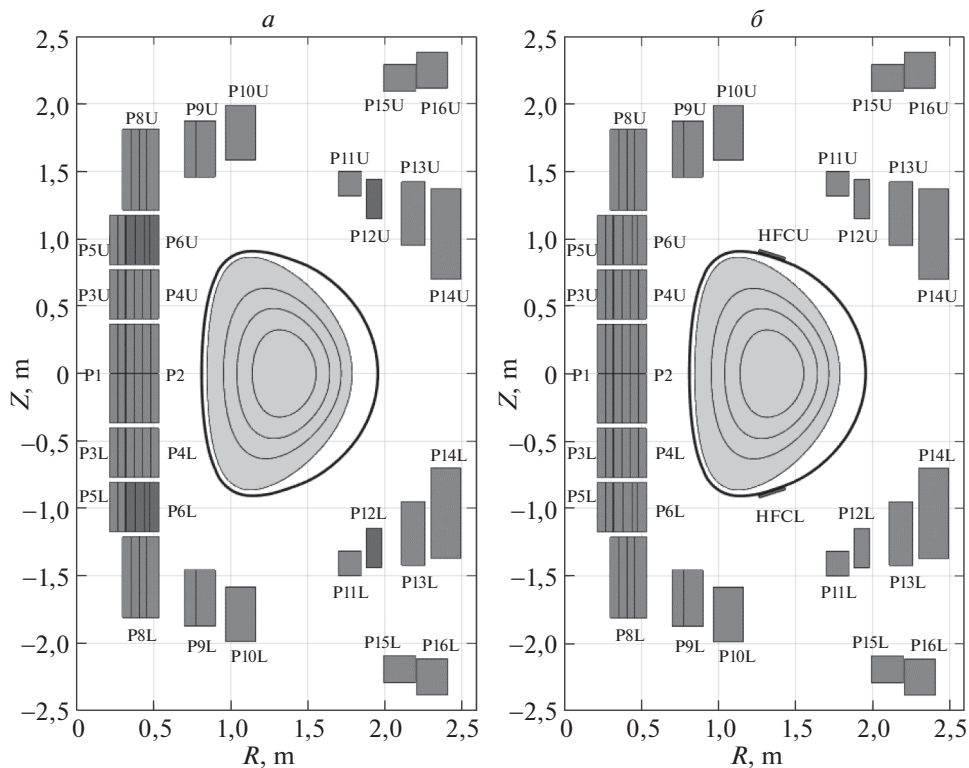


Рис. 3. Рассмотренные конфигурации полоидальной системы токамака ИГНИТОР, *а* – управляющая катушка – пара P6 & P12, *б* – управляющая катушка HFCS, расположенная вблизи камеры.

ход решения поставленной задачи: подавление смещений плазмы по вертикали посредством регулятора в замкнутой системе управления неустойчивым вертикальным положением плазмы в токамаке ИГНИТОР с вытянутым по вертикали поперечным сечением плазмы.

Вначале по данным токамака ИГНИТОР, а именно расположение, число витков и сопротивления CS/PF (Central Solenoid/Poloidal Field – Центральный соленоид/Полоидальное поле)-катушек, расположение элементов камеры и их сопротивления, токи в катушках, токи в камере, распределение тока плазмы, давление плазмы, строится линейная модель плазмы в токамаке, поскольку, как показывает опыт эксплуатации токамаков, линейной модели достаточно для разработки и применения систем магнитного управления плазмой [2, 3, 5–8].

Затем построенная линейная модель плазмы в токамаке анализируется на предмет ее управляемости. В [16] подчеркиваются основные факты об управлении неустойчивыми объектами:

- «неустойчивыми объектами принципиально и количественно сложнее управлять, чем устойчивыми;

- регуляторы для неустойчивых объектов являются критически важными для работы систем управления;
- замкнутые системы с неустойчивыми компонентами являются только локально устойчивыми».

Последнее означает, что неустойчивый объект не может быть стабилизирован глобально в пространстве состояний с ограниченным управляющим воздействием. Ограниченность входного воздействия для неустойчивого объекта влечет за собой ограниченность области, в которой можно переводить объект из одного состояния в другое с помощью регулятора. Эта область должна быть достаточно большой, чтобы можно было гарантированно в этой области подавлять внешние возмущения типа малого срыва, когда происходят сбросы давления и внутренней индуктивности плазмы [1]. Если область управляемости относительно мала, то тогда объект будет являться слабо управляемым и решать задачу стабилизации для обеспечения локальной устойчивости будет трудно: малые возмущения будут выводить объект управления из области управляемости, что заведомо приводит к потере устойчивости замкнутой системы управления [17].

В этой связи приводится определение области управляемости для случая неустойчивой линейной модели объекта управления (1) с ограниченным входным воздействием.

*Определение. Областью управляемости неустойчивой линейной модели (1) с ограниченным скалярным входным воздействием  $u$ ,  $|u| \leq u_0 = \text{const}$ , называется ограниченная область в пространстве состояний  $X \subset R^n$ , в которой можно переводить модель объекта из одной точки  $x_1 \in X$  в другую  $x_2 \in X$  ограниченным входным воздействием  $x_1 \xrightarrow{u} x_2$ , причем вне этой области  $x \notin X$  траектории модели уходят в бесконечность при любых значениях управляющего воздействия  $|u| \leq u_0$ .*

Вне области управляемости замкнутая система теряет устойчивость при любом регуляторе в обратной связи, который обеспечивает работоспособность системы в области управляемости. В данном случае, поскольку плазма неустойчива по вертикали, а напряжение ограничено на обмотке НФС, область управляемости вертикального положения плазмы ограничена.

Поэтому сначала по модели плазмы вычисляется размер ограниченной области управляемости по вертикальной координате для двух видов катушек горизонтального поля: Р6 & 12 из проекта ИГНИТОР и НФС, введенной в [11]. Величина области управляемости вычисляется двумя способами: аналитически и численным экспериментом. Аналитическая оценка области управляемости осуществляется без учета влияния устойчивых мод в неустойчивой линейной модели плазмы, поэтому для получения более точной оценки применяется численный эксперимент, предложенный в [17] для определения величины области управляемости в реальном физическом эксперименте действующих токамаков.

В проведенных оценках принималось во внимание, что выход изображающей точки из области управляемости, например по причине воздействия



внешнего возмущения, приводит к неконтролируемой неустойчивости системы управления. В данном случае вне области управляемости система теряет управляемость, а поскольку объект неустойчивый, то потеря управляемости влечет за собой и потерю устойчивости замкнутой системы управления. Таким образом, за пределами данной области замкнутая система является неустойчивой при любых управляющих воздействиях в пределах наложенных ограничений на входное воздействие. Кроме того, при замыкании модели неустойчивого объекта стабилизирующей обратной связью происходит смещение полюсов замкнутой системы в левую часть комплексной плоскости, но при этом модель объекта все равно остается неустойчивой. Это говорит о том, что при сбое в обратной связи системы управления она может потерять устойчивость вне зависимости от нахождения ее вектора состояния в области управляемости. Итак, система управления неустойчивым объектом с ограниченным управлением является всегда опасной [16], поскольку сбой в ней могут привести к потере устойчивости, а в D-образных токамаках потеря устойчивости системы управления вертикальным положением плазмы может вызвать большой срыв [1].

Модель (1) из-за ограниченности управления  $u$  является нелинейной, поэтому обладает не только ограниченной областью управляемости, но и свойством локальной стабилизации [18]. Это означает, что при введении обратной связи по состоянию с размещением полюсов в левой полуплоскости комплексной плоскости (модальное управление) [19] и при наличии управляемости или стабилизируемости пары  $(A, B)$ ,  $w = 0$ , траектории в пространстве состояний будут асимптотически стремиться к нулю в области управляемости. В этом случае область управляемости будет являться областью притяжения начала координат, а закон управления с обратной связью будет обеспечивать стабилизацию в области.

Для удержания плазмы в оцененной области управляемости необходим синтез системы управления вертикальным положением плазмы с обратной связью по вертикальному положению плазмы. При выборе подхода к разработке данной системы целесообразно руководствоваться принципом оптимизации, который давно прочно внедрился в область синтеза систем управления [20]. Для линейных систем популярно в настоящее время множество разнообразных методов синтеза регуляторов. В настоящей статье для разработки систем управления неустойчивым объектом выбраны два метода:

- 1) метод  $H_\infty$ -оптимизации [13, 14, 21] и
- 2) метод линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities — LMI) [22].

В первом случае наиболее привлекательным является безытерационный метод робастной стабилизации МакФарлея-Гловера, который позволяет минимизацией критерия качества (3) на классе стабилизирующих регуляторов сразу получить робастный регулятор и робастный запас устойчивости замкнутой системы. С другой стороны, известный алгоритм Дж. Дойла и др. требует итераций и после сходимости к искомому регулятору с некоторой точностью необходима дополнительная оценка запаса устойчивости [23].

При применении ЛМІ для синтеза системы может ставиться задача по-уопределенного программирования, при которой оптимизация выбранного параметра  $\gamma$  при выполнении ограничений типа ЛМІ с участием этого параметра приводит к нахождению робастного регулятора [22]

$$\gamma \rightarrow \max \text{ s.t. } F(x, \gamma) \geq 0,$$

где

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^l x_i F_i, \quad F_i = F_i^T, \quad x_i \in R^1, \quad i = 1, \dots, l.$$

В последнее время повысился интерес к ПИД-регуляторам, имеющим историю более ста лет, поскольку в промышленности они занимают около 97% по сравнению со всеми регуляторами других типов. Возрастание интереса к ПИД-регуляторам видно, например, из того, что на последнем всемирном конгрессе IFAC в 2020 г. (Германия) был организован до открытия конгресса специальный семинар, посвященный только ПИД-регуляторам под руководством профессора Л. Уонг, которая в 2020 г. издала монографию в этой области [24]. Интерес к ПИД-регуляторам объясняется тем, что скалярные ПИД-регуляторы имеют всего три параметра, которые подлежат настройке, что позволяет их настраивать непосредственно на реальных объектах. Например, ПИД-регуляторы применяются в каскадах управления отдельными тарелками на ректификационных колоннах [4]. При этом ПИД-регуляторы приносят в замкнутые системы управления свойства робастности. К настоящему времени разработано довольно много различных подходов для настройки ПИД-регуляторов [24].

Кроме этого, совсем недавно [15] появился подход к синтезу ПИД-регуляторов с матричными коэффициентами. Решение задачи синтеза при этом сводится к переходу в частотную область, созданию системы квадратичных неравенств, аппроксимации ее системой ЛМІ посредством выпукло-вогнутой процедуры и итеративному решению полученной системы ЛМІ.

Математический синтез систем управления вызывает необходимость последующего численного моделирования на линейной модели плазмы и исполнительного устройства с заданными параметрами, определяемыми начальными численными данными, полученными для проекта ИГНИТОР. Моделирование предполагается в компьютерной среде MATLAB/Simulink от компании MathWorks (<https://www.mathworks.com/>), поскольку эта среда наиболее развита для синтеза, анализа и моделирования многомерных систем управления динамическими объектами, описываемых либо дифференциальными, либо разностными уравнениями.

Основной результат, на который была направлена постановка задачи, — это доказательство того, что катушка НФС обеспечивает гораздо большую область управляемости, чем имеющиеся в проекте ИГНИТОР катушки Р6 & 12. При этом поставлена задача синтеза робастных систем управления для обоих видов катушек, чтобы убедиться в том, что для этих катушек области возможных вертикальных смещений также являются различными. Система

управления вертикальным положением плазмы с катушкой НФС способна подавлять заметно большие вертикальные смещения плазмы, чем система управления с катушками Р6 & 12.

#### 4. Линейная модель плазмы в токамаке

Построенная линейная модель плазмы основана на уравнениях для контуров токов катушек, плазмы и элементов камеры, а также уравнениях баланса действующих на плазму сил

$$\frac{d}{dt}\Psi_c + R_c I_c = U, \quad \frac{d}{dt}\Psi_v + R_v I_v = 0, \quad \frac{d}{dt}\Psi_p + R_p I_p = 0,$$

$$\vec{F}(I, R, Z) = 0.$$

Здесь  $\Psi_c, \Psi_v, \Psi_p$  — вектор-столбцы магнитных потоков через контуры катушек, элементы камеры, и плазмы,  $R_c, R_v, R_p$  — диагональные матрицы сопротивлений контуров,  $I = [I_c^T, I_v^T, I_p^T]^T$  — вектор-столбец токов в контурах токамака, включающий в себя токи в катушках  $I_c$ , токи в элементах камеры  $I_v$  и ток плазмы  $I_p$ ,  $U$  — вектор-столбец подаваемых на катушки напряжений,  $R$  и  $Z$  — горизонтальная и вертикальная координаты центра массы плазмы,  $\vec{F}$  — вектор действующей на плазму силы.

Модель линеаризована возле описанного в [10] магнитогидродинамического (МГД) равновесия плазмы для момента времени  $t = 3,65$  с.

Линеаризованные уравнения модели для отклонений  $\delta$  от положения равновесия имеют вид:

уравнения Кирхгофа для контуров катушек

$$\frac{\partial \Psi_c}{\partial I} \frac{d}{dt} \delta I + \frac{\partial \Psi_c}{\partial R} \frac{d}{dt} \delta R + \frac{\partial \Psi_c}{\partial Z} \frac{d}{dt} \delta Z + R_c \delta I_c = \delta U,$$

для контуров камеры токамака

$$\frac{\partial \Psi_v}{\partial I} \frac{d}{dt} \delta I + \frac{\partial \Psi_v}{\partial R} \frac{d}{dt} \delta R + \frac{\partial \Psi_v}{\partial Z} \frac{d}{dt} \delta Z + R_v \delta I_v = 0,$$

для контура плазмы

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial I} \frac{d}{dt} \delta I + \frac{\partial \Psi_p}{\partial R} \frac{d}{dt} \delta R + \frac{\partial \Psi_p}{\partial Z} \frac{d}{dt} \delta Z + R_p \delta I_p = 0.$$

Уравнение баланса сил, действующих на плазму,

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial I_c} \delta I_c + \frac{\partial \vec{F}}{\partial I_v} \delta I_v + \frac{\partial \vec{F}}{\partial I_p} \delta I_p + \frac{\partial \vec{F}}{\partial R} \delta R + \frac{\partial \vec{F}}{\partial Z} \delta Z = 0.$$

Линейными преобразованиями модель приведена к стандартному виду (1) в пространстве состояний [25], где

$$x = \delta I, \quad u = \delta U, \quad y = [\delta Z \quad \delta I_c^T]^T,$$

$$A = -\tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} R_c & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_p \end{bmatrix}, \quad B = \tilde{M}^{-1} E_{\text{HFC}},$$

$$C = \begin{bmatrix} [0 & 1] P \\ E_{\text{HFC}}^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \Psi_c}{\partial I} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_c}{\partial R} & \frac{\partial \Psi_c}{\partial Z} \end{bmatrix} P \\ \frac{\partial \Psi_v}{\partial I} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_v}{\partial R} & \frac{\partial \Psi_v}{\partial Z} \end{bmatrix} P \\ \frac{\partial \Psi_p}{\partial I} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_p}{\partial R} & \frac{\partial \Psi_p}{\partial Z} \end{bmatrix} P \end{bmatrix},$$

$$P = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{F}}{\partial R} & \frac{\partial \vec{F}}{\partial Z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{F}}{\partial I_A} & \frac{\partial \vec{F}}{\partial I_v} & \frac{\partial \vec{F}}{\partial I_p} \end{bmatrix},$$

$E_{\text{HFC}}$  — вектор-столбец высотой в количество токов  $I = [I_c^T, I_v^T, I_p]^T$  с единицей в позиции, соответствующей току управляющей катушки  $I_{\text{HFC}}$ , и нулями на остальных позициях. Вектор-столбец  $B_1$  не имеет аналитического выражения и был подобран так, чтобы имитировать процесс вертикального срыва плазмы.

Рассчитанная для токамака ИГНИТОР модель имеет 29 состояний (13 токов в катушках токамака, 15 токовых мод, наводящихся на камере, ток плазмы), один вход (напряжение на управляющей катушке) и два выхода (вертикальное смещение плазмы и ток в управляющей катушке), единственный действительный неустойчивый полюс  $\gamma > 0$ , соответствующий неустойчивости вертикального положения плазмы. Модель позволяет воспроизводить возмущения плазмы по вертикали при помощи резких скачков вектора состояний  $x$ , реализованных в модели (1) через импульсное возмущение  $w$  и вектор-столбец  $B_1$ .

## 5. Оценка величины области управляемости вертикального положения плазмы

Важным параметром полоидальной системы является размер области управляемости вертикального положения плазмы. В общем случае замкнутая система управления теряет устойчивость при возмущениях, превышающих по амплитуде размер области управляемости [11].

Для аналитической оценки этой величины при помощи преобразования базиса пространства состояний модель (1) была приведена к блочно-диагональной форме с неустойчивым полюсом  $\gamma$  в качестве одного из блоков [26, 27]:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \quad Z = \hat{C}\hat{x},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{n-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{n-1} \\ \hat{b}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [ \hat{C}_{n-1} \quad \hat{c}_n ],$$

$$\hat{A}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}, \quad \hat{B}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1 \times 1}, \quad \hat{C}_{n-1} \in \mathbb{R}^{1 \times n-1},$$

$$\gamma > 0, \quad \gamma, \hat{b}_n, \hat{c}_n \in \mathbb{R}^1.$$

В таком виде модель эквивалентна параллельному соединению устойчивого и неустойчивого звеньев (рис. 4). При ограничении на величину управляющего воздействия  $|u| < u_{\max}$  условие, при котором управление может влиять на знак скорости изменения неустойчивого состояния, принимает вид  $|\hat{b}_n|u_{\max} > \gamma|\hat{x}_n|$ . Пренебрегая вкладом устойчивого звена в выход, получим отсюда оценку максимального управляемого вертикального смещения плазмы  $|Z_{\max}| = |\hat{c}_n| |\hat{b}_n| |u_{\max}| / \gamma$ . Для токамака ИГНИТОР с ограничением на напряжение  $u_{\max} = 1000$  В и управляющей катушкой Р6 & Р12 такая оценка дает  $|Z_{\max}| = 1,6$  см, а с управляющей катушкой НФС —  $|Z_{\max}| = 37,2$  см.

Для численной оценки области управляемости по модели (1) была проведена серия численных экспериментов, как предложено в [17], в которых при отключенной системе управления вертикальным положением плазме позволялось сместиться в силу неустойчивости на расстояние  $\Delta Z$ , после чего на управляющую катушку подавалось максимально допустимое напряжение  $u_{\max} = 1000$  В соответствующего знака. На разные начальные расстояния  $\Delta Z$  плазма смещалась по одной и той же траектории, что видно из рис. 5.

Результаты моделирования показаны на рис. 5 и согласуются с аналитической оценкой, полученной по методике, развитой в [26, 27]: катушка Р6 & Р12 теряет управляемость модели объекта управления при отклонениях по вертикали амплитудой примерно 1,5 см (рис. 5,а), катушка НФС теряет управляемость при отклонениях около 36 см (рис. 5,б). Данные результаты согласуются с приведенной выше аналитической оценкой области управляемости. Потеря управляемости катушками в разомкнутой системе означает, что при выходе вектора состояния модели объекта управления за пределы области управляемости (в данном случае это связано с начальными условиями) любая замкнутая система теряет устойчивость и катушки управления не имеют возможности вернуть систему в область управляемости при ограниченном на них напряжении даже при наличии работоспособной в области управляемости обратной связи.

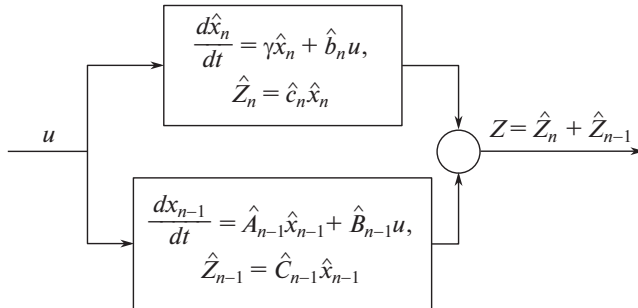


Рис. 4. К аналитическому определению величины области управляемости.

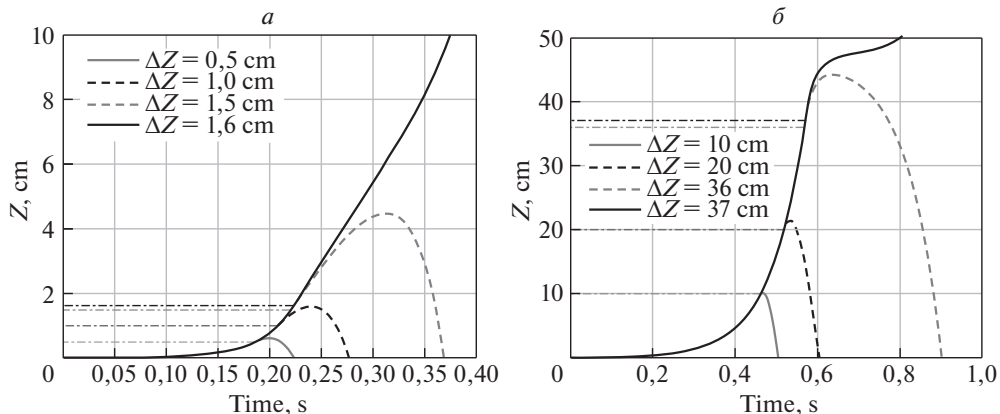


Рис. 5. Численная оценка максимального управляемого смещения плазмы, горизонтальными линиями показаны значения смещения плазмы, после которого на катушку управления подавалось напряжение, *a* – управляющая катушка – пара P6 & P12, *б* – управляющая катушка – расположенная вблизи камеры HFC.

## 6. Синтез систем управления положением плазмы

### 6.1. Синтез методом $H_\infty$ -оптимизации

Робастный регулятор управления вертикальным положением плазмы синтезируется методом нормализованной взаимно простой факторизации [13] и частотного формирования разомкнутого контура (Loop Shaping) [14]. Пусть в (3)  $\|Q\|_\infty = \gamma \leq \frac{1}{\varepsilon}$ . Наименьшее достижимое значение  $\gamma$  и соответствующий максимальный запас устойчивости  $\varepsilon$  даны в [21]:

$$\gamma_{\min} = \frac{1}{\varepsilon_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \|N \quad M\|_H^2}} = \sqrt{1 + \rho(XZ)},$$

где  $\sigma_1 = \|G\|_H$  – ганкелева норма  $G(s)$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(PO)}$  – упорядоченные ганкелевы сингулярные числа,  $\rho$  – спектральный радиус ( $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ ),  $P$  и  $O$  – грамианы управляемости и наблюдаемости, для минимальной реализации (1) ( $A, B, C, D = 0$ )  $Z$  и  $X$  – единственные положительно определенные решения алгебраических уравнений Риккати

$$\begin{aligned} AZ + ZA - ZCC^T Z + BB^T &= 0, \\ AX + XA - XBB^T X + C^T C &= 0. \end{aligned}$$

Центральным регулятором, который гарантирует, что  $\|Q\|_\infty \leq \gamma$  для заданного  $\gamma > \gamma_{\min}$ , является регулятор с матрицей  $K$  следующего вида [13]:

$$K = \begin{bmatrix} A - BB^T X + \gamma^2 (L^T)^{-1} ZC^T C & \gamma^2 (L^T)^{-1} ZC^T \\ B^T X & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = (1 - \gamma^2) I + XZ.$$

Все регуляторы, при которых значение нормы  $\|Q\|_\infty$  достигает значения  $\gamma = \gamma_{\min}$ , задаются формулой [13]

$$K = UV^{-1},$$

где  $U$  и  $V$  – устойчивые матрицы,  $(U, V)$  – правая взаимно-простая факторизация  $K$ , а  $U, V$  удовлетворяют равенству

$$\left\| \begin{bmatrix} -N^* \\ M^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} N & M \end{bmatrix} \right\|_H.$$

Модель объекта управления характеризуется передаточной функцией  $G(s)$ , полученной из модели в пространстве состояний (1). Данная модель масштабируется по входу и выходу:

$$G_s(s) = d_{out}^{-1}G(s)d_{in}$$

к единичным диапазонам сигналов, дополняется входной  $W_1(s)$  и выходной  $W_2(s)$  весовыми передаточными функциями и факторизуется следующим образом:

$$G_a(s) = W_1(s)d_{out}^{-1}G(s)d_{in}W_2 = M^{-1}(s)N(s),$$

где  $M(s)$  и  $N(s)$  удовлетворяют равенству Безу

$$M(s)M(s)^* + N(s)N(s)^* = 1.$$

Финальный регулятор из решения задачи оптимизации (3) в обратной связи с учетом весовых функций и масштабирующих множителей имеет вид

$$K_{VS}(s) = d_{in}W_2(s)K_{opt}(s)W_1(s)d_{out}^{-1}.$$

Размерность робастного регулятора зависит от размерности исходной модели объекта управления, поэтому финальный регулятор редуцируется до малого порядка [4], обеспечивающего при этом качественное управление.

## 6.2. Синтез методом ЛМІ

В этом разделе синтезируется каскадная система управления с робастными ПИД-регуляторами вертикального положения плазмы и тока в катушке горизонтального поля. Синтез осуществляется методом ЛМІ. Подход, используемый для синтеза этих регуляторов, идентичен подходу, использованному в [11, 29]. Структурная схема системы управления для этого случая приведена на рис. 7, где внутренний каскад с регулятором  $C_{IHFC}$  управляет током в катушке горизонтального поля, а внешний каскад с регулятором  $C_Z$  – положением плазмы.

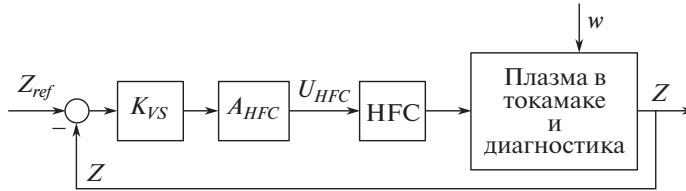


Рис. 6. Структурная схема одноконтурной  $H_\infty$ -системы управления вертикальным положением плазмы:  $K_{VS}$  –  $H_\infty$ -регулятор вертикального положения плазмы,  $A_{HFC}$  – модель многофазного тиристорного выпрямителя, представляющая собой инерционное динамическое звено первого порядка [28], HFC – катушка горизонтального поля (HFC или P6 & P12).

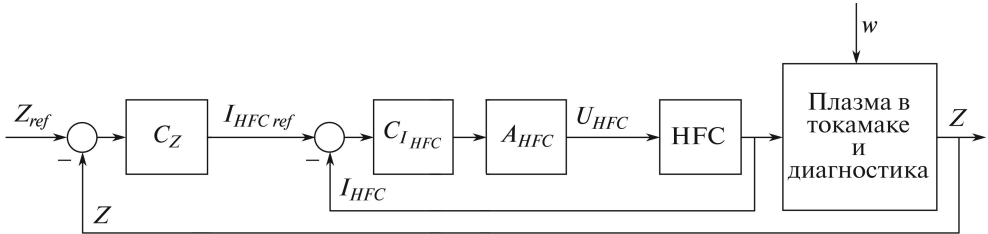


Рис. 7. Структурная схема каскадной системы управления током в катушке HFC и P6 & P12 и вертикальным положением плазмы:  $C_Z$  – ПИД-регулятор вертикального положения плазмы,  $C_{I_{HFC}}$  – ПД-регулятор тока в катушке горизонтального поля,  $A_{HFC}$  – модель многофазного тиристорного выпрямителя, HFC – катушка горизонтального поля (HFC или P6 & P12).

Как было сказано в разделе 2, решение задачи синтеза ПИД-регулятора с передаточной функцией (4) методом ЛМИ осуществляется посредством минимизации модуля статической чувствительности замкнутой системы при ограничениях, наложенных на  $H_\infty$ -нормы передаточных функций замкнутой системы.

Для сведения этой задачи к виду системы линейных матричных неравенств необходимо осуществить переход от передаточных функций замкнутой системы к частотным передаточным функциям этой системы,

$$s \longrightarrow j\omega, \quad W(s) \longrightarrow W(j\omega),$$

а далее к набору значений этих частотных передаточных функций на выбранном частотном диапазоне  $\omega_k \in [\omega_1, \omega_N]$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,

$$W(j\omega) \longrightarrow W(j\omega_k) = W_k.$$

Потом на основе определений  $H_\infty$ -нормы матричной функции и спектральной нормы матрицы

$$\|W(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \sigma_{\max}(W(j\omega)) \longrightarrow \|W_k\|_2 = \sigma_{\max}(W_k), \quad k = 1, \dots, N,$$



где  $\sigma_{\max}$  – максимальное сингулярное число матрицы, сингулярные числа матрицы  $G$  вычисляются по формулам

$$\sigma_i = +\sqrt{\lambda_i(G^H G)} = +\sqrt{\lambda_i(G G^H)},$$

$\lambda_i$  – собственные значения матрицы,  $G^H$  – комплексно-сопряженное транспонирование матрицы  $G$ , происходит переход от задачи на ограничение  $H_\infty$ -норм передаточных функций к задаче на ограничение набора спектральных норм (модулей в скалярном случае) значений этих передаточных функций на выбранных частотах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \| (P(0)K_I)^{-1} \|_2, \\ \text{s.t. } \|S(s)\|_\infty \leq S_{\max}, \\ \|T(s)\|_\infty \leq T_{\max}, \\ \|Q(s)\|_\infty \leq Q_{\max}, \\ \|R(s)\|_\infty \leq R_{\max} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \min \| (P(0)K_I)^{-1} \|_2, \\ \text{s.t. } \|S_k\|_2 \leq S_{\max}, \\ \|T_k\|_2 \leq T_{\max}, \\ \|Q_k\|_2 \leq Q_{\max}, \\ \|R_k\|_2 \leq R_{\max}. \end{array} \right.$$

Значение частотной передаточной функции ПИД-регулятора на частоте  $\omega_k$  при этом будет иметь вид

$$C_k = K_P + \frac{1}{j\omega_k} K_I + \frac{j\omega_k}{1 + \tau j\omega_k} K_D.$$

Используя лемму [30] для сведения задачи на ограничение спектральной нормы матрицы к виду матричного неравенства

$$\|M\|_2 \leq \gamma \iff M^H M \preceq \gamma^2 I,$$

можно сформулировать задачу синтеза ПИД-регулятора в виде системы матричных неравенств. На примере значения дополнительной функции чувствительности на частоте  $\omega_k$  данный переход выглядит так:

$$\begin{aligned} & \|T_k\|_2 \leq T_{\max} \iff \\ & \iff (I + P_k^H C_k^H)^{-1} C_k^H P_k^H P_k C_k (I + P_k C_k)^{-1} \preceq T_{\max}^2 I \iff \\ & \iff (I + P_k C_k)^H (I + P_k C_k) \succeq (1/T_{\max}^2) (P_k C_k)^H (P_k C_k). \end{aligned}$$

Таким образом, задача синтеза ПИД-регулятора сводится к решению следующей системы квадратичных матричных неравенств:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \mu, \\ \text{s.t. } (P(0)K_I)^H (P(0)K_I) \succeq \mu^2 I, \\ (I + P_k C_k)^H (I + P_k C_k) \succeq (1/S_{\max}^2) I, \\ (I + P_k C_k)^H (I + P_k C_k) \succeq (1/T_{\max}^2) (P_k C_k)^H (P_k C_k), \\ (I + P_k C_k)^H (I + P_k C_k) \succeq (1/Q_{\max}^2) C_k^H C_k, \\ (I + P_k C_k) (I + P_k C_k)^H \succeq (1/R_{\max}^2) P_k P_k^H, \end{array} \right.$$

где  $P_k = P(j\omega_k)$ ,  $P_k \in \mathbb{C}^{q \times m}$  – значение частотной передаточной функции модели объекта на частоте  $\omega_k$ ,  $C_k$  – значение частотной передаточной функции ПИД-регулятора на частоте  $\omega_k$ ,  $\mu$  – скаляр, посредством максимизации которого решается задача минимизация спектральной нормы матрицы статической чувствительности  $(P(0)K_I)^{-1}$ . Систему (5) необходимо решить для каждой частоты  $\omega_k \in [\omega_1, \omega_N]$  из выбранного частотного интервала. Таким образом, требуется решить систему из  $4N + 1$  неравенств. Матричные неравенства в системе не являются линейными относительно неизвестных параметров регулятора, более того, левая часть неравенств не является выпуклой, ее необходимо свести к системе LMI посредством выпукло-вогнутой процедуры (convex-concave procedure) [31]. Выпукло-вогнутая процедура – эвристический метод, используемый в этой работе для поиска локальных решений системы (5) путем итеративного решения эквивалентной системы LMI, которая получается введением дополнительной матрицы  $\tilde{Z}$ :

$$\begin{aligned} Z^H Z &\succeq Y^H Y, \\ (Z - \tilde{Z})^H (Z - \tilde{Z}) &= Z^H \tilde{Z} + \tilde{Z}^H Z - \tilde{Z}^H \tilde{Z} \succeq 0, \\ Z^H Z &\succeq (Z - \tilde{Z})^H (Z - \tilde{Z}) \succeq Y^H Y. \end{aligned}$$

Используя лемму о дополнении по Шуру [22, 30], можно получить линейное матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} Z^H \tilde{Z} + \tilde{Z}^H Z - \tilde{Z}^H \tilde{Z} & Y^H \\ Y & I \end{bmatrix} \succeq 0.$$

На примере квадратичного матричного неравенства для дополнительной функции чувствительности из (5) данный переход к LMI выглядит так:

$$Z_k^H Z_k \succeq Y_k^H Y_k \iff \begin{bmatrix} Z_k^H \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_k^H Z_k - \tilde{Z}_k^H \tilde{Z}_k & Y_k^H \\ Y_k & I \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$Z_k = (I + P_k C_k), \quad Y_k = (1/T_{\max}) (P_k C_k), \quad \tilde{Z}_k = (I + P_k C_k^{\text{curr}}),$$

где  $C_k^{\text{curr}}$  – значение частотной передаточной функции регулятора на частоте  $\omega_k$ , которое соответствует локальному оптимальному решению (5), полученному на предыдущей итерации выпукло-вогнутой процедуры. Аналогичное преобразование необходимо провести для каждого квадратичного матричного неравенства в (5).

Таким образом, выпукло-вогнутая процедура используется для нахождения локальных оптимальных значений  $\mu$  в (5), приближаясь при каждой итерации к глобальному оптимальному значению  $\mu_{\max}$ .

Решение системы LMI с помощью выпукло-вогнутой процедуры проводилось на компьютере MacBook Pro с процессором Intel Core i7-4850HQ в среде MATLAB с использованием пакета CVX и решателя систем линейных

матричных неравенств SDPT3. Сначала настраивается ПД-регулятор тока в катушках HFC/P6 & P12, а затем ПИД-регулятор вертикального положения плазмы. Решение проводилось на 500 частотах из частотного диапазона от  $10^{-3}$  рад/с до  $10^3$  рад/с, таким образом для каждого регулятора решалась система, состоящая из  $4 \cdot 500 + 1 = 2001$  матричных неравенств. При синтезе ПД-регулятора тока в катушках HFC/P6 & P12 решение было найдено за 5 итераций и заняло 86 с, а при синтезе ПИД-регулятора вертикального положения плазмы — за 7 итераций и заняло 143 с.

## 7. Математическое моделирование систем управления положением плазмы

При моделировании синтезированных систем управления вертикальным положением плазмы в вектор состояний  $x$  модели объекта вида (1) вводились возмущения посредством подачи импульсного воздействия  $w$  на вход модели через матрицу  $B_1$ , имитирующие всплески вертикального положения плазмы, вызываемые различными неустойчивостями и малыми срывами (сбросами давления плазмы и ее внутренней индуктивности).

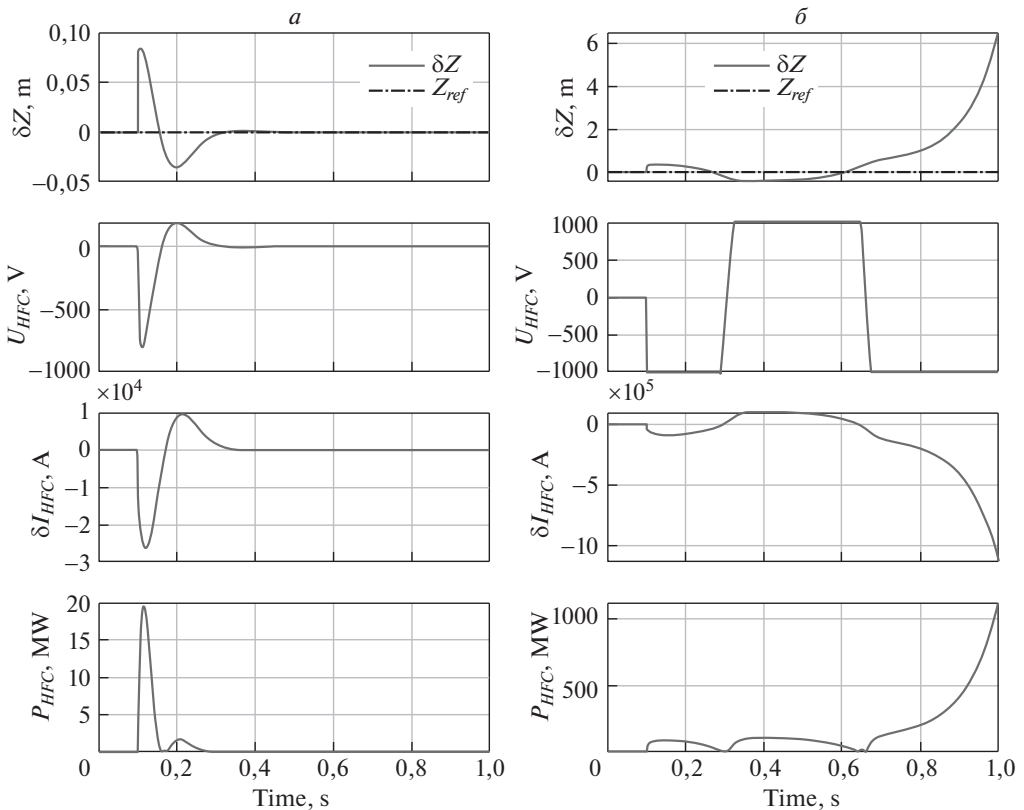


Рис. 8. Работа  $H_\infty$ -системы управления с управляющей катушкой HFC, расположенной вблизи вакуумной камеры, при смещении по вертикали с амплитудой:  $a$  – 8 см,  $b$  – 31 см.

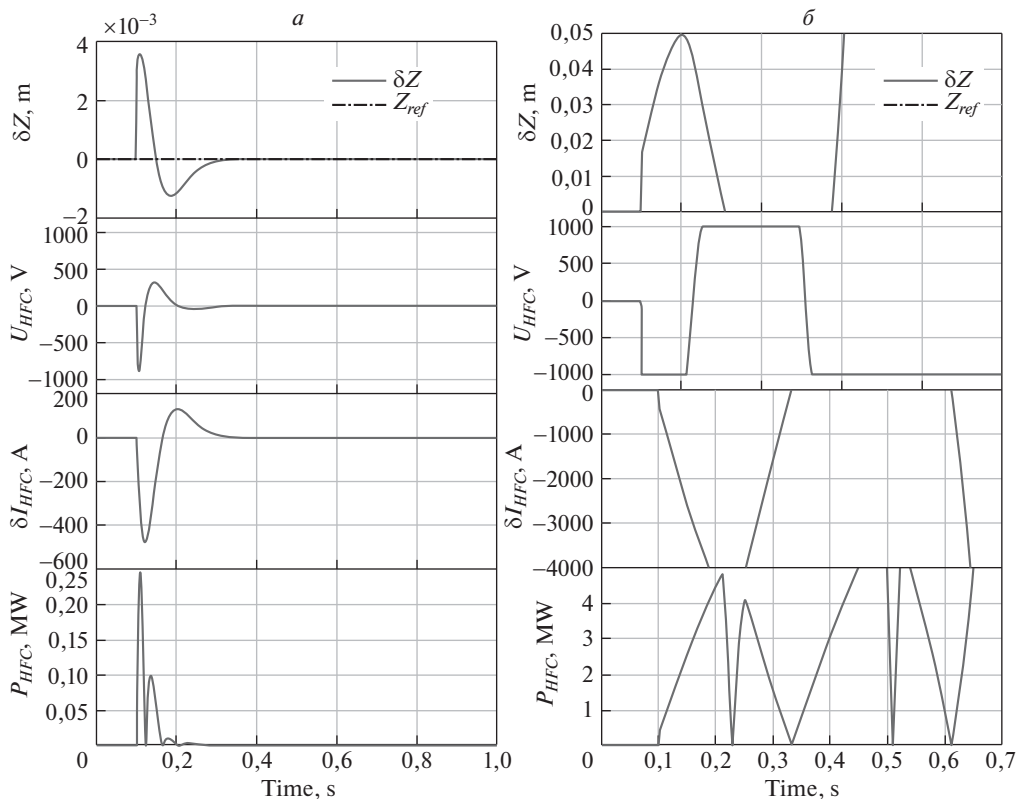


Рис. 9. Работа  $H_\infty$ -системы управления с управляющими катушками P6 & P12, расположенной вблизи вакуумной камеры, при смещении по вертикали с амплитудой: а – 3 мм, б – 15,42 мм.

### 7.1. $H_\infty$ -система управления

Модели вертикального положения плазмы в токамаке ИГНИТОР с управляющими катушками P6 & P12 и катушкой HFC, расположенной вблизи камеры, масштабированы по входу и выходу с коэффициентами 1000 В и 0,1 м соответственно. Для них синтезированы  $H_\infty$ -регуляторы с весовыми функциями:  $W_1 = 10$  для P6 & P12,  $W_1(s) = s^{-1}(0,3s + 20)$  для HFC.

Приведены результаты для смещений относительно малой амплитуды, когда система не достигает ограничений и функционирует в линейном режиме, а также для смещения предельно большого значения, при котором система, еще сохраняя устойчивость, достигает ограничений на управляющие сигналы и показывает заметно нелинейное поведение.

На рис. 8 приведены результаты моделирования  $H_\infty$ -системы управления с управляющей катушкой HFC, расположенной вблизи вакуумной камеры, при смещении по вертикали с различными значениями. На рис. 9 приведены результаты моделирования  $H_\infty$ -системы управления с управляющими катушками P6 & P12. На рис. 8,б и рис. 9,б приведены графики вертикального смещения плазмы, напряжения, тока и мощности на управляющих катушках

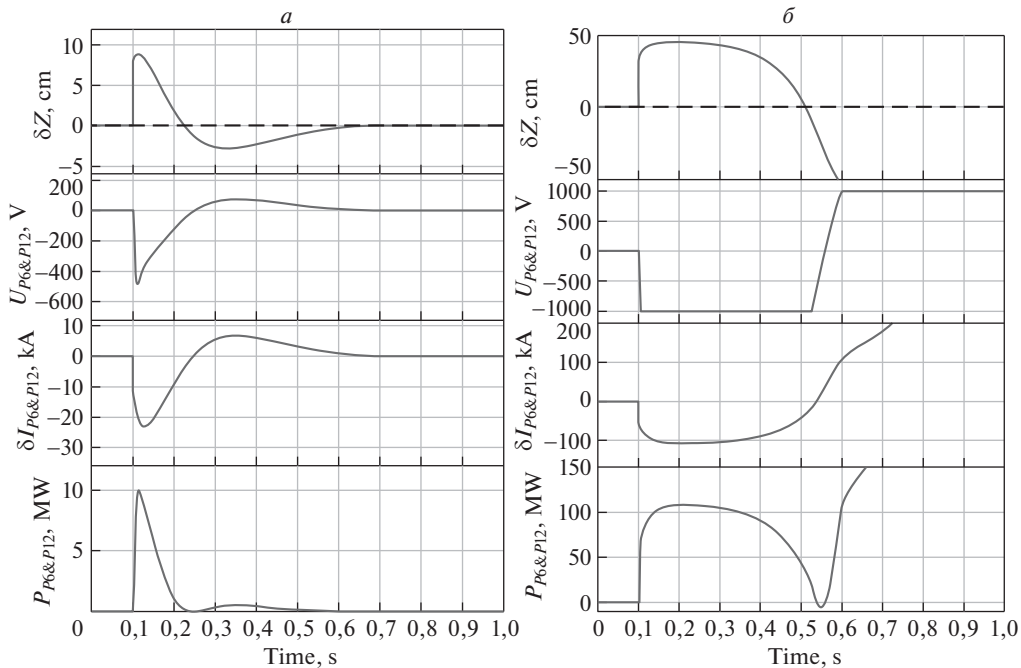


Рис. 10. Работа системы управления с управляющей катушкой HFC, расположенной вблизи вакуумной камеры, при смещении по вертикали с амплитудой: *a* – 8 см, *б* – 36 см.

HFC и P6 & P12 соответственно для величин возмущений, при которых системы теряют устойчивость. Система с катушкой HFC парирует возмущение, сохраняя устойчивость, при смещениях по вертикали амплитудой до 30 см; система с катушкой P6 & P12 — при смещениях амплитудой до 1,5 см.

## 7.2. LMI система управления

Было проведено моделирование синтезированных методом LMI систем управления при смещениях по вертикали различной амплитуды. Результаты моделирования для системы с управляющей катушкой HFC показаны на рис. 10. В этом случае система может обрабатывать вертикальные смещения положения плазмы амплитудой до 8 см (рис. 10,*a*), не выходя при этом за установленный предел мощности в 10 МВт, при смещениях большей амплитуды система выходит за предел мощности 10 МВт, хотя и обрабатывает сме-

**Таблица 1.** Результаты моделирования систем с катушками HFC и P6 & P12

| Катушки                          | HFC  |      |      | P6 & P12 |      |      |
|----------------------------------|------|------|------|----------|------|------|
| $\delta Z_{\max}$ , мм           | 80   | 200  | 300  | 3,5      | 6    | 42   |
| $\delta I_{\text{HFC max}}$ , кА | 26   | 56,5 | 82,6 | 0,48     | 0,74 | 4,26 |
| $P_{\text{HFC max}}$ , МВт       | 18,6 | 56,8 | 89,3 | 0,25     | 0,56 | 4,1  |

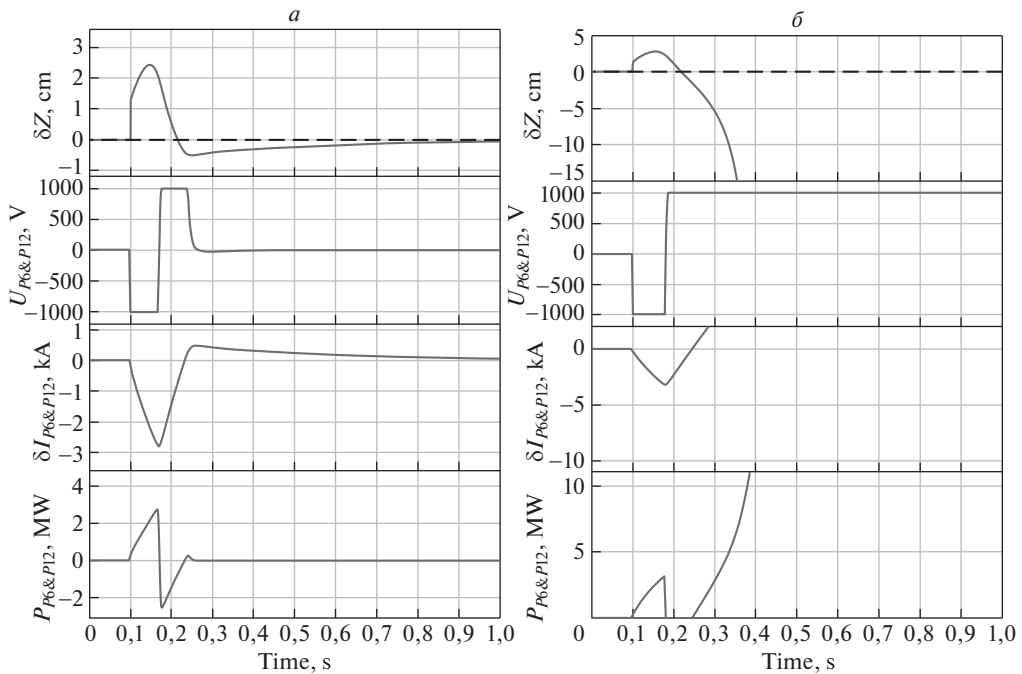


Рис. 11. Работа системы управления с управляющей катушкой P6 & P12 при смещении по вертикали с амплитудой: *a* – 16 мм, *б* – 17 мм.

нения в пределах области управляемости. Система теряет устойчивость при смещениях с амплитудой более 35 см, на рис. 10, *б* видно, что при смещении с амплитудой 36 см система теряет устойчивость. Поскольку расстояние между плазмой и верхней стенкой вакуумной камеры в рассматриваемом сценарии составляет около 5 см, катушка HFC позволяет парировать все смещения, изначально не подразумевающие соприкосновение плазмы с камерой.

Результаты моделирования конфигурации токамака ИГНИТОР с управляющей парой катушек P6 & P12 показаны на рис. 11: в этом случае система теряет устойчивость при смещениях с амплитудой более 1,6 см. На рис. 11, *б* приведена работа системы при смещении 1,7 см, теряющей при этом устойчивость. На рис. 11, *а* приведена работа системы при смещении 1,6 см без потери устойчивости, максимальная мощность при этом составляет 2,8 МВт.

В табл. 2 приведены предельные значения сигналов, когда система управления сохраняет устойчивость при координатном возмущении по вертикали.

**Таблица 2.** Результаты моделирования систем с катушками HFC и P6 & P12

| Катушки                          | HFC  |      |     | P6 & P12 |
|----------------------------------|------|------|-----|----------|
| $\delta Z_{\max}$ , мм           | 87   | 219  | 430 | 24       |
| $\delta I_{\text{HFC max}}$ , кА | 22   | 56,4 | 102 | 2,8      |
| $P_{\text{HFC max}}$ , МВт       | 9,97 | 56,4 | 102 | 2,78     |

## 8. Заключение

В работе были синтезированы линейные неустойчивые модели плазмы в токамаке ИГНИТОР, которые позволили вычислить области управляемости плазмы по вертикали при ограниченном напряжении на двух видах катушек горизонтального поля НФС и PF6&PF12, а также синтезированы робастные системы управления вертикальным положением плазмы методами  $H_\infty$ -оптимизации и LMI.

В результате математического моделирования в среде MATLAB/Simulink было установлено, что построенные методом  $H_\infty$ -оптимизации системы управления способны парировать смещения плазмы по вертикали амплитудой не более 1,5 см для управляющей пары катушек PF6&PF12 и не более 30 см для расположенной вблизи камеры управляющей катушки НФС, а системы, построенные методом LMI, — не более 1,6 см и не более 35 см соответственно.

Поскольку нет гарантий, что в токамаке ИГНИТОР не будет вертикальных смещений с амплитудой более 1,6 см, авторы предлагают добавить катушку НФС в полоидальную систему токамака ИГНИТОР между вакуумной камерой и катушкой тороидального поля (рис. 3,б). Катушка НФС позволит создать область управляемости, превосходящую возможный диапазон движения плазмы по вертикали ( $\pm 5$  см), что обеспечит парирование системой управления вертикальным положением плазмы малых срывов и значительно повысит надежность всей системы управления положением, током и формой плазмы в токамаке ИГНИТОР.

Авторы благодарят сотрудников АО «ГНЦ РФ ТРИНИТИ» д-ра физ.-мат. наук Родионова Н.Б. и канд. физ.-мат. наук Докуку В.Н. за полезные обсуждения и предоставленные данные токамака ИГНИТОР.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wesson J.* Tokamaks, 4 ed. Clarendon Press: Oxford, 2004.
2. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Кузнецов Е.А., Коростелев А.Я.* Методы и системы магнитного управления плазмой в токамаках. 1-е изд. М.: КРАСАНД, 2020.
3. *Ariola M., Pironti A.* Magnetic Control of Tokamak Plasmas. Springer Int. Publishing, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-29890-0>.
4. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control (2nd ed.). Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2005.
5. *Митришкин Ю.В., Коренев П.С., Прохоров А.А.* Управление плазмой в токамаках. Ч. 1 // Проблемы управления. 2018. № 1. С. 2–20.
6. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Павлова Е.А.* Управление плазмой в Токамаках. Ч. 2 // Проблемы управления. 2018. № 2. С. 2–30.
7. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Коньков А.Е.* Управление плазмой в токамаках. Ч. 3.1 // Проблемы управления. 2019. № 3. С. 3–15.
8. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.М., Коньков А.Е.* Управление плазмой токамаках. Ч. 3.2 // Проблемы управления. 2019. № 4. С. 15–26.

9. *Villone F., Albanese R., Ambrosino G. et al.* Strategies for the plasma position and shape control in Ignitor // *Fusion Engin. Design*. V. 82. No. 5. P. 1036–1044.
10. *Докука В.Н., Гостев А.А., Хайрутдинов Р.Р.* Расчет наводимых напряжений в обмотках полоидального поля токамака ИГНИТОР в процессе срыва плазмы по вертикали // *ВАНТ. Термоядерный синтез*. 2018. Т. 41. Вып. 3. С. 93–104.
11. *Mitrishkin Y.V., Korenev P.S., Konkov A.E.* New horizontal and vertical field coils with optimised location for robust decentralized plasma position control in the IGNITOR tokamak // *Fusion Engin. Design*. 2022. V. 174. 112993. P. 1–20. DOI:10.1016/j.fusengdes.2021.112993.
12. *Бутковский А.Г.* Фазовые портреты управляемых динамических систем. М.: Наука, 1985.
13. *McFarlane D., Glover K.* Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description / *Lecture Notes in Control Inform. Sci*. V. 138. Springer-Verlag, 1989.
14. *McFarlane D., Glover K.* A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1992. V. 37. No. 6. P. 759–769.
15. *Boyd S., Hast M., Astrom K.J.* MIMO PID tuning via iterated LMI restriction // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2016. V. 26. No. 8. P. 1718–1731. <https://doi.org/10.1002/rnc.3376>.
16. *Stein G.* Respect the Unstable // *IEEE Control Systems*. 2003. V. 23. No. 4. P. 12–25.
17. *Humphreys D.A., Casper T., Eidietis N., Ferrara M., et al.* Experimental vertical stability studies for ITER performance and design // *Nuclear Fusion*. 2009. V. 49. No. 11. P. 115003. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/49/11/115003>.
18. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
19. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами // Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976.
20. *Polyak B.T.* Optimization and control: mutual connections. Optimization Without Borders Sirius. Online presentation. July 12, 2021.
21. *Glover K., McFarlane D.* Robust stabilization of normalize coprime factor plant descriptions with  $H_\infty$  bounded uncertainty // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1989. No. 8. P. 821–830.
22. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
23. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems // *IEEE Trans. Autom. Control*. No. 8. P. 831–847.
24. *Wang L.* PID Control System Design and Automatic Tuning using MATLAB/Simulink. JohnWiley & Sons Ltd, 2020.
25. *Филлипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
26. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.С., Зенков С.М.* Стабилизация неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаке Т-15. Часть I // *АиТ*. 2014. № 2. С. 129–145.
27. *Митришкин Ю.В., Карцев Н.С., Зенков С.М.* Стабилизация неустойчивого вертикального положения плазмы в токамаке Т-15. Часть II // *АиТ*. 2014. № 9. С. 31–44.



28. *Mitrishkin Y.V., Pavlova E.A., Kuznetsov E.A.* Continuous, saturation, and discontinuous tokamak plasma vertical position control systems // Fusion Engin. Design. 2016. V. 108. P. 35–47. <https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2016.04.026>.
29. *Konkov A.E., Mitrishkin Y.V., Korenev P.S.* Robust Cascade LMI Design of MIMO Control System for Plasma Position, Current, and Shape Model with Time-Varying Parameters in a Tokamak // IFAC-PapersOnLine. 2020. V. 53. No. 2. P. 7344–7349.
30. *Duan G., Yu H.* LMIs in Control Systems. Analysis, Design and Applications // CRC Press. 2013.
31. *Lipp T., Boyd S.* Variations and Extensions of the Convex-Concave Procedure // Optim. Engin. 2014. V. 17. No. 2. P. 263–287.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 08.10.2021

После доработки 22.12.2021

Принята к публикации 30.12.2021