

Управление в технических системах

© 2022 г. Н.В. ГРИГОРЬЕВ, канд. физ.-мат. наук (lab76@lii.ru)
(Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова, Жуковский)

ПЛАНИРОВАНИЕ ТЕСТОВЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОМАТИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ С УЧЕТОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ АПРИОРНЫХ ДАННЫХ

Предлагается метод планирования тестовых сигналов для идентификации аэродинамических характеристик автоматически управляемых летательных аппаратов, учитывающий возможные ошибки в априорных оценках аэродинамических характеристик и неопределенность начальных условий тестового маневра. Данный метод может быть востребован в задачах планирования тестовых сигналов с ограничениями на допустимые возмущения вектора состояния летательного аппарата в тестовом маневре.

Ключевые слова: аэродинамические характеристики, планирование тестовых сигналов, параметрическая идентификация, автоматическое управление, численные методы решения экстремальных задач.

DOI: 10.31857/S0005231022040079, EDN: AAYFNX

1. Введение

Идентификация аэродинамических характеристик (АДХ) летательного аппарата (ЛА) с системой автоматического управления (САУ) представляет собой сложную задачу, поскольку функционирование САУ увеличивает взаимовлияние составляющих вектора состояния ЛА, тем самым ухудшая точность оценивания АДХ. Повысить точность оценивания АДХ возможно выполнением тест-маневра — специально возмущенного движения ЛА. Выбор возмущенного движения осуществляется в рамках так называемой задачи планирования тестовых входных сигналов (тест-сигналов) [1–12]. В отличие от пилотируемых ЛА, на которых применяются достаточно простые тест-сигналы — те, что могут быть воспроизведены летчиком, — тест-сигнал для автоматически управляемых ЛА может быть сложной функцией времени. При прочих равных условиях расширение множества допустимых тест-сигналов должно способствовать улучшению информативности возмущенного движения. В то же время задача планирования тест-сигнала (создание возмущенного движения) и задача стабилизации движения (одна из задач, решаемых САУ) антагонистичны. Это противоречие разрешается путем назначения разнообразных ограничений как на саму возможность выполнения

тест-маневра при определенных условиях полета, так и на допустимые (по возможностям САУ) возмущения вектора состояния ЛА в тест-маневре.

В ряде важных приложений задачи планирования тест-сигналов учет ограничений на допустимые возмущения вектора состояния ЛА в тест-маневре является необходимым условием выполнения тест-маневра. При нарушении этих ограничений тест-маневр не выполняется. Выполнение ограничений нужно обеспечить априори — в условиях, когда АДХ и начальные условия тест-маневра при выборе тест-сигнала известны приближенно. Известные постановки задачи планирования (например, [1–12]) эту особенность не учитывают. Ниже излагается возможный подход к решению данной задачи.

2. Постановка задачи

Предлагаемая математическая постановка задачи планирования тест-сигнала содержит модель динамики объекта на тестовом режиме длительностью T секунд, описываемую линейным (линеаризованным относительно опорного движения ЛА) дифференциальным уравнением

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = Ax + Gu, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0,$$

и модель дискретных измерений с постоянным шагом по времени Δ_t :

$$(2) \quad z_i = z(t_i) = Hx(t_i) + v_i, \quad t_i = \Delta_t(i - 1), \quad i = \overline{1, N},$$

где: x — n -мерный вектор состояния ЛА; $u = u(t)$ — оптимизируемый вектор тестовых сигналов размерности m ; z_i — p -мерный вектор измерений; v_i — вектор белых гауссовых шумов измерений, $E(v_i) = 0$, $E(v_i v_j^T) = 0$, $i \neq j$, $E(v_i v_i^T) = R$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$ (E — символ математического ожидания); A , G , H — матрицы соответствующих размерностей, N — количество измерений. Матрицы A , G зависят от подлежащего идентификации вектора неизвестных параметров b (искомых АДХ) размерности k . Истинные значения $b^{\text{ист}}$ параметров b не известны. Априорная оценка $b^{\text{апр}}$ вектора $b^{\text{ист}}$ содержит ошибку Δb , $b^{\text{апр}} = b^{\text{ист}} + \Delta b$, относительно которой известно, что компоненты Δb_i вектора Δb принадлежат интервалам $[-\Delta_i, \Delta_i]$: $\Delta b_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$, $i = \overline{1, k}$. Множество возможных значений b обозначим символом B .

Будем предполагать, что движение ЛА перед началом тест-маневра должно быть квазистационарным. Это означает, что перед началом тест-маневра компоненты вектора x близки к нулю, а сигналы, подаваемые на органы аэродинамического управления, близки к управляющим сигналам, генерируемым САУ. Поскольку при этом квазистационарное движение ЛА может все же несколько отличаться от программного, относительно которого получено уравнение (1), истинные значения $x_0^{\text{ист}}$ начальных условий x_0 тест-маневра могут отличаться от нулевых значений. Будем считать, что $x_0^{\text{ист}}$ принадлежит замкнутому ограниченному множеству X^0 , содержащему нулевой вектор. Возможные значения векторов x_0 и b будем считать независимыми друг от друга.

Требуется выбором на интервале $[0, T]$ кусочно-непрерывной вектор-функции $u(t)$:

1) обеспечить выполнение скалярных линейных ограничений на вектор состояния ЛА при всех априори возможных значениях b и x_0 .

$$(3) \quad L_s(x(t, b, x_0, u)) \leq q_s(t), \quad b \in B, \quad x_0 \in X^0, \quad s = \overline{1, r},$$

где $q_s(t)$ – заданные функции, $L_s(x)$ – линейные функции аргумента, r – количество ограничений;

2) минимизировать по управлению u функционал

$$(4) \quad J = tr(W\bar{M}^{-1}(u)),$$

где tr – обозначение следа матрицы, W – неотрицательно определенная матрица весов (как правило, диагональная), \bar{M} – осредненная информационная матрица:

$$(5) \quad \bar{M} = \iint_{B \times X^0} M(b, x_0, u) P(b) P(x_0) db dx_0,$$

$$(6) \quad M(b, x_0, u) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial x(b, x_0, u)}{\partial b} \right)^T Q \left(\frac{\partial x(b, x_0, u)}{\partial b} \right).$$

Подынтегральные функции $P(b)$, $P(x_0)$ – плотности распределения векторов b , x_0 на множествах B и X^0 соответственно. Производные в (6) вычисляются на решениях системы (1), вычисленных при значениях векторов $b \in B$, $x_0 \in X^0$. Матрица $Q = H^T R^{-1} H$.

Поясним постановку задачи и ее отличия от традиционных постановок с критериями оптимизации в виде функций от информационной или от дисперсионной матрицы (см., например, [1–9]).

1. В традиционных постановках задачи осредненная информационная матрица в (4) задается в виде $\bar{M}(u) = M(b^{\text{апр}}, x_0 = 0, u)$. Таким образом, оптимизируемый критерий в традиционной постановке не учитывает возможного отличия истинных значений аэродинамических характеристик $b^{\text{ист}}$ от их априорной оценки $b^{\text{апр}}$. Оптимизация критерия только при $b^{\text{апр}}$ объясняется тем (см., например, [1]), что при дополнительных предположениях о близости векторов $b^{\text{ист}}$ и $b^{\text{апр}}$ и справедливости равенства $E(b) = b^{\text{апр}}$ можно считать, что матрица $M(b^{\text{апр}}, x_0 = 0, u) \approx E(M(b, x_0 = 0, u))$ на множестве B . Между тем неопределенность априорных оценок АДХ может составлять 20 и более процентов от их априорной оценки $b^{\text{апр}}$, и предположение о близости векторов $b^{\text{ист}}$ и $b^{\text{апр}}$ может не выполняться. Возможное отличие вектора $x_0^{\text{ист}}$ от нулевого в традиционных постановках задачи игнорируется. Таким образом, критерий (4), учитывающий все многообразие возможных значений векторов $b^{\text{ист}}$, $x_0^{\text{ист}}$, является обобщением традиционно используемого критерия.

2. Ограничения на вектор состояния ЛА $x(t, b, x_0, u)$ в традиционных постановках задачи также рассматриваются только при $b = b^{\text{апр}}$, $x_0 = 0$. Следовательно, при отличии вектора $b^{\text{ист}}$ от $b^{\text{апр}}$ и вектора $x_0^{\text{ист}}$ от нулевого эти

ограничения в общем случае будут в полете нарушены, а значит, тест-маневр не будет выполнен. Вероятность такого нарушения велика, так как оптимум в задачах планирования тест-сигналов часто достигается на границах множества допустимых управлений, определяемого ограничениями на вектор x .

3. В предлагаемую постановку задачи введены функции $P(b)$ и $P(x_0)$ — плотности априорных распределений вероятностей значений параметров b и начальных условий x_0 на множествах B и X^0 соответственно. Как правило, определение априорных оценок АДХ (в аэродинамических трубах) не сопровождается оценкой вероятностей тех или иных значений внутри интервалов $[-\Delta_i, \Delta_i]$. Соответственно, нет никаких оснований считать одни значения указанных оценок внутри данных интервалов предпочтительнее других значений. В таких случаях закон распределений априорных оценок на интервалах $[-\Delta_i, \Delta_i]$ предлагается считать равномерным. То же самое можно сказать и о законе распределения вектора x_0 .

В общем случае предлагается принять $P(b) = \frac{1}{V_B}$, $P(x_0) = \frac{1}{V_{X^0}}$, где V_B и V_{X^0} — объемы множеств B и X^0 соответственно.

Введение функций плотностей вероятностей $P(b)$ и $P(x_0)$ в постановку задачи дает дополнительные возможности исследовать влияние тех или иных возможных вероятностных распределений векторов b и x_0 на решение задачи оптимизации (3)–(4).

4. Результат оптимизации в традиционных постановках принято оценивать одним числом — значением оптимизируемого критерия в точке оптимума. Например, значение критерия $J_{\text{апр}} = \text{tr}(M^{-1}(b^{\text{апр}}, x_0 = 0, u))$ интерпретируется в соответствии с неравенством Рао-Крамера [13] как нижняя граница суммы дисперсий оценок идентификации (если истинные значения $b^{\text{ист}}$ и $x_0^{\text{ист}}$ действительно равны $b^{\text{апр}}$ и нулю соответственно).

В предлагаемой постановке результат решения задачи оптимизации (3)–(4) предлагается характеризовать полигоном частот [13] значений функции $J^E(b, x_0) = \text{tr}(M^{-1}(b, x_0, u))$, вычисленных на оптимальном тест-сигнале для множества значений $b \in B$, $x_0 \in X^0$. Значение функции $J^E(b, x_0)$ также характеризует нижнюю границу суммы дисперсий оценок идентификации при $b^{\text{ист}} = b$, $x_0^{\text{ист}} = x_0$. В дальнейшем для краткости будем называть значение функции $J^E(b, x_0)$, вычисленное на оптимальном тест-сигнале, ожидаемой (при $b^{\text{ист}} = b$, $x_0^{\text{ист}} = x_0$) погрешностью идентификации, предполагая, что послеполетная процедура идентификации гарантирует получение эффективных [13] оценок АДХ. (Следует заметить, что в действительности погрешность послеполетной идентификации может существенно превосходить нижнюю границу Рао-Крамера [14].)

Полигон частот строится следующим образом [13]. В соответствии с распределениями $P(b)$ и $P(x_0)$ определим достаточно большое число N_P пар векторов b и x_0 , $b \in B$, $x_0 \in X^0$. Для каждой такой пары вычислим значение функции $J^E(b, x_0) = \text{tr}(M^{-1}(b, x_0, u))$ и определим наибольшее $J_{\text{max}}^E(b, x_0)$ и наименьшее $J_{\text{min}}^E(b, x_0)$ значения. Интервал $[J_{\text{min}}^E(b, x_0), J_{\text{max}}^E(b, x_0)]$ разобьем на L_P непересекающихся подынтервалов. На каждом таком подынтер-

вале построим столбец гистограммы высотой, равной количеству значений функции $J^E(b, x_0)$, попавших в этот подынтервал, отнесенных к величине N_P . Полигон частот представляет собой ломаную, соединяющую середины верхних линий столбцов гистограммы. Параметр L_P выбирается так же, как и при построении гистограмм (см., например, [15]). Величина параметра N_P выбирается из условия, что дальнейшее ее увеличение не приводит к изменению полигона.

При малых затратах расчетного времени полигон частот представляет собой удобную для анализа интегральную характеристику качества тест-сигнала, позволяющую оценить вероятности получения тех или иных значений ожидаемой погрешности идентификации параметров. Аналогичным образом могут быть построены полигоны частот ожидаемой погрешности идентификации отдельных компонент вектора b .

При симметричных ограничениях на компоненты вектора состояния ЛА в тест-маневре необходимым условием существования решения задачи (3)–(4) является условие принадлежности тривиального решения $u(t) \equiv 0$ внутренности множества, определяемого ограничениями (3).

3. Метод решения

Аппроксимируем искомое управление рядом:

$$(7) \quad u_j(t) \approx u_j^C(t) = \sum_{i=1}^{n_u} C_{i+(j-1)*n_u} F_i(t), \quad j = \overline{1, m},$$

где $F_i(t)$, $i = \overline{1, n_u}$ — заданные на интервале $[0, T]$ базисные функции времени, n_u — количество базисных функций $F_i(t)$ (параметр метода), C_i , $i = \overline{1, mn_u}$ — константы, подлежащие определению. В качестве базисных функций $F_i(t)$ могут быть выбраны, например, гармоники [2, 5, 16, 17], импульсы различной формы [9] и т.п. Выбор функций $F_i(t)$ достаточно подробно обсуждается в [2, 9]. Величина параметра n_u выбирается в общем случае из условия отсутствия значимых изменений полигона частот ожидаемой погрешности идентификации при дальнейшем увеличении данной величины.

При заданных векторах b , x_0 любое решение системы (1) с входным сигналом (7) может быть представлено в виде суммы $x^{F_i}(t, b)$ — частных решений системы (1) с входными сигналами $F_i(t)$ и нулевыми начальными условиями плюс произведение фундаментальной матрицы $\Phi(t, b)$ на вектор начальных условий:

$$(8) \quad x(t) = \Phi(t, b) x_0 + \sum_{i=1}^{mn_u} C_i x^{F_i}(t, b) = \varphi(t, b, x_0) + \sum_{i=1}^{mn_u} C_i x^{F_i}(t, b).$$

Чтобы избежать ресурсоемкого вычисления многомерного интеграла в (5), воспользуемся его оценкой — выборочным средним:

$$(9) \quad \hat{M} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K M(b^j, x_0^j, C),$$

где $b^j \in B$, $x_0^j \in X^0$, $j = \overline{1, K}$ — выборка пар векторов возможных значений неизвестных параметров и начальных условий в соответствии с функциями $P(b)$, $P(x_0)$, C — mn_u -мерный вектор, $C = \{C_1, \dots, C_{mn_u}\}$, K — объем выборки (параметр метода). В общем случае объем выборки K , репрезентативно представляющей множества B и X^0 , выбирается так, чтобы его дальнейшее увеличение не приводило к изменению полигона относительных частот ожидаемой погрешности идентификации.

Каждая информационная матрица $M(b, x_0, C)$ в (9) с учетом выражения (8) может быть представлена в следующем виде:

$$(10) \quad M(b, x_0, C) = S^{0T} Q S^0 + \sum_{i=1}^{mn_u} C_i \left[S^{0T} Q S^{F_i} + S^{F_i T} Q S^0 \right] + \\ + \sum_{i,j=1}^{mn_u} C_i C_j S^{F_i T} Q S^{F_j} = M^0 + \sum_{i=1}^{mn_u} C_i M_i^1 + \sum_{i,j=1}^{mn_u} C_i C_j M_{ij}^2,$$

где $M^0 = S^{0T} Q S^0$, $M_i^1 = \left[S^{0T} Q S^{F_i} + S^{F_i T} Q S^0 \right]$, $M_{ij}^2 = S^{F_i T} Q S^{F_j}$, $i, j = \overline{1, mn_u}$ — матрицы, не зависящие от вектора C ; S^0 , S^{F_i} — матрицы, столбцами которых являются функции чувствительности $S_i^0 = \frac{d\varphi(t, b, x_0)}{db_i}$ и $S_j^{F_i} = \frac{dx^{F_i}(t, b)}{db_j}$. Функции чувствительности могут быть получены из решений следующих систем уравнений соответственно:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{dS_i^0}{dt} = A(b)S_i^0 + \frac{\partial A(b)}{\partial b_i} \varphi(t, b, x_0), \\ \frac{d\varphi(t, b, x_0)}{dt} = A(b)\varphi(t, b, x_0), \\ \varphi(0, b, x_0) = x_0, \quad S_i^0(0) = 0; \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dS_j^{F_i}}{dt} = A(b)S_j^{F_i} + \frac{\partial A(b)}{\partial b_j} x(t, b, 0, F_i) + \frac{\partial G(b)}{\partial b_j} F_i, \\ S_j^{F_i}(0) = 0, \quad j = \overline{1, k}, \\ \frac{dx^{F_i}(t, b, 0, F_i)}{dt} = Ax^{F_i}(t, b, 0, F_i) + GF_i, \\ t \in [0, T], \quad x^{F_i}(0, b, 0, F_i) = 0, \quad i = \overline{1, n_u}. \end{cases}$$

С учетом (10) матрица \widehat{M} в (9) также представима в виде

$$(13) \quad \widehat{M}(C) = \overline{M^0} + \sum_{i=1}^{mn_u} C_i \overline{M_i^1} + \sum_{i,j=1}^{mn_u} C_i C_j \overline{M_{ij}^2},$$

где матрицы $\overline{M^0}$, $\overline{M_i^1}$, $\overline{M_{ij}^2}$ — выборочные средние матриц M^0 , M_i^1 , M_{ij}^2 , $i, j = \overline{1, mn_u}$, рассчитанные на ранее указанной выборке векторов b^j , x_0^j , $j = \overline{1, K}$

(определяются аналогично (9)). Важно отметить, что указанные выборочные средние матрицы $\overline{M^0}$, $\overline{M_i^1}$, $\overline{M_{ij}^2}$ можно рассчитать до оптимизации тест-сигнала, что существенно ускоряет как расчет функционала $J^C = \text{tr} \left(W \widehat{M}^{-1} (C) \right) = \text{tr} \left(W \widehat{M}^{-1} (u^C) \right)$, так и его градиента

$$\begin{aligned} \frac{\partial J^C}{\partial C} &= f^M + \overline{M}C, \quad f_i^M = -\text{tr} \left(W \widehat{M}^{-1} \overline{M_i^1} \widehat{M}^{-1} \right), \\ \overline{M}_{ij} &= -2\text{tr} \left(W \widehat{M}^{-1} \overline{M_{ij}^2} \widehat{M}^{-1} \right), \quad i, j = \overline{1, mn_u} \end{aligned}$$

в процессе оптимизации. Возможность вычисления градиента позволяет решать задачи при больших значениях n_u .

Пусть N_C – положительное целое число. Разобьем интервал оптимизации $[0, T]$ точками $t_i = \Delta_C (i - 1)$, $i = \overline{1, N_C}$ на подынтервалы одинаковой длины $\Delta_C = T/(N_C - 1)$. Выберем N_C настолько большим, что при выполнении ограничений

$$(14) \quad \begin{aligned} L_s(x(t_i, b, x_0, u)) &\leq q_s(t_i), \quad t_i = \Delta_C (i - 1), \\ i &= \overline{1, N_C}, \quad b \in B, \quad x_0 \in X^0, \quad s = \overline{1, r}, \end{aligned}$$

ограничения (3) можно считать выполненными при всех $t \in [0, T]$ с достаточной точностью. Как правило, измерения (2) производятся с большой частотой, так что часто можно положить: $N_C = N$, $\Delta_C = \Delta_t$. Ограничения (14) с учетом линейности функций L_s и линейности по вектору C выражений (7) и (8) могут быть преобразованы в линейные по компонентам вектора C неравенства:

$$(15) \quad \tilde{L}_{si}(b)C \leq \tilde{q}_{si}(b, x_0), \quad b \in B, \quad x_0 \in X^0, \quad s = \overline{1, r}, \quad i = \overline{1, N_C},$$

где $\tilde{L}_{si}(b)$ – вектор-строки с компонентами $\tilde{L}_{si}^j(b) = L_s(x^{Pj}(t_i, b))$, $j = \overline{1, mn_u}$, скаляры равны $\tilde{q}_{si}(b, x_0) = q_s(t_i) - L_s(\varphi(t_i, b, x_0))$.

Таким образом, задача (4)–(3) сводится к задаче минимизации по компонентам вектора C критерия

$$(16) \quad J^C(C) = \text{tr} \left(W \widehat{M}^{-1} (C) \right)$$

при линейных ограничениях (15). Изложим метод ее решения при выбранных в (7) базисных функциях $F_i(t)$, $i = \overline{1, n_u}$ и значениях двух основных параметров метода: количества базисных функций n_u в (7) и объема выборки K в (9).

Определим следующую вспомогательную (по отношению к задаче (16)–(15)) задачу. Минимизировать критерий (16) на некотором замкнутом, ограниченном множестве \check{S} векторов C , заданном *конечным* числом линейных относительно вектора C ограничений, и известном градиенте функционала (16). Решение этой стандартной задачи нелинейного программирования может быть найдено методом, изложенным в [18], методом линеаризации [19] и т.п.

Шаг 0. Установим счетчик числа итераций: $iter = 0$. Зададим произвольные $b^0 \in B$, $x_0^0 \in X^0$ (рекомендуется задавать $b^0 = b^{анп}$, $x_0^0 = 0$) и определим множество S^{iter} следующими линейными неравенствами:

$$(17) \quad \tilde{L}_{si}(b^0)C \leq \tilde{q}_{si}(b^0, x_0^0), \quad s = \overline{1, r}, \quad i = \overline{1, N_C}.$$

Шаг 1. Решим определенную выше вспомогательную задачу, в которой $\check{S} = S^{iter}$. Поскольку задача многоэкстремальна, будем решать ее из нескольких начальных точек (т.е. задаваясь несколькими возможными приближениями искомого вектора C), выбираемых, например, случайным образом. Обозначим решение, соответствующее наименьшему значению функционала, через C^{iter} , соответствующий тест-сигнал (7) через $u^{C^{iter}}$.

Шаг 2. Для проверки выполнения ограничений (14) на найденном управлении $u^{C^{iter}}$ для каждого $s = \overline{1, r}$ и $i = \overline{1, N_C}$ определим

$$\max_{b \in B, x_0 \in X^0} L_s \left(x \left(t_i, b, x_0, u^{C^{iter}} \right) \right).$$

Шаг 3. Если при всех $s = \overline{1, r}$, $i = \overline{1, N_C}$ окажется, что

$$\max_{b \in B, x_0 \in X^0} L_s \left(x \left(t_i, b, x_0, u^{C^{iter}} \right) \right) \leq q_s(t_i),$$

то задача (16)–(15) решена — найден тест-сигнал, удовлетворяющий ограничениям (15) и минимизирующий функционал (16) на управлении (7). Далее переход на шаг 5.

Шаг 4. Если при некоторых s^* , i^* окажется, что

$$\max_{b \in B, x_0 \in X^0} L_{s^*} \left(x \left(t_{i^*}, b, x_0, u^{C^{iter}} \right) \right) = L_{s^*} \left(x \left(t_{i^*}, b^*, x_0^*, u^{C^{iter}} \right) \right) > q_{s^*}(t_{i^*}),$$

т.е. ограничения (14) нарушаются, то множество S^{iter} дополним ограничениями $L_{s^*} \left(x \left(t_{i^*}, b^*, x_0^*, u^{C^*} \right) \right) \leq q_{s^*}(t_{i^*})$, приведенными к виду $\tilde{L}_{s^*i^*}(b^*)C \leq \tilde{q}_{s^*i^*}(b^*, x_0^*)$. Полученное таким образом множество снова обозначим через S^{iter} , предварительно положив $iter = iter + 1$. Далее переход на шаг 1.

Шаг 5. Строится полигон частот значений функции $J^E(b, x^0) = tr(WM^{-1}(b, x_0, u^{opt}))$, где $u^{opt} = u^{C^{iter}}$. Способ построения полигона был описан в разделе 2.

Справедливость утверждения, сформулированного при описании шага 3 алгоритма, следует из того, что ограничения (15) на тест-сигнале u^{opt} выполнены, а при продолжении итераций значение минимума критерия (16) не может уменьшиться, так как каждое последующее множество S^{i+1} уже содержится в предыдущем множестве S^i : $S^0 \supset S^1 \supset \dots \supset S^i \supset \dots \supset S$, где S — это множество, определяемое формулами (15).

Далее шаги 1–5 повторяются при несколько больших значениях параметров метода: K и n_u . Рекомендуется поэтапное удвоение их значений до установления формы и положения полигона частот, вначале K , а затем n_u . Если существенного изменения полигона относительных частот нет, то процесс завершается. Первоначально величину n_u рекомендуется задавать порядка десяти, величину K — порядка ста.

4. Результаты тестирования метода

Рассмотрим задачу планирования скалярного ($m = 1$) тест-сигнала $u(t)$ на временном интервале длиной шесть секунд ($T = 6$) в целях идентификации коэффициентов b_1, b_2, b_3, b_4 модели короткопериодического продольного движения самолета [20]

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{w}_z = b_1 w_z + b_2 \Delta\alpha + b_4 \Delta\delta_B, \\ \dot{\Delta\alpha} = w_z + b_3 \Delta\alpha + 0,005 \Delta\delta_B, \end{cases}$$

дополненной моделью привода и обратной связи системы автоматического управления ЛА:

$$(19) \quad \begin{cases} \Delta\dot{\delta}_B = \omega, \\ \dot{\omega} = k(\Delta\delta_B^{\text{зад}} - \Delta\delta_B) - k_2 \omega, \\ \Delta\dot{\delta}_B^{\text{зад}} = k(k_{w_z} w_z + k_\alpha \Delta\alpha + u(t)), \\ k = \frac{0,456}{\tau^2}, \quad k_2 = \frac{0,8}{\tau}, \quad k_{w_z} = 2, \quad k_\alpha = 0,5, \quad \tau = 0,02. \end{cases}$$

В формулах (18) и (19): коэффициенты b_1, b_2, b_3, b_4 — подлежащие идентификации аэродинамические характеристики, характеризующие демпфирование, статическую устойчивость ЛА в продольном канале, производную подъемной силы по углу атаки и эффективность руля высоты соответственно; w_z — угловая скорость вращения самолета относительно центра масс в плоскости симметрии ЛА, $\Delta\alpha$ — отклонение угла атаки от опорного значения, $\Delta\delta_B$ — угловое отклонение руля высоты от опорного значения, ω — угловая скорость отклонения руля высоты, $k, k_2, \tau, k_{w_z}, k_\alpha$ — параметры привода руля высоты и обратной связи САУ, $\Delta\delta_B^{\text{зад}}$ — сигнал, вырабатываемый САУ. Размерность w_z и ω — градус за секунду, $\Delta\alpha, \Delta\delta_B$ — градус. Переменные $w_z, \Delta\alpha, \Delta\delta_B$ независимо измеряются ($p = 3$) с частотой 50 герц ($\Delta_t = 0,02$, $N = 301$), среднеквадратичные погрешности измерений ($\sqrt{R_{ii}}, i = \overline{1, 3}$) составляют около 0,5% от диапазона изменения измеряемой величины.

В обозначениях раздела 2: вектор состояния ЛА $x = (w_z, \Delta\alpha, \Delta\delta_B, \omega)^T, n = 4$; вектор $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T, k = 4$; матрицы $A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 1 & b_4 & 0,005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k k_{w_z} & k k_\alpha & -k & -k_2 \end{pmatrix};$

$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Априорная оценка истинных значений $b^{\text{ист}}$

вектора b : $b^{\text{апр}} = (-1,588, -0,562, 0,737, -1,66)^T$. Независимые погрешности априорных оценок компонент вектора $b^{\text{ист}}$ могут достигать $\pm 20\%$. Таким образом, границы интервалов $[-\Delta_i, \Delta_i]$, определенных в разделе 2, принимались в виде: $\Delta_i = \pm 0,2 |b_i^{\text{апр}}|, i = \overline{1, 4}$. Совокупность возможных значений вектора b определяет параллелепипед с центром в точке $b^{\text{апр}}$ — множество B . Весовая матрица W в критерии (4) принималась единичной.

Тест-маневр должен начинаться из квазистационарного состояния:

$$|\omega_z(0)| \leq 0,5^{0/c}, \quad |\Delta\alpha(0)| \leq 1^0, \quad |\omega(0)| \leq 0,3^{0/c}, \quad |\Delta\delta_B(0) - \Delta\delta_B^{\text{зад}}(0)| \leq 0,1^0.$$

Совокупность возможных значений начальных условий тест-маневра $x_0 = x(0)$ определяет многогранник — множество X^0 . Интервалы $I_5 = \pm 0,5^{0/c}$, $I_6 = \pm 1^0$, $I_7 = \pm 0,3^{0/c}$, $I_8 = \pm 0,1^0$, определяющие возможные значения x_0 , а также допусковые интервалы $I_i = [-\Delta_i, \Delta_i]$, $i = \overline{1,4}$ далее будем называть интервалами априорной неопределенности. Распределение погрешностей на данных интервалах предполагалось равномерным.

На допустимые возмущения каждой из компонент вектора x в тест-маневре накладывались ограничения (в (3) $r = 2 \cdot n$):

$$(20) \quad |\Delta\delta_B(t, b, x_0, u)| \leq 25^0, \quad |\omega(t, b, x_0, u)| \leq 30^{0/c}, \\ |w_z(t, b, x_0, u)| \leq 5^{0/c}, \quad |\Delta\alpha(t, b, x_0, u)| \leq 3^0, \quad b \in B, \quad x_0 \in X^0, \quad t \in [0, 6].$$

Первые два ограничения в (20) отражают физические ограничения скорости движения привода и диапазона отклонения приводом руля высоты, а два оставшихся — ограничения для обеспечения безопасности тест-маневра. При оптимизации тест-сигнала ограничения (20) учитывались дискретно по времени с частотой, равной частоте измерений (т.е. в (14) принималось $\Delta_C = \Delta_t$, $N_C = N$).

Решение определенной таким образом задачи было получено в соответствии с алгоритмом раздела 3. Базисные функции $F_i(t)$ в (7) выбирались в виде единичных прямоугольных импульсов шириной $\Delta_P = 0,04$ с:

$$F_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\Delta_P(i-1), \min(\Delta_P i, T)], \\ 0, & t \notin [\Delta_P(i-1), \min(\Delta_P i, T)], \end{cases} \quad i = \overline{1, n_u}; \\ n_u = 150, \quad F_1(0) = 1, \quad F_{n_u}(t) = 1.$$

Выбор значения n_u , определяющего количество базисных функций, пояснен в конце раздела. В качестве начальных значений b^0 и x_0^0 принимались значения $b^{\text{анр}}$ и $x_0 = 0$. Для вычисления матрицы \widehat{M} в (9) использовалось $K = 400$ случайных пар векторов b^j , x_0^j , $j = \overline{1, K}$, поскольку при $K = 400, 800, 1200$ полигон относительных частот ожидаемой погрешности идентификации практически не изменялся. На шаге 1 каждой итерации алгоритма поиск 150 компонент оптимального вектора C на множестве S^{iter} производился из десяти случайных начальных точек. Решение было получено в результате четырех итераций по уточнению множества ограничений S . На нулевой итерации множество S^0 определялось $N \cdot r = 2408$ ограничениями (20) при $b = b^{\text{анр}}$ и $x_0 = 0$, а на заключительной итерации множество S^{iter} определялось $\sim 110\,000$ линейными ограничениями, рассчитанными для 65 пар векторов b^* , x_0^* (см. шаг 4 в разделе 3) из априори возможных, большинство из которых (не все!) оказались граничными точками интервалов неопределенностей.

На рис. 1 представлены поля значений для каждой компоненты вектора x , вычисленных на оптимизированном тест-сигнале $u^{\text{opt}}(t)$ для 240 различных

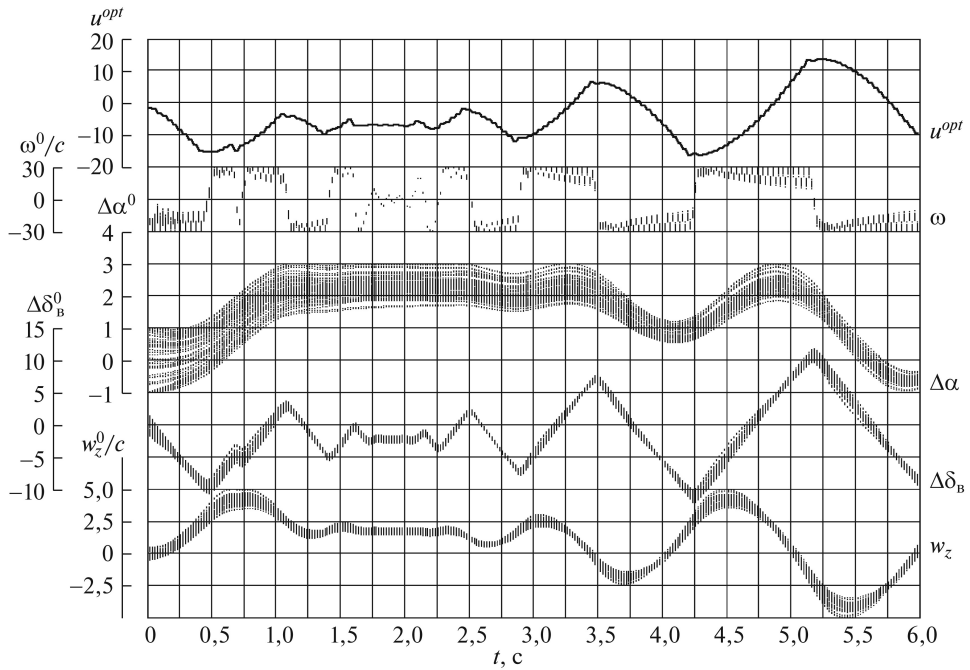


Рис. 1. Поля значений компонент вектора состояния ЛА при различных $b \in B$, $x_0 \in X^0$ на оптимизированном тест-сигнале.

пар b^j , x_0^j из априори возможных (т.е. для 240 возможных решений системы линеаризованных уравнений движения самолета). Вариация значений каждой компоненты вектора x при фиксированном t на графике обусловлена как вариацией начальных условий, так и вариацией всех четырех компонент вектора идентифицируемых параметров b . Из рисунка видно, что все заданные ограничения удовлетворяются (численная проверка выполнения ограничений производилась для 20 000 различных пар b^j , x_0^j).

Для оценки возможных погрешностей идентификации вектора b на оптимизированном тест-сигнале был построен (с использованием вышеописанных распределений на интервалах априорной неопределенности) полигон частот f ожидаемых погрешностей идентификации (рис. 2). Все приведенные в статье полигоны построены при объеме выборок b^j , x_0^j , равном $N_P = 20\,000$ и количестве подынтервалов полигона $L_P = 20$ (см. раздел 2), хотя формы и положения полигонов стабилизировались уже при $N_P \geq 10\,000$.

Из графика рис. 2 следует, что в предположении равномерных независимых распределений векторов b^j , x_0^j распределение значений ожидаемой погрешности идентификации оказывается несимметрично, мода полигона хорошо выражена и заметно меньше медианы, т.е. наиболее вероятные значения погрешности идентификации лежат ближе к минимально возможным значениям. В то же время максимальное значение ожидаемой погрешности в три раза больше, чем минимальное. Это означает, что конечная погреш-

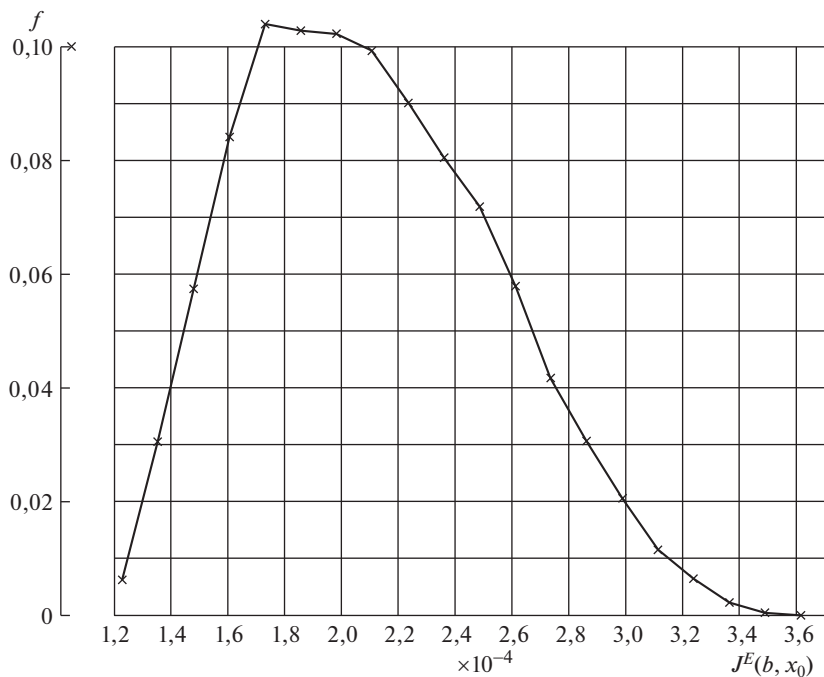


Рис. 2. Полигон частот ожидаемой погрешности идентификации.

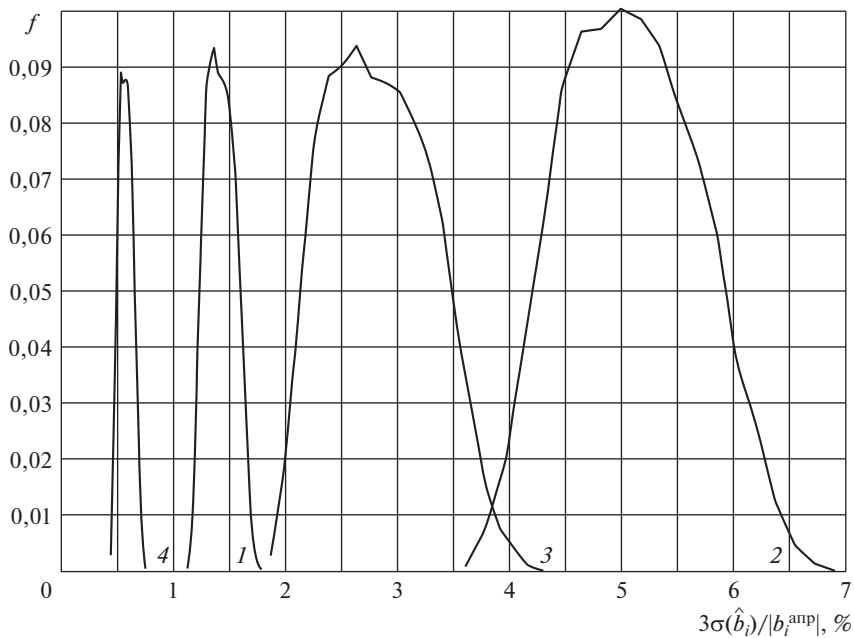


Рис. 3. Полигоны частот ожидаемых погрешностей идентификации компонент b_i , выраженных в процентах отношения $3\sigma(\hat{b}_i)/|b_i^{\text{анп}}|$. Цифра при кривой на графике – номер компоненты.

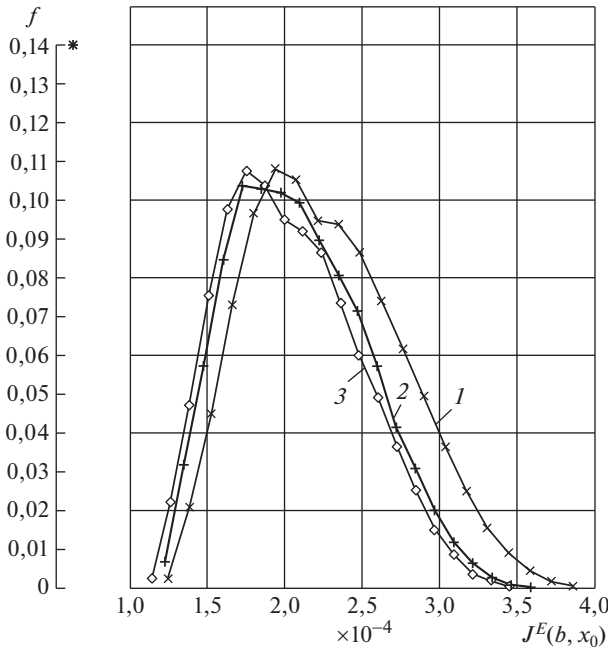


Рис. 4. Полигоны частот ожидаемой погрешности идентификации в зависимости от количества членов аппроксимации: $n_u = 75$ (ломаная 1), $n_u = 150$ (ломаная 2), $n_u = 300$ (ломаная 3).

ность активной идентификации сильно зависит от истинных значений идентифицируемых параметров (т.е. от свойств объекта) и от начальных условий тест-маневра, которые реализуются в полете. Однако вероятность больших значений погрешностей идентификации весьма мала.

На рис. 3 представлены полигоны частот ожидаемой погрешности идентификации каждой компоненты b_i , $i = \overline{1, 4}$, выраженной — для удобства сравнения с априорной погрешностью — в процентах отношения $3\sigma(\hat{b}_i)/|b_i^{\text{апр}}|$, где $\sigma(\hat{b}_i) = \sqrt{M_{ii}^{-1}(b, x_0, u^{\text{opt}})}$.

Видно, что наиболее точно идентифицируется коэффициент b_4 , характеризующий эффективность руля высоты, наименее точно — коэффициент b_2 , характеризующий статическую устойчивость ЛА. Повлиять на точность идентификации того или иного коэффициента можно изменением его «веса» в матрице W . Сопоставление максимальных значений ожидаемых погрешностей идентификации (т.е. максимальных абсцисс каждого полигона: 1,8, 7, 4,3, 0,7%) с 20-процентной априорной погрешностью компонент b_i , $i = \overline{1, 4}$ позволяет сделать вывод о возможности уточнения в летном эксперименте на оптимизированном тест-сигнале u^{opt} каждой из компонент вектора b независимо от неизвестных значений $b^{\text{ист}} \in B$, $x_0^{\text{ист}} \in X^0$.

Аналогичным образом можно оценить возможность уточнения априорной оценки вектора b , предполагая нормальное или иное распределение априорных неопределенностей.

Сравнивая полигоны, можно оптимизировать выбор базисных функций в (7), их количество, веса в матрице W и пр. Для примера на рис. 4 показано изменение полигона при удвоении количества n_u членов аппроксимационного ряда (7).

5. Заключение

В статье рассмотрены постановка и решение задачи планирования тест-сигнала для параметрической идентификации аэродинамических характеристик летательного аппарата с априорной неопределенностью истинных значений аэродинамических характеристик и начальных условий тест-маневра, а также ограничениями на допустимые возмущения вектора состояния летательного аппарата в тест-маневре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касьянов В.А., Ударцев Е.П.* Определение характеристик воздушных судов методами идентификации. М.: Машиностроение, 1988.
2. *Овчаренко В.Н.* Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: Идентификация по полетным данным. М.: ЛЕНАД, 2019.
3. *Чубич В.М., Филиппова Е.В.* Активная параметрическая идентификация стохастических динамических систем на основе планирования эксперимента. Новосибирск: НГТУ, 2019.
4. *Hosseini B., Diepolder J., Holzapfel F.* Online Parameter Estimation and Optimal Input Design // MMSC. 2020. P. 128–139. CEUR-WS.org/vol-2783/paper-09.pdf.
5. *Lichota P.* Multi-Axis Inputs for Identification of a Reconfigurable Fixed-Wing UAV // Aerospace, 2020. 7. doi:10.3390/aerospace7080113.
6. *Licitra G., Burgerc A., Williamsa P., et al.* Optimal Input Design for Autonomous Aircraft // Control Engineering Practice. 2018. V. 77. P. 15–27.
7. *Roeser M.S., Fezans N.* Method for designing multi-input system identification signals using a compact time-frequency representation // CEAS Aeronaut. J. 2021. V. 12. P. 291–306, <https://doi.org/10.1007/s13272-021-00499-6>.
8. *Перельман И.И.* Планирование эксперимента в задачах построения моделей объектов управления // АиТ. 1987. № 9. С. 3–25.
Perel'man I.I. Experimental design in development of process models // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 9. P. 3–25.
9. *Овчаренко В.Н.* Планирование идентифицирующих входных сигналов в линейных динамических системах // АиТ. 2001. № 2. С. 75–87.
Ovcharenko V.N. Planning of Identifying Input Signals in Linear Dynamic Systems // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 2. P. 236–247.
10. *Grauer J.A., Boucher M.* Aircraft system identification from multisine inputs and frequency responses. In: AIAA Scitech 2020 Forum. Orlando, FL, USA (2020). <https://doi.org/10.2514/6.2020-0287>.
11. *Белоконь С.А., Золотухин Ю.Н., Филиппов М.Н.* Метод формирования тестовых сигналов для оценивания аэродинамических параметров летательного аппарата // Автометрия. 2017. Т. 53. № 4. С. 59–65.

12. *Гусев М.И.* Планирование эксперимента в задачах гарантированной идентификации // *АиТ.* 2007. № 11. С. 61–75.
Gusev M.I. Experiment design in guaranteed identification // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 11. P. 1945–1958.
13. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2010.
14. *Пашковский И.М., Леонов В.А., Поплавский Б.К.* Летные испытания самолетов и обработка результатов испытаний. М.: Машиностроение, 1985.
15. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991.
16. *Григорьев Н.В.* Активная идентификация аэродинамических характеристик при ограничениях на вектор состояния летательного аппарата и неопределенности априорных данных // *Авиакосмическая техника и технология.* 1999. № 3. С. 56–60.
17. *Григорьев Н.В., Нестеров В.Е.* Активная идентификация АДХ возвращаемого ракетного блока в летных условиях на масштабируемом демонстраторе // *Авиакосмическая техника и технология.* 2014. № 1. С. 47–56.
18. *Powell M.J.D.* A Tolerant Algorithm for Linearly Constrained Optimization Calculations // *Math. Program.* 1989. No. 45. P. 547–566.
19. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1978.
20. *Gupta N.K., Hall W.E. Jr.* Input Design for Identification of Aircraft Stability and Control Derivatives. NASA CR-2493. 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 03.08.2021

После доработки 15.11.2021

Принята к публикации 20.11.2021