Автоматика и телемеханика, № 4, 2022

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2022 г. **В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)**
(Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж)

СРЕДНИЕ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ И ИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА

Установлены экстремальные свойства средних характеристик систем нечетких чисел относительно некоторых метрик на множестве нечетких чисел. Рассмотрены экстремальные свойства средних для систем дискретных нечетких множеств.

Ключевые слова: нечеткие числа, средние значения, экстремальные свойства.

DOI: 10.31857/S0005231022040092, **EDN:** AAZTDZ

1. Введение

На протяжении последних нескольких десятков лет теория нечетких множеств активно применяется при решении задач нечеткого моделирования и управления (см., например, [1–3]), когда исходные данные являются ненадежными или слабо формализованными.

Одним из базовых разделов теории нечетких множеств является теория нечетких чисел. Отметим, что для многих реальных систем входные и выходные величины в условиях неполной информации могут быть выражены с помощью нечетких чисел.

Известно, какую важную роль играют вещественные средние величины в задаче агрегирования информации, анализе данных, отражая наличие трендов. Такую же важную роль играют средние "нечетких" данных.

Как известно ([4, гл. 1, § 5]), для совокупности n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ их среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ является решением экстремальной задачи $\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i - x)^2 \to \min$ $(x \in \mathrm{R})$. А медиана Me обладает таким экстремальным свойством

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - Me| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_j| \quad (j = 1, \ldots, n).$$

В настоящей статье экстремальные свойства числовых средних распространяются на системы непрерывных нечетких чисел и дискретных нечетких множеств. В разделе 2 рассмотрены экстремальные свойства систем непрерывных нечетких чисел. В этом случае в качестве средних выступают непрерывные нечеткие числа. В разделе 3 рассмотрены экстремальные свойства средних для систем дискретных нечетких множеств и дискретных нечетких чисел. В этом случае в качестве средних значений выступают соответственно дискретные нечеткие множества и дискретные нечеткие числа. В данной статье экстремальные свойства рассматриваются относительно следующих метрик на классе нечетких чисел (и классе нечетких дискретных множеств): расстояния Евклида, расстояния Хэмминга, расстояния относительно уровней в интервальном представлении нечетких чисел. Приведенные в статье результаты представляются новыми.

Нечетким множеством A, заданным на универсальном пространстве X, называют (см. [1, 5]) совокупность упорядоченных пар $(\mu_A(x), x)$, где функция принадлежности $\mu_A(x) : X \to [0,1]$ определяет степень принадлежности $\forall x \in X$ множеству A. Множество $Supp\,(A) = \{x | \mu(x) > 0,\ x \in X\}$ называют носителем нечеткого множества.

Нечетким числом A называют нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел. Нечеткое число называют непрерывным, если оно, дополнительно, удовлетворяет следующим предположениям:

1) носитель нечеткого числа — замкнутое ограниченное (компактное) множество действительных чисел: $Supp\,(A) \subset \mathrm{R}$;

2) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ — выпукла;

3) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ — нормальна, а именно: $\sup\limits_x \mu_A(x) = 1$;

4) функция принадлежности нечеткого числа $\mu_A(x)$ — полунепрерывна сверху.

Совокупность непрерывных нечетких чисел будем обозначать J.

Под дискретным нечетким множеством в данной статье будем понимать нечеткое множество, носитель которого состоит из конечного набора элементов дискретного универсума, а под дискретным нечетким числом — нечеткое число, носитель которого состоит из конечного набора вещественных чисел.

2. Экстремальные свойства систем непрерывных нечетких чисел

Рассмотрим экстремальные свойства систем нечетких чисел относительно их функций принадлежностей.

Пусть вещественные числа $\beta_i \in \mathrm{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ таковы, что $\beta_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Выпуклой комбинацией нечетких чисел $\tilde{z}_i$ $i = 1, \ldots, n$, с функциями принадлежности $\mu_i(x)$ называют нечеткое число $\tilde{z}_{co}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{co}(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_i(x). \tag{1}$$

Как известно, расстояние Евклида между нечеткими числами A и B с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ определяется равенством

$$d_E(A,B) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_A(x) - \mu_B(x))^2 \, dx \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Уточним, что интегрирование в формуле (2) фактически производится по ограниченному множеству $Supp\,(A \cup B)$. Оказывается, что справедлива теорема 1.

Теорема 1. Для заданных нечетких чисел $\tilde{z}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ с функциями принадлежности $\mu_i(x)$ их выпуклая комбинация $\tilde{z}_{co}$ является решением экстремальной задачи $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i d_E^2(\tilde{z}_i, \tilde{w}) \to \min$ $(\tilde{w} \in J)$, причем единственным.

Доказательство. Пусть $\tilde{w} \in J$, $\eta(x)$ – функция принадлежности $\tilde{w}$, а $\mu_{co}(x)$ – функция принадлежности $\tilde{z}_{co}$. Фиксируем i и рассмотрим выражение

$$(\mu_i(x) - \eta(x))^2 = (\mu_i(x) - \mu_{co}(x) + \mu_{co}(x) - \eta(x))^2 =$$
$$= (\mu_i(x) - \mu_{co}(x))^2 + (\mu_{co}(x) - \eta(x))^2 + 2(\mu_i(x) - \mu_{co}(x))(\mu_{co}(x) - \eta(x)).$$

Умножим обе части полученного равенства на β_i и просуммируем их по i от единицы до n. Тогда при каждом $x \in (-\infty, +\infty)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mu_i(x) - \eta(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mu_i(x) - \mu_{co}(x))^2 +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \right) (\mu_{co}(x) - \eta(x))^2 + 2(\mu_{co}(x) - \eta(x)) \sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mu_i(x) - \mu_{co}(x)).$$

При этом в последнем слагаемом

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i (\mu_i(x) - \mu_{co}(x)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_i(x) - \mu_{co}(x) \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 0$$

по определению (1) функции $\mu_{co}(x)$ и в силу равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Тогда, интегрируя полученный результат по x, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_i(x) - \eta(x)) dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_i(x) - \mu_{co}(x))^2 dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu_{co}(x) - \eta(x))^2 dx,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i d_E^2(\tilde z_i,\tilde w)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i d_E^2(\tilde z_i,\tilde z_{co})+d_E^2(\tilde z_{co},\tilde w).$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим совокупность возрастающих по включению n нечетких чисел $\tilde z_1,\ldots,\tilde z_n$ с функциями принадлежности $\mu_1(x),\ldots,\mu_n(x)$ соответственно, т.е. выполнены включения $Supp\,(\tilde z_1)\subseteq\ldots\subseteq Supp\,(\tilde z_n)$ и справедливы неравенства $\mu_1(x)<\ldots<\mu_n(x)$ $(\forall x\in Supp\,(\tilde z_1))$.

Срединное значение в этом ряду обозначим $\mu_{\text{сред}}(x)$, а соответствующее ему нечеткое число $\tilde z_{\text{сред}}$ назовем квазимедианой. В случае нечетного $n=2m-1$ срединное значение совпадает с $\mu_m(x)$, а в случае четного $n=2m$ в качестве срединного значения положим $(\mu_m(x)+\mu_{m+1}(x))/2$.

Как известно, расстояние Хэмминга между нечеткими числами A и B с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ определяется равенством

$$d_H(A,B)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mu_A(x)-\mu_B(x)|dx. \tag{3}$$

Оказывается, что справедливо утверждение 1.

Утверждение 1. *Для заданной системы возрастающих нечетких чисел $\tilde z_1,\ldots,\tilde z_n$ с функциями принадлежности $\mu_1(x)<\ldots<\mu_n(x)$ квазимедиана $\tilde z_{\text{сред}}$ обладает следующим экстремальным свойством* $\sum\limits_{i=1}^{n} d_H(\tilde z_i,\tilde z_{сред})\le$ $\le\sum\limits_{i=1}^{n} d_H(\tilde z_i,\tilde z_j)$ $(\forall j=1,\ldots,n)$.

Действительно, поскольку при каждом $x\in Supp\,(\tilde z_1)$ срединное значение $\mu_{\text{сред}}(x)$ является медианой системы чисел $\mu_1(x),\ldots,\mu_n(x)$, то

$$\sum_{i=1}^{n}|\mu_i(x)-\mu_{\text{сред}}(x)|\le\sum_{i=1}^{n}|\mu_i(x)-\mu_j(x)|\quad(j=1,\ldots,n).$$

Интегрируя обе части этого соотношения по x, в силу (3) получим утверждение 1.

Рассмотрим экстремальные свойства систем непрерывных нечетких чисел, используя их интервальное представление.

Как известно, интервал α-уровня нечеткого числа $\tilde z$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde z}(x)$ определяется соотношением $Z_\alpha=\{x|\mu_{\tilde z}(x)\ge\alpha\}$ $(\alpha\in(0,1])$, $Z_0=Supp\,(\tilde z)$.

Согласно предположениям 1–4 на непрерывные нечеткие числа все интервалы α-уровня нечеткого числа $\tilde z$ — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую границу α-интервала через $z^-(\alpha)$, а правую — $z^+(\alpha)$, таким образом, $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Иногда $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют соответственно левым и правым индексами нечеткого числа.

Для нечетких чисел $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ с α-интервалами $[z_i^-(\alpha), z_i^+(\alpha)]$ $(i = 1, 2)$ под суммой понимается нечеткое число $\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2$ с α-интервалами $[z_1^-(\alpha) + z_2^-(\alpha), z_1^+(\alpha) + z_2^+(\alpha)]$. А умножение на положительное число означает умножение индексов на это число. Равенство между нечеткими числами понимается как равенство всех соответствующих α-интервалов.

Предположения 1–4 обеспечивают следующие свойства индексов: функция $z^-(\alpha)$ $(z^+(\alpha))$ ограничена, не убывает (не возрастает), непрерывна слева на $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Для двух нечетких чисел $\tilde{z}_1$ и $\tilde{z}_2$ зададим расстояние $r_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ между ними формулой из [6]:

$$r_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \left(\int_0^1 (z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha))^2 + (z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha))^2 d\alpha \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Здесь $z_i^-(\alpha)$, $z_i^+(\alpha)$ — α-индексы нечетких чисел $\tilde{z}_i$ $(i = 1, 2)$.

Пусть заданы вещественные числа $\beta_i \in \mathrm{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что $\beta_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Рассмотрим взвешенное нечеткое среднее нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$:

$$\tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{z}_i. \tag{5}$$

Среднее такого рода используется в статистике нечетких данных [7, 8].

Обозначим через $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ левые и соответственно правые индексы нечетких чисел $\tilde{z}_i$ в формуле (5).

Лемма. Индексы взвешенного нечеткого среднего (5) *определяются равенствами* $z_{\text{ср}}^-(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i z_i^-(\alpha)$, $z_{\text{ср}}^+(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+(\alpha)$.

Это следует из определения арифметических действий над нечеткими числами в интервальной форме. Оказывается, что взвешенное нечеткое среднее (5) есть решение экстремальной задачи, связанной с метрикой (4), а именно: справедлива теорема 2.

Теорема 2. Нечеткое среднее (5) *является единственным решением следующей экстремальной задачи* $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i r_2^2(\tilde{z}_i, \tilde{w}) \to \min$ $(\forall \tilde{w} \in J)$.

Здесь метрика r_2 задается формулой (4), а J – совокупность всех непрерывных нечетких чисел, обладающих свойствами 1–4.

Доказательство. Фиксируем i и $\alpha \in (0, 1]$. Аргумент α в нижеследующих формулах писать не будем, имея его в виду по умолчанию. Рассмотрим равенство

$$\begin{gathered}(z_i^- - w^-)^2 + (z_i^+ - w^+)^2 = \\ = (z_i^- - z_{\text{ср}}^-)^2 + (z_{\text{ср}}^- - w^-)^2 + 2(z_i^- - z_{\text{ср}}^-)(z_{\text{ср}}^- - w^-) + \\ + (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+)^2 + (z_{\text{ср}}^+ - w^+)^2 + 2(z_i^+ - z_{\text{ср}}^+)(z_{\text{ср}}^+ - w^+).\end{gathered}$$

Умножим обе его части на β_i и просуммируем по i обе части полученного соотношения. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left((z_i^- - w^-)^2 + (z_i^+ - w^+)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left((z_i^- - z_{\text{ср}}^-)^2 + (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+)^2\right) +$$

$$+ \left((z_{\text{ср}}^- - w^-)^2 + (z_{\text{ср}}^+ - w^+)^2\right) \sum_{i=1}^{n} \beta_i +$$

$$+ 2\left(z_{\text{ср}}^- - w^-\right) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(z_i^- - z_{\text{ср}}^-\right) + 2\left(z_{\text{ср}}^+ - w^+\right) \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(z_i^+ - z_{\text{ср}}^+\right).$$

Заметим, что согласно условию $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ и в силу леммы 1 справедливы равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^- - z_{\text{ср}}^-) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i z_i^- - z_{\text{ср}}^- \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i z_i^+ - z_{\text{ср}}^+ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \left((z_i^- - w^-)^2 + (z_i^+ - w^+)^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left((z_i^- - z_{\text{ср}}^-)^2 + (z_i^+ - z_{\text{ср}}^+)^2\right) + (z_{\text{ср}}^- - w^-)^2 + (z_{\text{ср}}^+ - w^+)^2.$$

Отсюда после интегрирования по $\alpha \in [0, 1]$ получим тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i r_2^2(\tilde{z}, \tilde{w}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i r_2^2(\tilde{z}, \tilde{z}_{\text{ср}}) + r_2^2(\tilde{z}_{\text{ср}}, \tilde{w}),$$

из которого следует теорема 2. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. Нечеткое среднее $\hat{z}_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{z}_i$ *является единственным решением экстремальной задачи* $\sum\limits_{i=1}^{n} r_2^2(\tilde{z}_i, \tilde{w}) \to \min \ (\forall \tilde{w} \in J)$.

Этот результат является обобщением классического характеристического экстремального свойства среднего арифметического [4, гл. I].

3. Средние систем дискретных нечетких множеств и их экстремальные свойства

Далее рассмотрим дискретные аналоги предыдущих утверждений.

Пусть X – универсальное пространство. Рассмотрим совокупность дискретных нечетких множеств $\tilde{Z}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, характеризуемых парами $(\mu_k(x_i), x_i)$, где $x_i \in X$ $(i = 1, \ldots, N)$ – конечный набор элементов универсального пространства, а $\mu_k(x_i)$ – их степени принадлежности (значения функций принадлежности $\mu_k(x)$). Дискретное нечеткое множество $\tilde{Z}_k$ иногда записывают в виде $\tilde{Z}_k = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_k(x_i)/x_i$.

Пусть заданы вещественные числа $\beta_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, такие что $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = 1$. Определим выпуклую комбинацию дискретных нечетких множеств $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_n$ как дискретное нечеткое множество

$$\tilde{Z}_{co} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{co}(x_i)/x_i, \quad \mu_{co}(x_i) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu_k(x_i) \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{6}$$

Выпуклая комбинация дискретных нечетких множеств (взвешенное среднее) используется для описания лингвистических переменных: существенно, типично и т.п.

Как известно, расстояние Евклида между дискретными нечеткими множествами $\tilde{Z}_1$ и $\tilde{Z}_2$ задается формулой

$$d_E(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = \left(\sum_{i=1}^{N} (\mu_1(x_i) - \mu_2(x_i))^2 \right)^{1/2} \quad (x_i \in X). \tag{7}$$

Пусть $\beta_k \geq 0$ – заданные числа (веса), такие что $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = 1$. Для системы нечетких дискретных множеств $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_n$ рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k d_E^2(\tilde{Z}_k, \tilde{W}) \to \min\,. \tag{8}$$

Здесь минимум берется по всем дискретным нечетким множествам вида $\tilde{W} = \sum\limits_{i=1}^{N} \eta(x_i)/x_i$ с функциями принадлежности $\eta(x)$, для которых определены степени принадлежностей $\eta(x_i)$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Оказывается, что справедлива теорема 3.

Т е о р е м а 3. *Для заданной системы дискретных нечетких множеств $\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_n$ их выпуклая комбинация $\tilde{Z}_{co}$ является решением экстремальной задачи* (8)*, причем единственным.*

Доказательство. Пусть

$$\tilde{W} = \sum_{i=1}^{N} \eta(x_i)/x_i \quad (x_i \in X,\ i = 1, \ldots, N).$$

Рассмотрим равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\mu_k(x_i) - \eta(x_i)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\mu_k(x_i) - \mu_{co}(x_i) + \mu_{co}(x_i) - \eta(x_i)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\mu_k(x_i) - \mu_{co}(x_i)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\mu_{co}(x_i) - \eta(x_i)\right)^2 +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\mu_k(x_i) - \mu_{co}(x_i)\right) \left(\mu_{co}(x_i) - \eta(x_i)\right).$$

Здесь второе слагаемое в правой части равно

$$\sum_{i=1}^{N} (\mu_{co}(x_i) - \eta(x_i))^2 \sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{i=1}^{N} (\mu_{co}(x_i) - \eta(x_i))^2,$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = 1$.

Покажем, что последнее слагаемое в правой части обращается в ноль. Действительно, оно равно

$$2 \sum_{i=1}^{N} (\mu_{co}(x_i) - \eta(x_i)) \sum_{k=1}^{n} \beta_k (\mu_k(x_i) - \mu_{co}(x_i)),$$

при этом для каждого i справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k (\mu_k(x_i) - \mu_{co}(x_i)) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu_k(x_i) - \mu_{co}(x_i) \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

Последнее выражение равно нулю по определению (6) $\mu_{co}(x_i)$. Так что справедливо представление

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\mu_k(x_i) - \eta(x_i)\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\mu_k(x_i) - \mu_{co}(x_i)\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} \left(\mu_{co}(x_i) - \eta(x_i)\right)^2 .$$

Меняя здесь в двойных суммах порядок суммирования, согласно (7) получим

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k d_E^2(\tilde{Z}_k, \tilde{W}) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k d_E^2(\tilde{Z}_k, \tilde{Z}_{co}) + d_E^2(\tilde{Z}_{co}, \tilde{W}),$$

что обеспечивает утверждение теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Определим медиану системы дискретных нечетких множеств $\tilde{Z}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Для этого каждому i поставим в соответствие медиану Me_i числовой совокупности $\{\mu_k(x_i)\}$ при $k = 1, \ldots, n$. Нечеткое дискретное множество — нечеткую медиану $\tilde{Z}_{Me}$ системы дискретных нечетких чисел $\tilde{Z}_k$ — определим как совокупность пар (Me_i, x_i). Близкое (но не аналогичное) определение используется, например, в [8, гл. 7].

Как известно, расстояние Хэмминга между нечеткими дискретными множествами $\tilde{Z}_1 = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_1(x_i)/x_i$ и $\tilde{Z}_2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_2(x_i)/x_i$ определяется формулой

$$d_H(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) = \sum_{i=1}^{N} |\mu_1(x_i) - \mu_2(x_i)|. \tag{9}$$

Оказывается, что справедлива теорема 4.

Теорема 4. Нечеткая медиана обладает следующим экстремальным свойством:

$$\sum_{k=1}^{n} d_H(\tilde{Z}_k, \tilde{Z}_{Me}) \leq \sum_{k=1}^{n} d_H(\tilde{Z}_k, \tilde{Z}_j) \ \ (j = 1, \ldots, N).$$

Доказательство. По свойству числовой медианы Me_i при каждом $i = 1, \ldots, N$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu_k(x_i) - Me_i| \leq \sum_{k=1}^{n} |\mu_k(x_i) - \mu_j(x_i)| \ \ (\forall j = 1, \ldots, N).$$

Суммируя обе части этого неравенства по $i = 1, \ldots, N$, а затем меняя порядок суммирования, согласно (9) получим требуемый факт.

Отметим, что определение медианы из [8] таким свойством не обладает.

Далее будем рассматривать дискретные нечеткие числа, а именно: такие нечеткие числа, носитель которых состоит из конечного набора вещественных чисел. Для системы дискретных нечетких чисел $\tilde{z}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, принимающих вещественные значения x_i $(i = 1, \ldots, N)$ с функциями принадлежностей $\mu_k(x)$, аналогично предыдущему определяются выпуклая комбинация $\tilde{z}_{co}$ и медиана $\tilde{z}_{Me}$. Ясно, что для таких систем дискретных нечетких чисел справедливы аналоги теорем 3 и 4.

Определим еще дискретное нечеткое среднее $\tilde{z}_{\text{ср}}$ системы дискретных нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ формулой

$$(10) \qquad \tilde{z}_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{N} \mu_{\text{ср}}(x_i)/x_i, \quad \mu_{\text{ср}}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_k(x_i) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Такого рода среднее возникает при обработке экспертной информации ([8 гл. 7]).

Из теоремы 3 в случае $\beta_k = 1/n$ $(k = 1, \dots, n)$ вытекает следствие 2.

Следствие 2. *Среднее* (10) *является решением экстремальной задачи*

$$\sum_{k=1}^{n} d_E^2(\tilde{z}_k, \tilde{w}) \to \min .$$

Здесь минимум берется по всем дискретным нечетким числам вида $\tilde{w} = \sum\limits_{i=1}^{N} \eta(x_i)/x_i$ *с функциями принадлежности* $\eta(x)$, *для которых определены степени принадлежностей* $\eta(x_i)$ $(i = 1, \dots, N)$.

Под средним значением дискретного нечеткого числа $\tilde{z} = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu(x_i)/x_i$ будем понимать вещественное число

$$(11) \qquad M(\tilde{z}) = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu(x_i) \Big/ \sum_{i=1}^{N} \mu(x_i).$$

Оказывается, что справедливо утверждение 2.

Утверждение 2. *Среднее значение* (11) *дискретного нечеткого числа* $\tilde{z}$ *является единственным решением экстремальной задачи* $\delta(y) = \sum\limits_{i=1}^{N} (y - x_i)^2 \mu(x_i) \to \min$ $(\forall y \in R)$.

Действительно, производная функции $\delta(y)$ равна $\delta'(y) = 2\sum\limits_{i=1}^{N} (y - x_i)\mu(x_i)$. Отсюда $\delta'(y) = 0$, когда $y = M(\tilde{z})$. При этом вторая производная $\delta''(y) = 2\sum\limits_{i=1}^{N} \mu(x_i) > 0$. Поэтому утверждение 2 следует из критерия экстремума дифференцируемой функции $\delta(y)$.

Пример. Оценка (по пятибалльной шкале) четырьмя экспертами уровня привлекательности некоторого проекта представлена в таблице.

Здесь $\mu_k(x)$ – функции принадлежности дискретных нечетких чисел $\tilde{z}_k$ $(k = 1, \dots, 4)$, характеризуемых парами $(\mu_k(x_i), x_i)$, где $x_i = i$ $(i = 1, \dots, 5)$. В соответствии с (10) формула для нечеткого среднего имеет вид $\bar{z}_{\text{ср}} = \frac{0{,}6}{4}/1 + \frac{1}{4}/2 + \frac{1{,}2}{4}/3 + \frac{0{,}6}{4}/4 + \frac{0{,}6}{4}/5$. Тогда его среднее значение (11) $M(\bar{z}_{\text{ср}}) =$

Таблица

	Очень низкий = 1	Низкий = 2	Средний = 3	Высокий = 4	Очень высокий = 5
μ_1	0,6	0,3	0,1	0	0
μ_2	0	0,7	0,2	0,1	0
μ_3	0	0	0,7	0,2	0,1
μ_4	0	0	0,2	0,3	0,5

$= (1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}15 + 5 \cdot 0{,}15)/(0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}15) = 2{,}9$.

В заданных условиях нечеткая медиана $\tilde{z}_{Me}$ определяется по формуле $\tilde{z}_{Me} = 0/1 + 0{,}15/2 + 0{,}2/3 + 0{,}15/4 + 0{,}05/5$. При этом среднее значение (11) от нечеткой медианы $M(\tilde{z}_{Me}) = (2 \cdot 0{,}15 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}15 + 5 \cdot 0{,}05)/(0{,}15 + 0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}05) = 1{,}75/0{,}55 \approx 3{,}18$.

Поясним: чтобы посчитать медиану по каждому столбцу, автор статьи расставлял его элементы в возрастающем порядке. При этом в силу четного числа экспертов автор считал медиану как полусумму центральных членов.

Какой вывод сделать об уровне привлекательности проекта — по средним значениям (2,9) или по медианам (3,18), — должно сделать лицо, принимающее решение (ЛПР).

4. Заключение

В настоящей статье устанавливаются экстремальные свойства (в смысле минимизации некоторых расстояний) средних характеристик систем непрерывных нечетких чисел и систем дискретных нечетких множеств. В качестве таких характеристик в данной статье рассматриваются нечеткие средние двух видов: аналоги средних арифметических и медиан.

Подчеркнем, что экстремальные свойства являются важнейшими характеристиками средних. Иногда сами средние определяются как решения некоторых экстремальных задач [4].

Несмотря на значительное число публикаций, посвященных средним нечетких чисел и их систем (см., например, [7–12]), приведенные в настоящей статье утверждения ранее не отмечались.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: Бином, 2015.
2. *Аверкин А.Н. и др.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
3. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.
4. *Джини К.* Средние величины. М.: Статистика, 1970.
5. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.

6. *Diamond P., Kloeden P.* Metric Spaces of Fuzzy Sets // Fuzzy Sets and Systems. 1990. V. 35. Iss. 2. P. 241–249.
7. *De la Rosa de Saa S., Gil M.A., Gonsalez-Rodrigues G., Lopez M.T., Lubiano M.A.* Fuzzy Rating Scale-based Questionnaires and Their Statistical Analysis // IEEE Trans. Fuzzy Systems. 2015. V. 23. P. 111–126.
8. *Nguyen H.T., Wu B.* Fundamentals of statistics with fuzzy data. Berlin: Springer, 2006.
9. *Dubois D., Prade H.* The Mean Value of Fuzzy Number // Fuzzy Sets and Systems. 1987. V. 24. P. 279–300.
10. *Fuller R., Majlender P.* On Weighted Possibilistic Mean Value and Variance of Fuzzy Numbers // Fuzzy Sets and Systems. 2003. V. 136. P. 363–374.
11. *Calvo T., Mesiar R.* Generalized Median // Fuzzy Sets and Systems. 2001. V. 124. P. 59–61.
12. *Calvo T., Mesiar R.* Criteria Importances in Median-like Aggregation // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. 2001. V. 9. P. 662–666.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.Е. Пальчуновым.

Поступила в редакцию 06.02.2021

После доработки 08.12.2021

Принята к публикации 30.12.2021