© 2022 г. С.А. ГАХ (svetagah@inbox.ru),
О.В. ХАМИСОВ, д-р физ.-мат. наук (khamisov@isem.irk.ru),
С.П. ПОДКОВАЛЬНИКОВ, д-р. техн. наук (spodkovalnikov@isem.irk.ru)
(Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск)

ДВОЙСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Статья посвящена двойственному анализу модели ОРИРЭС (оптимизация развития и режимов электроэнергетической системы). Для этого строится двойственная модель, позволяющая провести более глубокий анализ развития генерирующих мощностей и сети, чем прямая модель. При этом используется существенно более широкий набор двойственных переменных и соотношений.

Ключевые слова: развитие и функционирование электроэнергетической системы, линейное программирование, двойственная задача, анализ двойственных соотношений, узловые цены.

DOI: 10.31857/S000523102205004X, **EDN:** ABKGLX

1. Введение

В ИСЭМ СО РАН разработана оптимизационная линейная статическая математическая модель развития установленных генерирующих и передающих мощностей и режимов их работы в рамках электроэнергетических систем (ЭЭС) и/или их объединения ОРИРЭС [1, 2]. Данная модель представляет разреженную, структурированную задачу линейного программирования большой размерности и активно используется в исследовании развития Единой энергосистемы России и ее роли в составе потенциального Азиатского энергообъединения [1, 3]. Полученные в результате оптимизации решения позволяют оценить эффективные параметры как всего энергообъединения в целом, так и его российской части, а также соединяющих их электрических связей.

При решении задач развития, хотя и не столь активно, как при решении задач функционирования ЭЭС [4–7] используются двойственные оценки. В частности, в модели развития ЭЭС EMMA (electricity market model) [8] формируются долгосрочные двойственные оценки, являющиеся индикаторами узловых цен на электроэнергию.

[1] Исследования выполнены в рамках проектов государственного задания № FWEU-2021-01 (регистрационный номер АААА-А21-121012190027-4) и № FWEU-2021-06 (регистрационный номер АААА-А21-121012090034-3).

Применение долгосрочных двойственных оценок может иметь перспективы в задачах обоснования решений по развитию ЭЭС в дополнение к традиционным результатам, получаемым на прямой модели развития ЭЭС. Двойственные оценки являются очень чувствительными динамичными индикаторами, характеризующими ценность генерирующих и передающих ресурсов электроэнергетической системы и в итоге эффективность различных мероприятий по развитию ЭЭС.

Долгосрочные двойственные оценки (ДО) могут использоваться в различных задачах развития электроэнергетики таких, как оценка эффективности объединения ЭЭС, в том числе для участвующих сторон; выбор эффективных мероприятий по развитию ЭЭС, включая вводы новых генерирующих мощностей и развитие электрических сетей; оценка эффективности развития распределенной генерации и использования активных потребителей; оценка сегментированности электроэнергетических рынков и выявление сегментов с потенциалом рыночной власти; прогнозирование узловых цен на электроэнергию и мощность; экономическая оценка гидроэнергетических ресурсов и др.

В ИСЭМ была разработана двойственная модель ОРИРЭС, в которой определяются долгосрочные двойственные оценки.

2. Модель ОРИРЭС

В математическом описании модели ОРИРЭС используются следующие обозначения.

Множества:

J — множество узлов;

$J^S_{\text{ГЭС}} \subset J$ — множество узлов, в которых находятся ГЭС с ограничениями на сезонную выработку;

$J^Y_{\text{ГЭС}} \subset J$ — множество узлов, в которых находятся ГЭС с ограничениями на годовую выработку;

I — множество типов мощностей;

S — множество сезонов;

$S^\sharp \subset S$ — множество сезонов с максимальной нагрузкой;

T — множество учитываемых часов;

$T^\sharp_s \subset T$ — множество часов с максимальной в сезон $s \in S^\sharp$.

Константы:

c_{ji} — издержки на генерацию мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (\$/МВт·ч);

γ_{ji} — капвложения в развитие мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (\$/МВт);

κ_{ji} — постоянные издержки мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (\$/МВт);

$\rho_{jj'}$ — капвложения в развитие линии $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ (\$/МВт);

$b_{jj'}$ — постоянные издержки линии $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ (\$/МВт);

τ^{w}_s — количество рабочих дней в сезоне $s \in S$;

τ_s^{h} — количество выходных дней в сезоне $s \in S$;

$a_{jj'}$ — элементы матрицы смежности, задающие наличие или отсутствие связи $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$:

$$a_{jj'} = \begin{cases} 1, & \text{если есть связь между узлами} j \text{ и } j', \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$\delta_{jj'}$ — потери на линии $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ (число из интервала (0,1));

d_{jst}^{w} — нагрузка в узле $j \in J$ в сезон $s \in S$ в час $t \in T$ в рабочие дни (МВт);

d_{jst}^{h} — нагрузка в узле $j \in J$ в сезон $s \in S$ в час $t \in T$ в выходные дни (МВт);

r_{jst} — максимальная нагрузка с учетом резервирования в узле $j \in J$ в час $t \in T_s^{\sharp}$ в сезон $s \in S^{\sharp}$ (МВт);

$\alpha_{jis}^{\mathrm{w}}$ — коэффициент минимально допустимой мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в рабочие дни (число из интервала (0,1));

$\alpha_{jis}^{\mathrm{h}}$ — коэффициент минимально допустимой мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в выходные дни (число из интервала (0,1));

β_{jis}^{w} — коэффициент максимальной готовности мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в рабочие дни (число из интервала (0,1));

β_{jis}^{h} — коэффициент максимальной готовности мощности типа $i \in I$ в сезон $s \in S$ в узле $j \in J$ в выходные дни (число из интервала (0,1));

z_{ji}^0 — существующая мощность типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (МВт);

$\overline{z}_{ji}$ — максимально возможная мощность типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (МВт);

$v_{jj'}^0$ — существующая пропускная способность связи $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ (МВт);

$\overline{v}_{jj'}$ — максимально возможная пропускная способность связи $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ (МВт);

$H_{j\text{ГЭС}s}^S$ — максимальное количество часов использования ГЭС с сезонным регулированием в узле $j \in J$ в сезоне $s \in S$;

$H_{j\text{ГЭС}}^Y$ — максимальное количество часов использования гидроэлектростанций (ГЭС) с годовым регулированием в узле $j \in J$;

$G_{js}^{\text{ГАЭС}}$ — коэффициент максимальной готовности гидроаккумулирующих электростанций (ГАЭС) в узле $j \in J$ в сезоне $s \in S$;

q_j — КПД цикла “заряд-разряд” ГАЭС в узле $j \in J$;

$H_j^{\text{ГАЭС}}$ — суточное число использования мощности ГАЭС в узле $j \in J$; f — коэффициент возврата капитала.

Переменные:

x_{jist}^{w} — генерация мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ в сезон $s \in S$ в час $t \in T$ в рабочие дни (МВт);

x_{jist}^{h} — генерация мощности типа $i \in I$ в узле $j \in J$ в сезон $s \in S$ в час $t \in T$ в выходные дни (МВт);

z_{ji} — мощность типа $i \in I$ в узле $j \in J$ (МВт);

$v_{jj'}$ — пропускная способность связи $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ (МВт);

$\widetilde{y}_{jj'st}$ — резервный переток по связи $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ в пиковый час $t \in T_s^\sharp$ пикового сезона $s \in S^\sharp$ (МВт);

$y^{\mathrm{w}}_{jj'st}$ — переток по связи $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ в час $t \in T$ в сезон $s \in S$ в рабочие дни (МВт);

$y^{\mathrm{h}}_{jj'st}$ — переток по связи $j - j'$, $j \in J$, $j' \in J$ в час $t \in T$ в сезон $s \in S$ в выходные дни (МВт);

u^{w}_{jst} — зарядная мощность ГАЭС в узле $j \in J$ в час $t \in T$ в сезон $s \in S$ в рабочие дни (МВт);

u^{h}_{jst} — зарядная мощность ГАЭС в узле $j \in J$ в час $t \in T$ в сезон $s \in S$ в выходные дни (МВт). Все переменные модели неотрицательны.

Целевая функция:

$$\mathsf{TC} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau_s^{\mathrm{w}} c_{ji} x^{\mathrm{w}}_{jist} + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau_s^{\mathrm{h}} c_{ji} x^{\mathrm{h}}_{jist} + \tag{2.1}$$

$$+ f\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\gamma_{ji}\left(z_{ji} - z^0_{ji}\right) + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\kappa_{ji} z_{ji} + \tag{2.2}$$

$$+ \frac{1}{2} f \sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}\rho_{jj'}\left(v_{jj'} - v^0_{jj'}\right) + \frac{1}{2}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J} b_{jj'} v_{jj'} \to \min_{(x^{\mathrm{w}}, x^{\mathrm{h}}, z, u^{\mathrm{w}}, u^{\mathrm{h}}, v, \widetilde{y}, y^{\mathrm{w}}, y^{\mathrm{h}})}. \tag{2.3}$$

Составляющими целевой функции являются: суммарные (годовые) издержки на генерацию (2.1), издержки на ввод новых мощностей и постоянные издержки на их содержание (2.2), издержки на расширение пропускных способностей связей и соответствующие постоянные издержки (2.3).

Далее приводится система ограничений модели ОРИРЭС с указанием соответствующих двойственных переменных.

Ограничения на мощности в пиковые часы:

$$\sum_{i\in I} z_{ji} + \sum_{j'\in J} a_{jj'}\left(1 - \delta_{jj'}\right)\widetilde{y}_{j'jst} - \sum_{j'\in J} a_{jj'}\widetilde{y}_{jj'st} \geqslant r_{jst}, \tag{2.4}$$
$$j \in J,\ t \in T_s^\sharp,\ s \in S^\sharp,$$

двойственные переменные ν_{jst}. Установленных мощностей во всей энергосистеме с учетом баланса перетоков должно хватить на покрытие максимальной нагрузки в каждом узле с учетом нормативного резерва (например, в случае аварии). Фактически, ограничения (2.4) — это требования, предъявляемые к установленной суммарной мощности.

Балансовые ограничения в рабочие дни:

$$\sum_{i\in I} x^{\mathrm{w}}_{jist} + \sum_{j'\in J} a_{jj'}\left(1 - \delta_{jj'}\right) y^{\mathrm{w}}_{j'jst} - \sum_{j'\in J} a_{jj'} y^{\mathrm{w}}_{jj'st} = d^{\mathrm{w}}_{jst} + u^{\mathrm{w}}_{jst},$$
$$j \in J,\ s \in S,\ t \in T,$$

двойственные переменные $\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}$.

Балансовые ограничения в выходные дни:

$$\sum_{i\in I} x^{\mathrm{h}}_{jist} + \sum_{j'\in J} a_{jj'}\left(1-\delta_{jj'}\right) y^{\mathrm{h}}_{j'jst} - \sum_{j'\in J} a_{jj'} y^{\mathrm{h}}_{jj'st} = d^{\mathrm{h}}_{jst} + u^{\mathrm{h}}_{jst},$$

$$j\in J,\ s\in S,\ t\in T,$$

двойственные переменные $\lambda^{\mathrm{h}}_{jst}$.

Ограничения на генерацию с учетом коэффициентов готовности и минимально допустимой мощности в рабочие и выходные дни:

$$\alpha^{\mathrm{w}}_{jis} z_{ji} \leqslant x^{\mathrm{w}}_{jist} \leqslant \beta^{\mathrm{w}}_{jis} z_{ji},\quad \alpha^{\mathrm{h}}_{jis} z_{ji} \leqslant x^{\mathrm{h}}_{jist} \leqslant \beta^{\mathrm{h}}_{jis} z_{ji},$$
$$j\in J,\ i\in I,\ s\in S,\ t\in T, \tag{2.5}$$

двойственные переменные $\underline{\mu}^{\mathrm{w}}_{jist}$, $\overline{\mu}^{\mathrm{w}}_{jist}$, $\underline{\mu}^{\mathrm{h}}_{jist}$, $\overline{\mu}^{\mathrm{h}}_{jist}$.

Ограничения на развитие мощностей:

$$z^0_{ji} \leqslant z_{ji} \leqslant \bar{z}_{ji},\quad j\in J,\ i\in I, \tag{2.6}$$

двойственные переменные $\underline{\sigma}_{ij}$, $\overline{\sigma}_{ij}$.

Ограничения на резервные перетоки: $\widetilde{y}_{jj'st} \leqslant v_{jj'},\ j\in J,\ j'\in J,\ t\in T^{\sharp}_s$, $s\in S^{\sharp}$, двойственные переменные $\widetilde{\eta}_{jj'st}$.

Ограничения на перетоки в рабочие и выходные дни:

$$y^{\mathrm{w}}_{jj'st} \leqslant v_{jj'},\ y^{\mathrm{h}}_{jj'st} \leqslant v_{jj'},\quad j\in J,\ j'\in J,\ s\in S,\ t\in T,$$

двойственные переменные $\eta^{\mathrm{w}}_{jj'st}$.

Ограничения на развитие связей: $v^0_{jj'} \leqslant v_{jj'} \leqslant \bar{v}_{jj'}$, $j\in J$, $j'\in J$, двойственные переменные $\underline{\omega}_{jj'}$, $\overline{\omega}_{jj'}$.

Ограничения на сезонную выработку ГЭС (для узлов из $J^S_{\text{ГЭС}}$):

$$\tau^{\mathrm{w}}_s \sum_{t\in T} x^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st} + \tau^{\mathrm{h}}_s \sum_{t\in T} x^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})st} \leqslant H^S_{j\text{ГЭС}s} z_{j(\text{ГЭС})},$$

$$j\in J^S_{\text{ГЭС}},\ s\in S,$$

двойственные переменные ξ_{js}.

Ограничения на годовую выработку ГЭС (для узлов из $J^Y_{\text{ГЭС}}$):

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} \tau^{\mathrm{w}}_s x^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T} \tau^{\mathrm{h}}_s x^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})st} \leqslant H^{\mathrm{Y}}_{j\text{ГЭС}} z_{j(\text{ГЭС})},$$

$$j\in J^Y_{\text{ГЭС}},$$

двойственные переменные ξ^Y_j.

Ограничения на величину заряда ГАЭС в рабочие и выходные дни:

$$u^{\mathrm{w}}_{jst} \leqslant G^{\text{ГАЭС}}_{js} z_{j(\text{ГАЭС})}, \quad u^{\mathrm{h}}_{jst} \leqslant G^{\text{ГАЭС}}_{js} z_{j(\text{ГАЭС})},$$
$$j \in J, \quad s \in S, \quad t \in T,$$

двойственные переменные $\theta^{\mathrm{w}}_{jst}$, $\theta^{\mathrm{h}}_{jst}$.

Ограничения на суточную выработку ГАЭС в рабочие и выходные дни в зависимости от накопленного заряда:

$$\sum_{t\in T} x^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГАЭС})st} - q_j \sum_{t\in T} u^{\mathrm{w}}_{jst} \leqslant 0, \quad \sum_{t\in T} x^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГАЭС})st} - q_j \sum_{t\in T} u^{\mathrm{h}}_{jst} \leqslant 0,$$
$$j \in J, \quad s \in S,$$

двойственные переменные ψ^{w}_{js}, ψ^{h}_{js}.

Ограничения на суточную мощность ГАЭС в рабочие и выходные дни в зависимости от числа часов использования ГАЭС:

$$\sum_{t\in T} x^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГАЭС})st} \leqslant H^{\text{ГАЭС}}_{j} z_{j(\text{ГАЭС})}, \quad \sum_{t\in T} x^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГАЭС})st} \leqslant H^{\text{ГАЭС}}_{j} z_{j(\text{ГАЭС})},$$
$$j \in J, \ s \in S,$$

двойственные переменные $\varphi^{\mathrm{w}}_{js}$, $\varphi^{\mathrm{h}}_{js}$.

Технические условия эквивалентности пропускных способностей связей в обоих направлениях: $v_{jj'} = v_{j'j}$, $j \in J$, $j' \in J$, двойственные переменные $\pi_{jj'}$.

Модели, подобные ОРИРЭС, исследовались и в других работах [9–13]. Модель ОРИРЭС обладает следующими преимуществами:

- более детально моделируются режимы ГЭС с ограничениями на годовую и сезонную выработку;
- моделируются режимы ГАЭС;
- более детально учитываются графики нагрузки.

3. Двойственная модель

Вывод двойственной постановки основан на методике, использованной в [14]. Сначала стандартным образом записывается функция Лагранжа, в которой все слагаемые сгруппированы относительно двойственных переменных. Затем функция Лагранжа переписывается так, чтобы все слагаемые были сгруппированы относительно прямых переменных. Для записи двойственной задачи необходимо минимизировать функцию Лагранжа по прямым переменным. При этом ограничения на прямые переменные либо отсутствуют, либо являются ограничениями на знак прямой переменной. В первом случае получаем ограничения-равенства, а во втором случае — ограничения-неравенства двойственной задачи. К первой группе переменных относятся переменные x^{w}_{jist}, x^{h}_{jist}, поскольку в силу двусторонних ограничений (2.5) неотрицательность этих переменных учитывается автоматически и

в задаче минимизации функции Лагранжа по этим переменным ограничения на знак отсутствуют. То же самое можно сказать о переменных z_{ij} и $v_{jj'}$. Для остальных переменных ограничения на знак должны явно учитываться. Часть выражения функции Лагранжа, не содержащая прямых переменных, есть максимизируемая целевая функция двойственной задачи. В итоге получаем следующую постановку двойственной задачи.

Целевая функция

$$\mathsf{TR} = -f \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \gamma_{ji} z^0_{ji} - \frac{1}{2} f \sum_{j\in J}\sum_{j'\in J} \rho_{jj'} v^0_{jj'} + \tag{3.1}$$

$$+ \sum_{j\in J}\sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T^\sharp_s} r_{jst}\nu_{jst} + \sum_{j\in J}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} d^{\mathrm{w}}_{jst}\lambda^{\mathrm{w}}_{jst} + \sum_{j\in J}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} d^{\mathrm{h}}_{jst}\lambda^{\mathrm{h}}_{jst} + \tag{3.2}$$

$$+ \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} z^0_{ji}\underline{\sigma}_{ji} - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} \overline{z}_{ji}\overline{\sigma}_{ji} + \sum_{j\in J}\sum_{j'\in J} v^0_{jj'}\underline{\omega}_{jj'} - \sum_{j\in J}\sum_{j'\in J} \overline{v}_{jj'}\overline{\omega}_{jj'}. \tag{3.3}$$

Ограничения, соответствующие переменным z_{ij}, без ГЭС и ГАЭС (т.е. $i \neq$ ГЭС и $i \neq$ ГАЭС):

$$f\gamma_{ji} + \kappa_{ji} - \sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T^\sharp_s} \nu_{jst} + \sum_{s\in S} \alpha^{\mathrm{w}}_{jis}\left(\sum_{t\in T} \underline{\mu}^{\mathrm{w}}_{jist}\right) - \sum_{s\in S} \beta^{\mathrm{w}}_{jis}\left(\sum_{t\in T} \overline{\mu}^{\mathrm{w}}_{jist}\right) + \tag{3.4}$$

$$+ \sum_{s\in S} \alpha^{\mathrm{h}}_{jis}\left(\sum_{t\in T} \underline{\mu}^{\mathrm{h}}_{jist}\right) - \sum_{s\in S} \beta^{\mathrm{h}}_{jis}\left(\sum_{t\in T} \overline{\mu}^{\mathrm{h}}_{jist}\right) - \underline{\sigma}_{ji} + \overline{\sigma}_{ji} = 0, \tag{3.5}$$

$$j \in J, i \in I \setminus \{\text{ГЭС}, \text{ГАЭС}\}.$$

Ограничения, соответствующие переменным $z_{j(\text{ГЭС})}$ для ГЭС сезонного регулирования:

$$f\gamma_{j(\text{ГЭС})} + \kappa_{j(\text{ГЭС})} - \sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T^\sharp_s} \nu_{jst} +$$

$$+ \sum_{s\in S} \alpha^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T} \underline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) - \sum_{s\in S} \beta^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T} \overline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) +$$

$$+ \sum_{s\in S} \alpha^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T} \underline{\mu}^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) - \sum_{s\in S} \beta^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T} \overline{\mu}^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) +$$

$$+ \overline{\sigma}_{j(\text{ГЭС})} - \underline{\sigma}_{j(\text{ГЭС})} - \sum_{s\in S} H^S_{j\text{ГЭС}s}\xi_{js} = 0,\ j \in J^S_{\text{ГЭС}}.$$

Ограничения, соответствующие переменным $z_{j(\text{ГЭС})}$ для ГЭС годового регулирования:

$$f\gamma_{j(\text{ГЭС})} + \kappa_{j(\text{ГЭС})} - \sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T_s^\sharp}\nu_{jst} +$$

$$+\sum_{s\in S}\alpha^{\text{w}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\underline{\mu}^{\text{w}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) - \sum_{s\in S}\beta^{\text{w}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\overline{\mu}^{\text{w}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) +$$

$$+\sum_{s\in S}\alpha^{\text{h}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\underline{\mu}^{\text{h}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) - \sum_{s\in S}\beta^{\text{h}}_{j(\text{ГЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\overline{\mu}^{\text{h}}_{j(\text{ГЭС})st}\right) +$$

$$+\overline{\sigma}_{j(\text{ГЭС})} - \underline{\sigma}_{j(\text{ГЭС})} - H^{\text{Y}}_{j\text{ГЭС}}\xi^Y_j = 0,\ j\in J^Y_{\text{ГЭС}}.$$

Ограничения, соответствующие переменным $z_{j(\text{ГАЭС})}$:

$$f\gamma_{j(\text{ГАЭС})} + \kappa_{j(\text{ГАЭС})} - \sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T_s^\sharp}\nu_{jst} +$$

$$+\sum_{s\in S}\alpha^{\text{w}}_{j(\text{ГАЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\underline{\mu}^{\text{w}}_{j(\text{ГАЭС})st}\right) - \sum_{s\in S}\beta^{\text{w}}_{j(\text{ГАЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\overline{\mu}^{\text{w}}_{j(\text{ГАЭС})st}\right) +$$

$$+\sum_{s\in S}\alpha^{\text{h}}_{j(\text{ГАЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\underline{\mu}^{\text{h}}_{j(\text{ГАЭС})st}\right) - \sum_{s\in S}\beta^{\text{h}}_{j(\text{ГАЭС})s}\left(\sum_{t\in T}\overline{\mu}^{\text{h}}_{j(\text{ГАЭС})st}\right) +$$

$$+\overline{\sigma}_{j(\text{ГЭС})} - \underline{\sigma}_{j(\text{ГАЭС})} - \sum_{s\in S}G^{\text{ГАЭС}}_{js}\left(\sum_{t\in T}\theta^{\text{w}}_{jst}\right) - \sum_{s\in S}G^{\text{ГАЭС}}_{js}\left(\sum_{t\in T}\theta^{\text{h}}_{jst}\right) -$$

$$-H^{\text{ГАЭС}}_j\left(\sum_{s\in S}\varphi^{\text{w}}_{js}\right) - H^{\text{ГАЭС}}_j\left(\sum_{s\in S}\varphi^{\text{h}}_{js}\right) = 0,\ j\in J^Y_{\text{ГАЭС}}.$$

Ограничения, соответствующие переменным x^{w}_{jist} и x^{h}_{jist} без ГЭС и ГАЭС (т.е. $i\neq$ ГЭС и $i\neq$ ГАЭС):

$$\tau^{\text{w}}_s c_{ji} - \lambda^{\text{w}}_{jst} - \underline{\mu}^{\text{w}}_{jist} + \overline{\mu}^{\text{w}}_{jist} = 0,\quad \tau^{\text{h}}_s c_{ji} - \lambda^{\text{h}}_{jst} - \underline{\mu}^{\text{h}}_{jist} + \overline{\mu}^{\text{h}}_{jist} = 0, \tag{3.6}$$

$$j\in J,\quad i\in I\setminus\{\text{ГЭС},\text{ГАЭС}\},\quad s\in S,\quad t\in T.$$

Ограничения, соответствующие переменным $x^{\text{w}}_{j(\text{ГЭС})st}$ и $x^{\text{h}}_{j(\text{ГЭС})st}$ для ГЭС с сезонным регулированием:

$$\tau^{\text{w}}_s c_{j(\text{ГЭС})} - \lambda^{\text{w}}_{jst} - \underline{\mu}^{\text{w}}_{j(\text{ГЭС})st} + \overline{\mu}^{\text{w}}_{j(\text{ГЭС})st} + \tau^{\text{w}}_s\xi_{js} = 0,\ j\in J^S_{\text{ГЭС}},\ s\in S,\ t\in T, \tag{3.7}$$

$$\tau^{\text{h}}_s c_{j(\text{ГЭС})} - \lambda^{\text{h}}_{jst} - \underline{\mu}^{\text{h}}_{j(\text{ГЭС})st} + \overline{\mu}^{\text{h}}_{j(\text{ГЭС})st} + \tau^{\text{h}}_s\xi_{js} = 0,\ j\in J^S_{\text{ГЭС}},\ s\in S,\ t\in T.$$

Ограничения, соответствующие переменным $x^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st}$ и $x^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st}$ для ГЭС с годовым регулированием:

$$
\begin{aligned}
(3.8)\quad & \tau^{\mathrm{w}}_s c_{j(\text{ГЭС})} - \lambda^{\mathrm{w}}_{jst} - \underline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st} + \overline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st} + \tau^{\mathrm{w}}_s \xi^Y_j = 0,\ j \in J^Y_{\text{ГЭС}},\ s \in S,\ t \in T,\\
& \tau^{\mathrm{h}}_s c_{j(\text{ГЭС})} - \lambda^{\mathrm{h}}_{jst} - \underline{\mu}^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})st} + \overline{\mu}^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГЭС})st} + \tau^{\mathrm{h}}_s \xi^Y_j = 0,\ j \in J^Y_{\text{ГЭС}},\ s \in S,\ t \in T.
\end{aligned}
$$

Ограничения, соответствующие переменным $x^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГАЭС})st}$ и $x^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГАЭС})st}$:

$$
\begin{aligned}
& \tau^{\mathrm{w}}_s c_{j(\text{ГАЭС})} - \lambda^{\mathrm{w}}_{jst} - \underline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГАЭС})st} + \overline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГАЭС})st} + \psi^{\mathrm{w}}_{js} + \varphi^{\mathrm{w}}_{js} = 0,\quad j \in J,\ s \in S,\ t \in T,\\
& \tau^{\mathrm{h}}_s c_{j(\text{ГАЭС})} - \lambda^{\mathrm{h}}_{jst} - \underline{\mu}^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГАЭС})st} + \overline{\mu}^{\mathrm{h}}_{j(\text{ГАЭС})st} + \psi^{\mathrm{h}}_{js} + \varphi^{\mathrm{h}}_{js} = 0,\quad j \in J,\ s \in S,\ t \in T.
\end{aligned}
$$

Ограничения, соответствующие переменным $v_{jj'}$:

$$
\frac{1}{2} f \rho_{jj'} + \frac{1}{2} b_{jj'} - \sum_{s \in S^\sharp} \sum_{t \in T^\sharp_s} \widetilde{\eta}_{jj'st} - \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st} - \tag{3.9}
$$

$$
- \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st} + \overline{\omega}_{jj'} - \underline{\omega}_{jj'} + \pi_{jj'} - \pi_{j'j} = 0,\quad j \in J,\ j' \in J. \tag{3.10}
$$

Ограничения, соответствующие переменным $\widetilde{y}_{jj'st}$:

$$
a_{jj'} \left(\nu_{jst} - (1 - \delta_{jj'}) \nu_{j'st} \right) + \widetilde{\eta}_{jj'st} \geqslant 0,\quad j \in J,\ j' \in J,\ s \in S^\sharp,\ t \in T^\sharp_s.
$$

Ограничения, соответствующие переменным $y^{\mathrm{w}}_{jj'st}$ и $y^{\mathrm{h}}_{jj'st}$:

$$
a_{jj'} \left(\lambda^{\mathrm{w}}_{jst} - (1 - \delta_{jj'}) \lambda^{\mathrm{w}}_{j'st} \right) + \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st} \geqslant 0,\quad a_{jj'} \left(\lambda^{\mathrm{h}}_{jst} - (1 - \delta_{jj'}) \lambda^{\mathrm{h}}_{j'st} \right) + \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st} \geqslant 0,
$$
$$
j \in J,\ j' \in J,\ s \in S,\ t \in T.
$$

Ограничения, соответствующие переменным u^{w}_{jst} и u^{h}_{jst}:

$$
\lambda^{\mathrm{w}}_{jst} + \theta^{\mathrm{w}}_{jst} - q_j \psi^{\mathrm{w}}_{js} \geqslant 0,\quad \lambda^{\mathrm{h}}_{jst} + \theta^{\mathrm{h}}_{jst} - q_j \psi^{\mathrm{h}}_{js} \geqslant 0,\ j \in J,\ s \in S,\ t \in T.
$$

Все двойственные переменные неотрицательны, за исключением $\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}$, $\lambda^{\mathrm{h}}_{jst}$ и $\pi_{jj'}$.

4. Анализ двойственной модели

Поскольку все переменные в прямой задаче имеют двусторонние ограничения, допустимое множество прямой задачи ограничено. Будем предполагать, что это множество не пусто. Тогда прямая и двойственная задачи имеют решения $\mathfrak{P}^*$ и $\mathfrak{D}^*$, где $\mathfrak{P}^*$ — набор оптимальных значений прямых переменных,

$$
\mathfrak{P}^* = \left\{ x^{\mathrm{w},*}_{jist},\ x^{\mathrm{h},*}_{jist},\ z^*_{ji}, v^*_{jj'},\ \widetilde{y}^*_{jj'st},\ y^{\mathrm{w},*}_{jj'st},\ y^{\mathrm{h},*}_{jj'st},\ u^{\mathrm{w},*}_{jst},\ u^{\mathrm{h},*}_{jst} \right\},
$$

$\mathfrak{D}^*$ — набор оптимальных значений двойственных переменных,

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ \begin{array}{c} \nu^*_{jst},\ \lambda^{\mathrm{w},*}_{jst},\ \lambda^{\mathrm{h},*}_{jst},\ \underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist},\ \overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist},\ \underline{\mu}^{\mathrm{h},*}_{jist},\ \overline{\mu}^{\mathrm{h},*}_{jist},\ \widetilde{\eta}^*_{jj'st},\ \eta^{\mathrm{w},*}_{jj'st},\ \eta^{\mathrm{h},*}_{jj'st},\ \underline{\sigma}^*_{ji},\ \overline{\sigma}^*_{ji}, \\ \overline{\omega}^*_{jj'},\ \underline{\omega}^*_{jj'},\ \xi^*_{js},\ \xi^{Y,*}_{j},\ \theta^{\mathrm{w},*}_{jst},\ \theta^{\mathrm{h},*}_{jst},\ \psi^{\mathrm{w},*}_{js},\ \psi^{\mathrm{h},*}_{js},\ \varphi^{\mathrm{w},*}_{js},\ \varphi^{\mathrm{h},*}_{js},\ \pi^*_{jj'} \end{array} \right\}.$$

Обозначим: $\mathsf{TC}^* = \mathsf{TC}(\mathfrak{P}^*)$ — оптимальное значение прямой задачи (см. (2.1)–(2.3)), $\mathsf{TR}^* = \mathsf{TR}(\mathfrak{D}^*)$ (см. (3.1)–(3.3)) — оптимальное значение двойственной задачи. Из равенства $\mathsf{TC}^* = \mathsf{TR}^*$ после перегруппировки слагаемых получаем следующее:

$$\underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T^\sharp_s} r_{jst}\nu^*_{jst}}_{P_{reserv}} + \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} d^{\mathrm{w}}_{jst}\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}}_{P^w} + \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} d^{\mathrm{h}}_{jst}\lambda^{\mathrm{h},*}_{jst}}_{P^h} = \tag{4.1}$$

$$= \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} \tau^{\mathrm{w}}_s c_{ji} x^{\mathrm{w},*}_{jist}}_{C^w_{generation}} + \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\sum_{s\in S}\sum_{t\in T} \tau^{\mathrm{h}}_s c_{ji} x^{\mathrm{h},*}_{jist}}_{C^h_{generation}} + \tag{4.2}$$

$$+ \underbrace{f\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\gamma_{ji}\left(z^*_{ji} - z^0_{ji}\right)}_{C^{capacity}_{expansion}} + \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\kappa_{ji} z^*_{ji}}_{C^{capacity}_{fixed}} + \tag{4.3}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} f\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}\rho_{jj'}\left(v^*_{jj'} - v^0_{jj'}\right)}_{C^{network}_{expansion}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J} b_{jj'} v^*_{jj'}}_{C^{network}_{fixed}} + \tag{4.4}$$

$$+ \underbrace{f\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\gamma_{ji} z^0_{ji}}_{C^{capacity}_{repay}} + \underbrace{\frac{1}{2} f\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}\rho_{jj'} v^0_{jj'}}_{C^{network}_{repay}} + \tag{4.5}$$

$$+ \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\overline{z}_{ji}\overline{\sigma}^*_{ji}}_{R^{capacity}_{stimulation}} - \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} z^0_{ji}\underline{\sigma}^*_{ji}}_{L^{capacity}_{inefficiency}} + \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J}\overline{v}_{jj'}\overline{\omega}^*_{jj'}}_{R^{network}_{stimulation}} - \underbrace{\sum_{j\in J}\sum_{j'\in J} v^0_{jj'}\underline{\omega}^*_{jj'}}_{L^{network}_{inefficiency}}. \tag{4.6}$$

Традиционно величина $\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}$ — это так называемая «узловая цена» в рабочие дни, т.е. цена, по которой электроэнергия покупается потребителями в рабочие дни в узле j в сезон s в час t, аналогичная интерпретация применима и к $\lambda^{\mathrm{h},*}_{jst}$ — «узловым ценам» в выходные дни. Величина ν^*_{jst} — стоимость резервной мощности. В итоге сумма трех слагаемых в (4.1) представляет собой суммарную плату потребителей за электроэнергию.

Содержательный смысл отдельных выражений в (4.1)–(4.6) следующий:

- P_{reserv} — плата потребителей за резерв электроэнергии;

- P^w — плата потребителей за электроэнергию в рабочие дни;
- P^h — плата потребителей за электроэнергию в выходные дни;
- $C^w_{generation}$ — издержки производителей на генерацию в рабочие дни;
- $C^h_{generation}$ — издержки производителей на генерацию в выходные дни;
- $C^{capacity}_{expansion}$ — издержки производителей на развитие установленных мощностей;
- $C^{capacity}_{fixed}$ — издержки производителей постоянные (на поддержание установленных мощностей);
- $C^{network}_{expansion}$ — издержки на развитие сети;
- $C^{network}_{fixed}$ — издержки сети постоянные (на поддержание сети);
- $C^{capacity}_{repay}$ — издержки имеющихся до развития мощностей (возврат начальных мощностных издержек);
- $C^{network}_{repay}$ — издержки имеющейся до развития сети (возврат начальных сетевых издержек);
- $R^{capacity}_{stimulation}$ — бонус (поощрение) эффективных мощностей;
- $L^{capacity}_{inefficiency}$ — убытки неэффективных мощностей;
- $R^{network}_{stimulation}$ — бонус (поощрение) эффективных участков сети;
- $L^{network}_{inefficiency}$ — убытки неэффективных участков сети.

Равенства (4.1)–(4.6) можно пояснить следующим образом: суммарная плата, взимаемая с потребителей в виде трех указанных в (4.1) составляющих, расходуется на

- покрытие издержек на годовую генерацию (4.2);
- покрытие суммарных издержек на мощность (4.3);
- покрытие суммарных сетевых издержек (4.4);
- восстановление издержек на ввод ранее существовавших мощностей и участков сети (4.5);
- суммарную прибыль (убыток) мощностей и сети (4.6).

Остановимся на результатах анализа основных двойственных соотношений.

Двойственные переменные $\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}$ и $\lambda^{\mathrm{h}}_{jst}$. Из (3.6) получаем

$$\frac{\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} = c_{ji} - \frac{\underline{\mu}^{\mathrm{w}}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} + \frac{\overline{\mu}^{\mathrm{w}}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s}, \quad j \in J,\ i \in I \setminus \{\text{ГЭС}, \text{ГАЭС}\},\ s \in S,\ t \in T. \tag{4.7}$$

Следовательно, $\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}$ имеет размерность “плата за МВт·ч за весь сезон” s. Кроме того, как видно из (4.7), узловая цена одна и та же для всех типов мощностей i, находящихся в данном узле ($\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}$ не зависит от i). Предположим, что для некоторой мощности $i = \hat{i}$ в сезон s, час t в узле j оптимальное значение прямой переменной $x^{\mathrm{w},*}_{j\hat{i}st}$ удовлетворяет строгому двустороннему неравенству

$$\alpha^{\mathrm{w}}_{j\hat{i}s} z^*_{j\hat{i}} < x^{\mathrm{w},*}_{j\hat{i}st} < \beta^{\mathrm{h}}_{j\hat{i}s} z^*_{j\hat{i}}, \tag{4.8}$$

т.е. генерация $x^{\mathrm{w},*}_{j\hat{i}st}$ не достигает своего минимального или максимального значения. В этом случае из условий дополняющей нежесткости

$$\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}\left(\alpha^{\mathrm{w}}_{jis}z^*_{ji} - x^{\mathrm{w},*}_{jist}\right) = 0, \;\; \overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}\left(x^{\mathrm{w},*}_{jist} - \beta^{\mathrm{w}}_{jis}z^*_{ji}\right) = 0, \tag{4.9}$$

которые выполняются для любого i и (4.8), следует

$$\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{j\hat{i}ist} = 0, \;\; \overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{j\hat{i}ist} = 0. \tag{4.10}$$

Тогда для оптимального значения $\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}$ из (4.7) и (4.10) имеем

$$\frac{\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} = c_{j\hat{i}}. \tag{4.11}$$

Для другой мощности i такой, что

$$c_{ji} < c_{j\hat{i}}, \tag{4.12}$$

получаем

$$\frac{\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} = c_{j\hat{i}} > c_{ji} = \frac{\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} + \frac{\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} - \frac{\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s}$$

или, после упрощения,

$$0 > \underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist} - \overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}. \tag{4.13}$$

При выполнении условия $\alpha^{\mathrm{w}}_{jis} < \beta^{\mathrm{w}}_{jis}$, которое просто предполагается очевидным, из условий дополняющей нежесткости (4.9) следует, что $\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}$ и $\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}$ не могут быть одновременно отличными от нуля. Тогда в силу неотрицательности $\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}$, $\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}$ и строго неравенства (4.13) получаем $\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist} = 0$ и $\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist} > 0$. Снова из условия дополняющей нежесткости получаем

$$x^{\mathrm{w},*}_{jist} = \beta^{\mathrm{w}}_{jis}z^*_{ji}. \tag{4.14}$$

Мощность i, удовлетворяющая условию (4.12), более экономичная (издержки на генерацию одного МВт меньше), чем мощность $\hat{i}$, и в силу равенства (4.14) такая мощность используется максимально.

Если же предположить, что для мощности i (отличной от $\hat{i}$) выполняется строгое неравенство

$$c_{ji} > c_{j\hat{i}}, \tag{4.15}$$

то, проводя аналогичные рассуждения, получаем, что в этом случае анализируемая мощность i менее экономична, чем $\hat{i}$, и поэтому используется минимальным образом:

$$x^{\mathrm{w},*}_{jist} = \alpha^{\mathrm{w}}_{jis}z^*_{ji}. \tag{4.16}$$

Подведем некоторые итоги. Все типы мощностей в данном узле j распадаются на не более, чем три группы. Если для некоторых мощностей справедливы неравенства (4.8), то все они имеют одинаковые предельные издержки c_{ji}, и в соответствии с этими издержками устанавливается узловая цена по формуле (4.11). Такие мощности принято называть замыкающими. Если в данном узле есть мощности с меньшими издержками, то они загружаются полностью. Их издержки не обязаны быть равными, лишь бы выполнялось условие (4.12). Если в узле есть мощности с большими, чем у замыкающих, издержками (4.15), то эти мощности загружаются по минимуму, т.е. в соответствии с (4.16). Их вообще лучше было бы не загружать, но этому могут препятствовать условия $\alpha^{\mathrm{w}}_{jis} > 0$ и $z^0_{ji} > 0$. Если для некоторых i коэффициенты минимальной готовности $\alpha^{\mathrm{w}}_{jis} = 0$, то, как следует из (4.16), такие мощности не загружаются.

Анализ двойственных переменных $\lambda^{\mathrm{h}}_{jst}$ проводится аналогичным образом.

Двойственные переменные $\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}$ и $\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}$. Ранее уже было установлено, что для замыкающих мощностей значения этих переменных равны нулю. Для более экономичных мощностей имеем (как это было определено выше) $\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist} > 0$ и $\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist} = 0$. Из (4.7) получаем

$$\frac{\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} = c_{ji} + \frac{\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s}.$$

Экономичные мощности несут издержки на генерацию одного МВт·ч в объеме c_{ji}, а продают по узловым ценам, равным $\frac{\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s}$, т.е. за каждый МВт·ч получают доход $\frac{\overline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s}$ (имеют излишек производителя). Для неэкономичных мощностей, т.е. для тех мощностей i, для которых выполняются неравенства (4.15), аналогичным образом получаем

$$\frac{\lambda^{\mathrm{w},*}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} = c_{ji} - \frac{\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s}. \tag{4.17}$$

Эти мощности не покрывают издержки на генерацию за счет продажи. Как следует из (4.17), убыток с каждого МВт равен $\frac{\underline{\mu}^{\mathrm{w},*}_{jist}}{\tau^{\mathrm{w}}_s}$.

Двойственные переменные ξ_{js} и ξ^Y_j. Учитывая, что $c_{j(\text{ГЭС})} = 0$, из (3.7) получаем

$$\frac{\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} = \frac{\underline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} - \frac{\overline{\mu}^{\mathrm{w}}_{j(\text{ГЭС})st}}{\tau^{\mathrm{w}}_s} + \xi_{js}, \quad j \in J^S_{\text{ГЭС}}, \ s \in S, \ t \in T. \tag{4.18}$$

Сравнивая (4.18) и (4.7), видим, что хотя издержки на генерацию непосредственно ГЭС нулевые, роль издержек выполняют двойственные переменные ξ_{js}. Напомним, что эти двойственные переменные соответствуют ограничениям на сезонное использование ГЭС водных ресурсов и оценивают именно

стоимость этих ресурсов в каждый сезон s. Другими словами, ξ_{js} можно рассматривать как ренту за использование гидроэнергетических ресурсов ГЭС сезонного регулирования.

Аналогичным образом из (3.8) получаем, что двойственные переменные ξ_j^Y — рента за использование гидроэнергетических ресурсов ГЭС с годовым регулированием.

Разделение расходов на строительство новой линии между двумя соседними узлами. Для линии $j - j'$ проанализируем вклад каждого узла в расходы, связанные с функционированием и развитием этой линии. Запишем равенства (3.9)–(3.10), поменяв местами индексы j и j',

$$\frac{1}{2} f \rho_{j'j} + \frac{1}{2} b_{j'j} - \sum_{s \in S^\sharp} \sum_{t \in T_s^\sharp} \widetilde{\eta}_{j'jst} - \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst} - \tag{4.19}$$

$$- \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{h}}_{j'jst} + \overline{\omega}_{j'j} - \underline{\omega}_{j'j} + \pi_{j'j} - \pi_{jj'} = 0, \quad j \in J, \ j' \in J. \tag{4.20}$$

Суммируя (3.9)–(3.10) и (4.19)–(4.20) и учитывая $\rho_{j'j} = \rho_{jj'}$ $b_{j'j} = b_{jj'}$, получаем

$$\begin{aligned} f \rho_{j'j} + b_{j'j} = & \sum_{s \in S^\sharp} \sum_{t \in T_s^\sharp} \widetilde{\eta}_{jj'st} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st} + \\ & + \sum_{s \in S^\sharp} \sum_{t \in T_s^\sharp} \widetilde{\eta}_{j'jst} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{h}}_{j'jst} + \\ & + \overline{\omega}_{jj'} - \underline{\omega}_{jj'} + \overline{\omega}_{j'j} - \underline{\omega}_{j'j}. \end{aligned}$$

Умножая последние равенства $v_{jj'}$ и учитывая $v_{jj'} = v_{j'j}$, получим

$$f \rho_{jj'} v_{jj'} + b_{jj'} v_{jj'} =$$

$$= \sum_{s \in S^\sharp} \sum_{t \in T_s^\sharp} \widetilde{\eta}_{jj'st} v_{jj'} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st} v_{jj'} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st} v_{jj'} + \tag{4.21}$$

$$+ \sum_{s \in S^\sharp} \sum_{t \in T_s^\sharp} \widetilde{\eta}_{j'jst} v_{j'j} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst} v_{j'j} + \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} \eta^{\mathrm{h}}_{j'jst} v_{j'j} + \tag{4.22}$$

$$+ \overline{\omega}_{jj'} v_{jj'} - \underline{\omega}_{jj'} v_{jj'} + \overline{\omega}_{j'j} v_{j'j} - \underline{\omega}_{j'j} v_{j'j}. \tag{4.23}$$

В силу условия дополняющей нежесткости

$$\begin{aligned} & \widetilde{\eta}_{jj'st} v_{jj'} = \widetilde{\eta}_{jj'st} \widetilde{y}_{jj'st}, \quad \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st} v_{jj'} = \eta^{\mathrm{w}}_{jj'st} y^{\mathrm{w}}_{jj'st}, \\ & \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st} v_{jj'} = \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st} y^{\mathrm{h}}_{jj'st}, \quad s \in S, \quad t \in T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \widetilde{\eta}_{j'jst} v_{j'j} = \widetilde{\eta}_{j'jst} \widetilde{y}_{j'jst}, \quad \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst} v_{j'j} = \eta^{\mathrm{w}}_{j'jst} y^{\mathrm{w}}_{j'jst}, \\ & \eta^{\mathrm{h}}_{jj'st} v_{j'j} = \eta^{\mathrm{h}}_{j'jst} y^{\mathrm{h}}_{j'jst}, \quad s \in S, \quad t \in T, \end{aligned}$$

из условий (4.21)–(4.23) имеем

$$f\rho_{jj'}v_{jj'} + b_{jj'}v_{jj'} =$$

$$= \sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T_s^\sharp}\widetilde{\eta}_{jj'st}\widetilde{y}_{jj'st} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\eta^{\mathrm{w}}_{jj'st}y^{\mathrm{w}}_{jj'st} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\eta^{\mathrm{h}}_{jj'st}y^{\mathrm{h}}_{jj'st} + \tag{4.24}$$

$$+ \sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T_s^\sharp}\widetilde{\eta}_{j'jst}\widetilde{y}_{j'jst} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\eta^{\mathrm{w}}_{j'jst}y^{\mathrm{w}}_{j'jst} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\eta^{\mathrm{h}}_{j'jst}y^{\mathrm{h}}_{j'jst} + \tag{4.25}$$

$$+ \overline{\omega}_{jj'}v_{jj'} - \underline{\omega}_{jj'}v_{jj'} + \overline{\omega}_{j'j}v_{j'j} - \underline{\omega}_{j'j}v_{j'j}. \tag{4.26}$$

Выражение $f\rho_{jj'}v_{jj'} + b_{jj'}v_{jj'}$ слева от знака равенства в (4.24) означает полные затраты в линию на участке $j - j'$. Первое слагаемое $f\rho_{jj'}v_{jj'}$ — расходы на ввод линии, второе слагаемое $b_{jj'}v_{jj'}$ — постоянные расходы (издержки) с учетом установившейся пропускной способности $v_{jj'}$. Справа от знака равенства в (4.24) стоят суммарные выплаты узла j' в линию. Первое слагаемое $\sum\limits_{s\in S^\sharp}\sum\limits_{t\in T_s^\sharp}\widetilde{\eta}_{jj'st}\widetilde{y}_{jj'st}$ — плата узла j' за годовой переток из узла j в узел j' в пиковые сезоны и часы; второе слагаемое $\sum\limits_{s\in S}\sum\limits_{t\in T}\eta^{\mathrm{w}}_{jj'st}y^{\mathrm{w}}_{jj'st}$ — плата узла j' за годовой переток из узла j в узел j' в рабочие дни; третье слагаемое $\sum\limits_{s\in S}\sum\limits_{t\in T}\eta^{\mathrm{h}}_{jj'st}y^{\mathrm{h}}_{jj'st}$ — плата узла j' за годовой переток из узла j в узел j' в выходные дни. Двойственные переменные $\widetilde{\eta}_{jj'st}$, $\eta^{\mathrm{w}}_{jj'st}$, $\eta^{\mathrm{h}}_{jj'st}$ — цены за мегаватт перетока из j в j' в сезон s час t соответственно в “пиковые” периоды, рабочие и выходные дни. Аналогично интерпретируются перетоки из узла j' в узел j в выражении (4.25). В итоге получаем, что суммарные выплаты узла j' (правая часть (4.24)) плюс суммарные выплаты узла j (три слагаемых в (4.25)) идут на покрытие расходов на ввод линии плюс постоянные издержки (левая часть от знака равенства в (4.24)) плюс излишки (или доход) линии (выражение (4.26), перенесенное влево от знака равенства).

Анализ эффективности мощностей. Умножим равенства (3.4)–(3.5) на z_{ij} и, учитывая (4.9), получим

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}x^{\mathrm{w}}_{jist} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\lambda^{\mathrm{h}}_{jst}x^{\mathrm{h}}_{jist} + \sum_{s\in S^\sharp}\sum_{t\in T_s^\sharp}\nu_{jst}z_{ji} = \tag{4.27}$$

$$= \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau^{\mathrm{w}}_s c_{ji}x^{\mathrm{w}}_{jist} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau^{\mathrm{h}}_s c_{ji}x^{\mathrm{h}}_{jist} + \tag{4.28}$$

$$+ f\gamma_{ji}(z_{ji} - z^0_{ji}) + \kappa_{ji}z_{ji} + \tag{4.29}$$

$$+ f\gamma_{ji}z^0_{ji} + \overline{\sigma}_{ji}z_{ji} - \underline{\sigma}_{ji}z_{ji}. \tag{4.30}$$

Соотношения (4.27)–(4.30) выполняются для всех мощностей i в узлах j за исключением ГЭС и ГАЭС. Двойственные переменные: $\overline{\sigma}_{ji}$ — оценка значимости ограничений сверху в (2.6) на ввод мощности i в узле j (чем больше

эта величина, тем эффективнее ввод именно этой мощности); $\underline{\sigma}_{ji}$ — оценка ограничений на мощность снизу в (2.6) (чем больше эта величина, тем неэффективнее, убыточнее эта мощность).

Выражение (4.27) есть годовой доход, получаемый мощностью i в узле j: первое слагаемое — доход от генерации в рабочие дни, второе слагаемое — доход от генерации в выходные дни, третье слагаемое — доход от предоставления услуги по резервированию. Выражение (4.28) — годовые топливные издержки мощности i в узле j, первое слагаемое в (4.29) — затраты на развитие мощности i в узле j в объеме z_{ji}, второе слагаемое в (4.29) — постоянные издержки на содержание мощности z_{ji}. Первое слагаемое в выражении (4.30) — затраты на введение данной мощности в объеме z^0_{ji}. На первый взгляд это кажется странным, поскольку мощность эта уже существует и не требуется повторных затрат на ее введение. Объяснение этому эффекту можно дать следующее. Неравенство $z^0_{ji} \leqslant z_{ji}$ в (2.6) модель интерпретирует как обязательное (т.е. не зависящее от эффективности) введение мощности z^0_{ji}. Поэтому и возникают соответствующие обязательные затраты $f\gamma_{ji}z^0_{ji}$. Второе слагаемое в (4.30) — возможная прибыль. Третье слагаемое — возможный убыток.

Перейдем к более детальному анализу (4.27)–(4.30). Необходимо только помнить, что одновременно двойственные переменные $\overline{\sigma}_{ji}$ и $\underline{\sigma}_{ji}$ отличными от нуля быть не могут.

1. Если $\overline{\sigma}_{ji} > 0$, $\underline{\sigma}_{ji} = 0$, то $z_{ji} = \bar{z}_{ji}$, т.е. данная мощность вводится максимально. Более того, желательно, чтобы она вводилась еще больше. Владелец такой мощности получает “стимулирующую надбавку” в размере $\overline{\sigma}_{ji}$ за единицу мощности. В итоге владелец компенсирует годовые топливные затраты, затраты на развитие мощности, постоянные затраты на поддержание мощности и в дополнение имеет *стимулирующую* прибыль в размере $\overline{\sigma}_{ji}z_{ji}$. Величина $f\gamma_{ji}z^0_{ji}$ также может рассматриваться как *прибыль-восстановление* затрат на ранее введенную мощность.

2. Если $\overline{\sigma}_{ji} = 0$, $\underline{\sigma}_{ji} = 0$, то компенсируются все затраты, без стимулирующей прибыли, но с прибылью-восстановлением.

3. Если $\overline{\sigma}_{ji} = 0$, $\underline{\sigma}_{ji} > 0$, то $z_{ji} = z^0_{ji}$, т.е. ввод отсутствует. Более того, данная мощность неэффективна. За единицу мощности фирма несет убыток в размере $\underline{\sigma}_{ji}$. Годовой доход данной мощности идет на покрытие всех издержек минус убыток в размере $\underline{\sigma}_{ji}z^0_{ji}$ в случае $z^0_{ji} > 0$. Именно в этом случае сказывается то, что модель воспринимает левую часть неравенства (2.6) как обязательный (в данном случае неэффективный, убыточный) ввод. Перепишем (4.27)–(4.30) в следующем виде:

$$\sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\lambda^{\mathrm{w}}_{jst}x^{\mathrm{w}}_{jist} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\lambda^{\mathrm{h}}_{jst}x^{\mathrm{h}}_{jist} =$$

$$= \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau^{\mathrm{w}}_{s}c_{ji}x^{\mathrm{w}}_{jist} + \sum_{s\in S}\sum_{t\in T}\tau^{\mathrm{h}}_{s}c_{ji}x^{\mathrm{h}}_{jist} + \kappa_{ji}z^0_{ji} + f\gamma_{ji}z^0_{ji} - \underline{\sigma}_{ji}z^0_{ji}.$$

Убыток мощность терпит только в том случае, если $f\gamma_{ji}z^0_{ji} - \underline{\sigma}_{ji}z^0_{ji} < 0$. Если данная разность равна нулю, то доход в точности компенсирует затраты, а если эта разность положительна, то мощность даже получает прибыль.

Анализ эффективности сети производится аналогично анализу мощностной эффективности.

5. Заключение

Главным результатом проведенного анализа является равенство (4.1)–(4.6). На вход модели поступает спрос на электроэнергию в рабочие и выходные дни, и норматив на резерв. Полученные цены, с одной стороны, соответствуют минимуму суммарных затрат, с другой стороны, устанавливаются так, что суммарная плата, взимаемая с потребителей за электроэнергию, позволяет оптимальным образом ввести новые мощности и новые линии (или увеличить пропускные способности существующих). Двойственный анализ ясно показывает, как суммарная плата распределяется между издержками на генерацию, издержками на мощность и сетевыми издержками. При этом определяется, в каких узлах и какие мощности вводить и какие линии расширять, что играет центральную роль при анализе долгосрочного развития ЭЭС. Кроме того, определяется рента за использование водных ресурсов и выявляются неэффективные мощности, также как и неэффективные участки сети (возможно, подлежащие демонтажу).

Вместе с тем следует отметить, что полученные результаты являются предварительными и требуют дальнейшего уточнения, осмысления и приложения к конкретным задачам развития электроэнергетических систем и объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев Л.С., Подковальников С.В., Савельев В.А., Чудинова Л.Ю.* Эффективность межгосударственных электрических связей. Новосибирск: Наука, 2008.
2. *Подковальников С.В., Савельев В.А., Хамисов О.В., Чудинова Л.Ю.* Обоснование эффективности межгосударственных энергообъединений с разделением эффектов между участниками // АиТ. 2018. № 10. С. 26–38.

   Podkoval'nikov S.V., Savel'ev V.A., Khamisov O.V. et al. Justification of Effectiveness of International Power Interconnections with Separation of Effects between Participants// Autom. Remote Control. 2018. V. 79. P. 1756–1766.
3. *Подковальников С.В., Савельев В.А., Чудинова Л.Ю.* Исследование системной энергоэкономической эффективности формирования межгосударственного энергообъединения Северо-Восточной Азии // Известия РАН. Энергетика. 2015. № 5. С. 16–32.
4. *Давидсон М.Р., Селезнев А.В.* Математическая модель расчета ценовых индикаторов в задаче выбора состава генерирующего оборудования в условиях конкурентного рынка электроэнергии в России // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 61–70.

5. *Васьковская Т.А.* Вопросы формирования равновесных узловых цен оптового рынка электроэнергии // Электрические станции. 2017. № 1. С. 25–32.
6. *Chen L., Suzuki H., Wachi T., Shimura Y.* Components of Nodal Prices for Electric Power Systems // IEEE Transactions on Power Systems. 2002. V. 17. No. 1. P. 41–49.
7. *Bjørndal E., Bjørndal M., Cai H.* Nodal Pricing in a Coupled Electricity Market // Bergen, Norway: Norwegian school of economics. 2014.

   https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/217640/1/DiscussionPaper.pdf
8. *Hirth L.* The European electricity market model EMMA. Model documentation. Version 2017-07-12. https://neon-energie.de/emma-documentation.pdf
9. *Bowen B.H., Sparrow F.N., Yu Z.* Modelling electricity trade policy rof the twelve nations of the Southen African Power Pool (SAPP) // Utilities Policy. 1999. V. 8. No. 3. P. 183–197.
10. *Chang Y., Li Y.* Power generation and cross-border grid planning for the integrated ASEAN electricity market: a dynamic linear programming model // Energy Strategy Reviews. 2013. V. 2. P. 153–160.
11. *Otsuki T., Isa A.B.M., Samuelson R.D.* Electric power grid interconnection in Northeasst Asia: a quantitative analysis of opprtunities and challenges // Energy Policy. 2016. V. 89. P. 311–329.
12. *Schaber K., Steinke F., Hamcher Y.* Transmission grid extensions for the integration of variable renewable energies in Europe: who benefits where? // Policy Energy. 2012. V. 43. P. 123–135.
13. *Watcharejyothin M., Shrestha R.M.* Effects of cross-border power trade between Laos and Thailand: energy security and environmental implications // Energy Policy. 2009. V. 37. P. 1782–1792.
14. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Издательство «Факториал Пресс», 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 10.07.2021

После доработки 23.12.2021

Принята к публикации 26.01.2022