

© 2022 г. И.В. ЧЕРНОВ, канд. техн. наук (ichernov@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СЦЕНАРНЫЙ АНАЛИЗ УЯЗВИМОСТИ ПРИ УПРАВЛЕНИИ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

Представлены результаты разработки методологии сценарного анализа уязвимости сложной системы. Рассмотрена иерархия понятий, характеризующих уязвимость сложной системы. Предложена система формальных моделей, которая представляет собой общую модель уязвимости. Выделены различные типы уязвимости, которые могут привести к нарушению целевого функционирования элементов системы и/или повреждению структуры системных отношений. Для имитационной модели представлено математическое исследование, которое дает возможность провести сценарный анализ обнаружения уязвимости изучаемой сложной системы.

Ключевые слова: управление безопасностью, сценарная система, модель уязвимости, сложная система, базисный сценарий.

DOI: 10.31857/S0005231022050099, **EDN:** ABWIDJ

1. Введение

К существенным отличительным чертам сложной системы (СС) как объекта управления можно отнести большое число ее элементов и не всегда очевидные связи между ними; зачастую большое количество различных исследуемых аспектов и связанных с ними показателей и параметров; наличие неопределенности; подвижность структуры, обусловленную высокой степенью вариативности элементов и их взаимосвязей; проблемы мониторинга и управления; принципиальную сложность построения точных математических моделей. Важнейшей особенностью систем рассматриваемого класса является также то, что их ключевым элементом является человек, одновременно выступающий и как субъект, и как объект управления. Характерным примером систем данного класса является социально-экономическая система в масштабах государства, административно-территориального образования, отрасли и т.д.

Исследователи выделяют ряд задач управления безопасностью, решаемых в зависимости от внутренней ситуации и влияния внешней среды на состояние и развитие СС [1]. Наиболее общие задачи на этапе принятия решений — задачи мониторинга, прямого управления и поиск решения обратной задачи управления. В настоящей статье СС рассматривается в качестве объекта управления, при этом используется его модельное описание как формальной системы [2–4].

Специфические задачи решаются на этапе исполнения решений, являющихся по сути управленческими воздействиями. Цель разработки предлагаемой методологии — синтез сценариев поведения СС как объекта управления, приводящих к достижению поставленной цели или желаемого результата. Поиск эффективного управления осуществляют на основе методологий системного и управленческого анализа; наиболее современными подходами являются сценарные модели и методы.

Сценарное исследование представляет собой современный метод изучения процессов функционирования и прогнозирования развития СС. При этом в качестве основного инструмента исследования выступают формализованные процедуры формирования и анализа сценарного множества в различных стратах СС, а целью исследования является синтез сценария с заданными свойствами [2–5].

Технология проведения сценарного исследования содержит три основные стадии: формирование сценарной системы, сценарный анализ сгенерированного с ее помощью спектра сценариев, сценарный синтез, т.е. выбор сценария по заданным критериям [4].

Сценарная система представляет собой комплекс взаимосвязанных компонентов. Сценарная система позволяет от экспертных перейти к формализованным описаниям важнейших элементов модели исследования СС: предметной области с определением экспертно-значимых событий, динамической модели преобразования состояний, модели учета неопределенности, правил выбора сценарных элементов. Центральным элементом сценарной системы является модель совместного поведения объекта исследования и внешней среды [4]. Каждая подобная модель отвечает за формализованное представление факторов, отражающих динамику развития и изменение состояния реального объекта. Основным инструментом являются методы формального конструирования сценария и операций над его составными частями. Подобные инструменты являются развитием классических схем исследования операций.

В качестве инструмента научного исследования и практического использования сценарная методология включает в себя следующие основные составляющие: сценарная система, система сценарного анализа и система сценарного синтеза. Результат применения указанного инструментария – спектр сценариев функционирования и развития изучаемого объекта, представленного в виде формальной СС.

Построение сценарной системы представляет собой ряд формализованных процедур: выделение системных элементов (СЭ) сценарной системы, в том числе активных; формирование метанабора описания СЭ; определение сценарных шкал и характеристик элементов сценария.

Система сценарного анализа реализует: определение цели и желательных с точки зрения заданных критериев характеристик сценариев достижения цели; формализацию и стратификацию предметной области; формирование

экспертно-значимых разбиений предметной области; определение различного рода неопределенностей, определение их влияния, стратегий построения сценариев, а также критериев их оценки; реализацию формальных действий со сценариями; интерпретацию результатов проведенного анализа на языке предметной области.

Система сценарного синтеза реализует: определение концепции формирования сценария; выбор сценарных характеристик; определение сценарных инструментов синтеза; применение формальных операций над сценариями; синтез оптимальных характеристик сценария в смежных сценарных пространствах; интерпретацию сформированного сценария.

Подсистема сценарного исчисления представляет собой операционную среду, посредством которой может быть определен и выполнен ряд формальных функциональных преобразований. Трансформации могут подвергнуться отдельные элементы сценариев, сценарий в целом, элементы сценарной системы. В рамках сценарного исчисления рассматриваются вопросы полноты, непротиворечивости, математические характеристики системы сценарных операций.

В статье представлены исходные теоретические результаты сценарного исследования уязвимости СС, развитие которых предполагается в дальнейших публикациях.

2. Концептуальная модель уязвимости сложной системы

Уязвимость сложной системы следует рассматривать с учетом как ее внутренних характеристик, так и характеристик внешней среды. По сути, необходимо исследовать степень открытости объекта управления, рассматриваемого как СС, комплексному спектру воздействий и структуре его взаимосвязей с внешней средой. С этой точки зрения в модель объекта управления целесообразно включать факторы внешней среды и соответствующие им взаимосвязи. Особую актуальность такой подход приобретает при стратегическом управлении, одним из основных направлений которого является процесс установления таких долгосрочных устойчивых связей объекта управления и внешней среды, которые делают возможным реализацию поставленных целей. Стратегическое управление может как способствовать созданию уязвимостей, так и оказывать на них компенсирующее влияние или даже купировать при помощи направленных воздействий. Другой стороной стратегического управления является создание возможностей для реализации целей. В статье предлагается рассматривать стратегическое управление как процесс, повышающий управляемость сложной системы и снижающий ее уязвимость. В качестве одного из основных инструментов стратегического управления должны использоваться методы изменения структуры взаимосвязей объекта управления.

Разработка методов исследования уязвимости требует пояснения иерархии понятий, определяющих ее сущность: опасность, безопасность, угроза.

Под опасностью обычно понимают возможность возникновения обстоятельств, при которых материя, поле, энергия, информация или их сочетание могут таким образом повлиять на СС, что влечет за собой ухудшение или даже невозможность ее функционирования и развития [1]. При этом безопасность существования СС можно определить как динамическое состояние исследуемой системы, при котором могут быть предотвращены опасные состояния. Под угрозой понимается потенциально возможное событие, действие (воздействие), процесс или явление, которые могут привести к нанесению ущерба чьим-либо интересам. Таким образом, при реализации угрозы система переходит в опасное состояние.

Весь спектр возможных сценариев поведения СС описывается динамическими изменениями выделенных факторов и определяется структурой системы. При этом подмножество нежелательных сценариев определяет уязвимость системы. Следовательно, при анализе уязвимости необходимо выделить множество возможных сценариев. Для этого на начальном этапе необходимо построить, а затем исследовать модель сложной системы.

Концептуальная модель сценарного исследования уязвимости СС содержит следующие основные компоненты:

- формальная модель сложной системы [4];
- модель безопасности функционирования и развития СС;
- модели угроз;
- общая модель уязвимости СС.

В основу формального аксиоматического определения модели СС как объекта организационного управления положено понятие системного элемента [4], которое содержит:

- подмножество элементов исходной системы, сгруппированных по критериям, зависящим от целей исследования системы (субстрат системного элемента);
- набор отношений (внутренняя структура системного элемента);
- набор свойств, приписываемых отношениям (внутренний концепт системного элемента).

Для каждого системного элемента $\alpha \in \hat{A}$ определим: $S_\alpha = (B_\alpha, r_\alpha, p_\alpha)$, $B_\alpha \subseteq A_s$, $r_\alpha \subseteq R_s$, $p_\alpha \subseteq P_s$, где A_s – субстрат системы; R_s – структура системы; P_s – внутренний концепт системы. Внутреннее состояние внешней среды системы обозначим $\chi = (B_E, r_E, p_E)$, при этом $B_E \subseteq A_E$, $r_E \subseteq R_E$, $p_E \subseteq P_E$, где A_E – субстрат внешней среды системы, R_E – структура внешней среды системы, P_E – внутренний концепт внешней среды системы.

Пусть $Y(S)$ – множество внутренних состояний системы, тогда $\nu \in Y(S)$ – внутреннее состояние системы $\nu = \bigcup_{\alpha \in \hat{A}} S_\alpha$. Обозначим $E(\nu)$ – внешняя среда, а $X(S)$ – множество состояний внешней среды системы, так что каждое состояние $\chi \in X(S)$. Тогда каждое расширенное состояние системы z определяется как совокупность внутреннего состояния системы и состояния внешней среды $z = (\chi, \nu)$. При этом расширенный субстрат системы определяется

как $A_{SE} = A_S \times A_E$. Это дает возможность исследовать уязвимость сложной системы на единой модели, которая включает расширенную структуру системы $R_{SE} = R_S \times R_E$, а также расширенный концепт системы $P_{SE} = P_S \times P_E$. В таком случае исследованию подвергается множество расширенных состояний системы Z , так что $z \in Z$, а также совместные характеристики СС и внешней среды ζ_{AE} .

2.1. Модель безопасности функционирования и развития СС

Модель безопасности СС содержит условия безопасности, классификацию ситуаций опасности, а также возможности обеспечения безопасности функционирования и развития.

Множество Z расширенных состояний системы представим в виде

$$(1) \quad Z = Z^{(\text{nav})} \cup Z^{(\text{sec})},$$

где $Z^{(\text{nav})}$ – множество недопустимых состояний. Тогда множество $Z^{(\text{sec})}$ является множеством безопасности системы S .

Пусть задано расширенное состояние $\mathbf{z}$ системы S , а также прогноз $\zeta \in \Xi$ возможных ее переходов в следующее состояние $\theta = (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u})$ при применяемом управлении $\mathbf{u} \in U$. Рассмотрим характеристику возможных состояний системы при применении управления $\mathbf{u} \in U$.

Штатная ситуация — ситуация, которая находится в заданных пределах целевого режима функционирования и развития (ЦРФ)

$$(2) \quad \theta = (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{sec})} \quad \forall \zeta \in \Xi.$$

Ситуация ожидаемой опасности — ситуация, при которой лицо, принимающее решение (ЛПР), прогнозирует возможный выход за пределы безопасности СС (т.е. выход системы из безопасного состояния)

$$(3) \quad \exists \zeta \in \Xi, \text{ что } \theta = (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{nav})} \text{ при применяемом управлении } \mathbf{u} \in U.$$

Кризисная ситуация — ситуация выхода системы за пределы безопасности, причем для обеспечения безопасного функционирования СС существуют несколько вариантов управленческих воздействий

$$(4) \quad \theta = (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{sec})} \quad \text{при } \mathbf{u} \in U^{(\text{sec})} \subseteq U.$$

Критическая ситуация — ситуация выхода системы за пределы безопасности, причем для обеспечения безопасного функционирования системы существует единственный вариант управления

$$(5) \quad \begin{aligned} \theta &= (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}^{(\text{sec})}) \in Z^{(\text{sec})} \quad \text{при } \mathbf{u}^{(\text{sec})} \in U, \\ \theta &= (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{nav})} \quad \text{при } \mathbf{u} \neq \mathbf{u}^{(\text{sec})} \in U. \end{aligned}$$

Неконтролируемая ситуация — ситуация, которая возникает при обнаружении выхода значений ряда параметров СС за допустимые, с точки зрения обеспечения безопасности, пределы. При этом невозможно найти такие управленческие решения, которые позволят избежать выхода СС в целом из безопасного состояния и проявления связанных с ним негативных последствий (кризисов, чрезвычайных и критических ситуаций, аварий, катастроф и т.д., а также ущербов различного типа недопустимого масштаба).

$$(6) \quad \theta = (\mathbf{z}, \zeta, \mathbf{u}) \in Z^{(\text{nav})} \quad \text{при} \quad \forall \mathbf{u} \in U.$$

Чрезвычайная ситуация (ЧС) — неблагоприятное сочетание факторов и обстоятельств, нарушающих условия безопасности, т.е. выполняется соотношение (6).

2.2. Модели угроз

Рассмотрим системный элемент S_α $\alpha \in \hat{A}$. Для этого системного элемента определим угрозу $\zeta \in \Gamma^{(\alpha)} \subseteq \Xi$ как фактор или действие, активизация которого гипотетически может привести к реализации нежелательных ситуаций с точки зрения исследователя или ЛПР. Если рассматривается СС в качестве формальной системы, то угрозой является совокупность влияний факторов системы и внешней среды, которые способны привести к существенному ухудшению состояния параметров этой системы.

Модель “Угроза-возмущение”.

Моделируется вызванное угрозами распространение возмущений по структуре СС, отражаемое изменением значений отдельных ее параметров. В этой модели множество возможных несанкционированных изменений расширенного состояния $\mathbf{z} \in Z$ системы S можно рассматривать в качестве множества возможных угроз $\zeta \in \Gamma^{(\alpha)} \subseteq \Xi$. При этом для системных элементов исследуется возможность выхода за пределы безопасности.

Модель “Угроза-ЧС”.

В качестве угрозы в модели “Угроза-ЧС” определим возможность возникновения нежелательных ситуаций $Z^{\zeta(\text{nav})} \subseteq Z^{(\text{nav})}$, т.е. возможность существования последовательности состояний (ситуаций) $W(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_N, N)$, при которой $\mathbf{z}_N \in Z^{(\text{nav})}$ — области нежелательных ситуаций. Целью обнаружения угроз является идентификация нежелательных возмущений, которые генерируют множество недопустимых событий $Z^{\zeta(\text{nav})} \subseteq Z^{(\text{nav})}$. Таким образом, решается обратная задача управления.

2.3. Общая модель уязвимости СС

Пусть имеются:

- множество системных элементов S_α $\alpha \in \hat{A}$ системы S в текущий момент времени t ;
- множество реализуемых по отношению к компоненте S_α $\alpha \in \hat{A}$ угроз $\zeta \in \Gamma^{(\alpha)}$;

- целевой режим функционирования C_α компоненты S_α ;
- область безопасности функционирования и развития $Z^{(\text{sec})}$;
- меры удаленности $\rho_\alpha(\mathbf{z}(t), C_\alpha)$ текущего состояния $\mathbf{z}_\alpha(t)$ от ЦРФ C_α ;
- допустимая граница удаленности ε_α ;
- мера удаленности $\rho_S(Z^{(\text{sec})}, \rho_\alpha)$ от области безопасности $Z^{(\text{sec})}$;
- величина ущерба $W(\rho_\alpha(\mathbf{z}(t), C_\alpha))$ при удаленности текущего состояния $\mathbf{z}_\alpha(t)$ от ЦРФ C_α .

Определение 1. Системный элемент $S_\alpha \in S$ назовем уязвимым, если для его режима функционирования возможен выход из области безопасности $Z^{(\text{sec})}$ реализации существующей угрозы $\zeta \in \Gamma^{(\alpha)}$

$$(7) \quad \rho_S(Z^{(\text{sec})}, \rho_\alpha) > \varepsilon_\alpha.$$

Определение 2. Коэффициентом уязвимости $C_\alpha^{(\mathbf{z})}(\zeta, \Delta)$ системного элемента S_α назовем величину ущерба $D(\rho_\alpha(\mathbf{z}(t), C_\alpha))$, который может возникнуть в случае осуществления угрозы $\zeta \in \Gamma^{(\alpha)}$ на временном отрезке Δ .

Следовательно, появляется возможность вычисления следующих величин [6]:

- минимального коэффициента уязвимости для множества угроз $\Gamma^{(\alpha)}$

$$C_\alpha^{(\mathbf{z}, \min)}(\zeta, \Delta) = \min_{\zeta \in \Gamma^{(\alpha)}} C_\alpha^{(\mathbf{z})}(\zeta, \Delta);$$

- максимального коэффициента уязвимости для множества угроз $\Gamma^{(\alpha)}$

$$C_\alpha^{(\mathbf{z}, \max)}(\zeta, \Delta) = \max_{\zeta \in \Gamma^{(\alpha)}} C_\alpha^{(\mathbf{z})}(\zeta, \Delta);$$

- минимального коэффициента уязвимости для компонентов СС

$$C^{(\mathbf{z}, \min)}(\zeta, \Delta) = \min_{\alpha \in \hat{A}} C_\alpha^{(\mathbf{z}, \min)}(\zeta, \Delta);$$

- максимального коэффициента уязвимости для компонентов СС

$$C^{(\mathbf{z}, \max)}(\zeta, \Delta) = \max_{\alpha \in \hat{A}} C_\alpha^{(\mathbf{z}, \max)}(\zeta, \Delta).$$

3. Исследование уязвимости методами сценарного анализа для графовой модели

Описание динамики поведения формальной системы проведем на основе аппарата операторных графов, в частности знаковых, взвешенных и функциональных графов [4].

3.1. Описание модели

Формальную систему (модель объекта управления и внешней среды) S представим в виде орграфа $G(Z, A)$. Для каждой вершины подобной модели можно определить параметр z_j . Определим в качестве расширенного состояния СС пару $(\mathbf{z}, A)$, в котором вектор-столбец $\mathbf{z} = \{z_j, 1 \leq j \leq n = \tilde{N}\}$ задает значения исследуемых параметров; расширенная структура R_{SE} системы задана матрицей смежности A : элемент a_{ij} ($i, j \in \tilde{N}$) определяет свойства (факт и характер) попарной взаимосвязи между элементами z_i и z_j .

Для сценарного исследования оперирующая сторона (субъект управления) располагает следующими средствами анализа на временном горизонте $\Delta = [0, T]$, зафиксированными в квазиинформационной гипотезе (КИГ) [4]:

- измерять состояния системы $(\mathbf{z}(\tau), A(\tau))$ в моменты времени $\tau \in \Delta$;
- на основе заданного критерия $Q^{(\text{зн})}(\tau)$, $\tau \in \Delta^{(\text{зн})} \subseteq \Delta$, сформулированного в КИГ, выделять экспертно-значимые состояния (события) $\mathcal{J}^{(\text{зн})} = (\mathbf{z}^{(\text{зн})}(\tau), A^{(\text{зн})}(\tau))$ и фиксировать их избранную временную последовательность в виде последовательности экспертно-значимых событий (ЭЗС) – сценария поведения системы $\mathcal{J}^{(\text{зн})}(\tau) = \{(\mathbf{z}^{(\text{зн})}(\tau), A^{(\text{зн})}(\tau)), \tau \in \Delta^{(\text{зн})}\}$, в частности, при $\Delta^{(\text{зн})} = \Delta$ последовательность $\mathcal{J}(\tau) = \{(\mathbf{z}(\tau), A(\tau)), \tau = 0, 1, \dots, T\}$ представляет собой пошаговую последовательность событий за период Δ (пошаговый детерминированный сценарий поведения системы) [4];
- в каждый момент времени $\tau \in \Delta$ определять мгновенные изменения состояния, в том числе:
 - выделять мгновенные изменения $\delta \mathbf{I}(\tau) \subseteq E^n$ значений параметров $\mathbf{v}(\tau)$ в вершинах X орграфа $G(X, E)$ (мгновенные импульсы) и группировать их в виде k -шагового процесса импульсных возмущений, начатого в момент времени t : $\delta \mathbf{Im}(t, k) = (\delta I_j(\tau), 1 \leq j \leq n; t \leq \tau \leq t + k)$, при этом процесс импульсных возмущений $\delta \mathbf{Ia}(t)$ с началом в момент времени t будем называть автономным, если $\delta \mathbf{Ia}(\tau) = 0, \tau > t$;
 - определять мгновенные изменения $\delta A(\tau) \subseteq E^{n \times n}$ структуры $A(\tau)$, т.е. элементов матрицы смежности орграфа $G(X, E)$ (мгновенные изменения структуры) и группировать их в виде k -шагового процесса структурных возмущений, начатого в момент времени t : $\delta \Phi(t, k) = (\delta A(\tau), t \leq \tau \leq t + k)$; процесс структурных возмущений $\delta Aa(t)$, для которого $\delta Aa(\tau) = 0, \tau > t$, назовем автономным с началом в момент времени t ;
 - регистрировать k -шаговый процесс комплексных возмущений, начатый в момент времени t : $\delta K(t, k) = (\delta \mathbf{Im}(t, k), \delta \Phi(t, k))$;
- определять структуры неопределенности, в том числе:
 - на множествах $\delta \mathbf{I}(\tau) \subseteq \Omega \delta \mathbf{I}(\tau)$ в виде квазиинформационной гипотезы возможных мгновенных импульсов в моменты времени $t \geq \tau$;

- на множествах $\delta A(\tau) \in \Omega \delta A(\tau)$ в виде квазиинформационной гипотезы возможных структурных изменений в моменты времени $t \geq \tau$;
- на множествах $\delta K(\tau) \in \Omega \delta K(\tau)$ в виде квазиинформационной гипотезы возможных совместных изменений в моменты времени $t \geq \tau$.

Импульсные возмущения моделируют спонтанные возмущения или управленческие воздействия, вносимые в вершинах орграфа $G(Z, A)$.

Структурные возмущения моделируют спонтанные изменения или управления элементов матрицы смежности, реализованные на дугах в момент времени τ .

Комплексные возмущения моделируют совместную реализацию обоих процессов.

Критерии выделения ЭЗС и структуры неопределенности позволяют определять условия формирования сценария, в том числе выбора эффективных сценариев в прикладных моделях системной динамики. Основные сценарные характеристики, которые определяют системные параметры устойчивости, стойкости и живучести, предложены в [3, 4, 7].

В зависимости от способа преобразования состояний, указанного в динамической модели системы, их изменение можно представить в каждый момент времени $\tau \in \Delta$ в виде:

- накопленных изменений значений параметров $\mathbf{I}(\tau) = \mathbf{z}(\tau) - \mathbf{z}(\tau - 1)$, $t \leq \tau \leq t + k$, и фиксировать их в виде k -шагового импульсного процесса изменений (ИПИ) $\mathbf{Im}(t, k) = (\mathbf{I}(\tau))$, $t \leq \tau \leq t + k$;
- накопленных структурных изменений $aA(\tau) = A(\tau) - A(\tau - 1)$, $t \leq \tau \leq t + k$, и фиксировать их в виде k -шагового процесса структурных изменений (СПИ) $\Phi(t, k) = (aA(\tau))$, $t \leq \tau \leq t + k$;
- накопленных комплексных изменений $K(\tau)$ и фиксировать их в виде комплексного процесса изменений (КПИ) $K(t, k) = (\mathbf{Im}(t, k), \Phi(t, k))$ [6].

Динамическую модель распространения возмущений и преобразования состояний определим следующими соотношениями при $\tau = 1, 2, \dots$:

$$(8) \quad \mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau - 1) + \mathbf{I}(\tau),$$

$$(9) \quad A(\tau) = A(\tau - 1) + \delta A(\tau),$$

причем накопленный импульс определяется выражением

$$(10) \quad \mathbf{I}(\tau) = A(\tau - 1)\mathbf{I}(\tau - 1) + \delta \mathbf{I}(\tau).$$

Здесь $\mathcal{J}(\tau) = (\mathbf{z}(\tau), A(\tau))$ – текущее состояние системы в момент времени τ ;

- $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^{(0)}$ – начальные значения параметров,
- $\mathbf{z}(t)$ – текущее расширенное состояние системы в момент времени t ;
- $A(\tau)$ – матрица смежности в момент времени τ ;
- $\mathbf{I}(\tau)$ – импульс, накопленный к моменту времени τ ,
- $\mathbf{Im}(0) = \delta \mathbf{Im}(0)$ – начальный импульс;
- $\delta \mathbf{I}(\tau)$ – мгновенный импульс в момент времени $\tau = 0, 1, 2, \dots$.

Преобразование состояний системы происходит по следующему алгоритму в момент времени $\tau = 1, 2, \dots$:

- на вход алгоритма подаются состояние $\mathfrak{I}(\tau - 1)$ и накопленный импульс $\mathbf{I}(\tau - 1)$;
- вносится текущий мгновенный импульс $\delta\mathbf{I}(\tau)$;
- вычисляется текущий накопленный импульс по правилу (10);
- по правилу (8) вычисляются текущие значения параметров $\mathbf{z}(\tau)$;
- вносится структурное аддитивное изменение (возмущение) $\delta A(\tau)$, и матрица смежности преобразуется по правилу (9);
- проверяется условие завершенности горизонта сценария $t = T$: в случае $t < T$ проводится очередной шаг; в случае $t = T$ процесс завершается.

Пусть задан комплексный процесс возмущений. Тогда в соответствии с указанным алгоритмом преобразования состояний системы (8)–(10) может быть получена последовательность состояний $\mathfrak{I}(\delta K(t, k))$, $\mathfrak{I}(\delta K(\tau, k)) = \{(\mathbf{z}(\tau), A(\tau)) \text{ при } t \leq \tau \leq t + k\}$, которую назовем *k-шаговым детерминированным сценарием* развития системы (8)–(10), соответствующим комплексному процессу возмущений $\delta K(t, k)$.

3.2. Математическое исследование процессов на взвешенном орграфе

Рассмотрим математические свойства системы (8)–(10) при постоянной матрице смежности.

Сформулируем свойства преобразования состояний системы (8)–(10) при реализации импульсного процесса возмущений $\delta\mathbf{Im}(t, k)$.

1. Для любого импульсного процесса изменений $\mathbf{Im}(t, T)$ справедливо равенство $\mathbf{I}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t - 1) = \sum_{\tau=0}^t A^{t-\tau} \delta\mathbf{I}(0) = \mathbf{f}(A, t)$ для всех $t = 1, 2, \dots, T$, $\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau - 1) + \mathbf{I}(\tau)$, где $\delta\mathbf{Im}(t, k) = (\delta\mathbf{I}(\tau), t \leq \tau \leq t + k)$ – импульсный процесс возмущений.

2. Пусть задан $\delta\mathbf{Ia}(t_0)$ – автономный импульсный процесс возмущений (АИПВ).

Процессу $\delta\mathbf{Ia}(t_0)$ соответствуют:

- k -шаговый процесс изменений $\mathbf{Ia}(t_0, k)$ $\mathbf{Ia}(t_0 + \tau) = A^\tau \delta\mathbf{Ia}(t_0)$ для всех $\tau = 1, 2, \dots, k$,
- пошаговый сценарий $\mathfrak{R}(\delta\mathbf{Ia}(t_0))$ с ЭЗС $\mathbf{z}(t)$

$$\Delta\mathbf{z}(t_0, \tau) = \mathbf{z}(t_0 + \tau) - \mathbf{z}(t_0) = \left[\sum_{i=1}^{\tau} A^i \right] \delta\mathbf{Ia}(t_0),$$

при этом выполнено: $(E - A)\Delta\mathbf{z}(t_0, \tau) = (E - A^{\tau+1})\delta\mathbf{Ia}(t_0)$, $\tau = 1, 2, \dots, k$.

3. Пусть существует матрица $(E - A)^{-1}$. Тогда для автономного импульсного процесса возмущений $\mathbf{Ia}(t_0)$ выполнено

$$\Delta\mathbf{z}(t_0, \tau) = (E - A)^{-1} (E - A^{\tau+1}) \delta\mathbf{Ia}(t_0), \quad \tau = 1, 2, \dots$$

Доказательство получаем методом математической индукции.

Накопленный импульс и текущее состояние могут быть получены с использованием приведенных выше выражений. Таким образом, можно перейти от разностных соотношений (8)–(10) к векторному уравнению изменения

состояний, что позволяет рассматривать величины $\delta \mathbf{I}(\tau)$ как внешние возмущения или управления. Поскольку в КИГ предполагается детерминированность преобразования состояний, то, налагая условия следования ЭЗС $\mathbf{z}(t)$ в виде ограничений на функцию изменения импульсов $\mathbf{f}(A, t)$ или иные условия осуществления импульсных процессов, можно получать различные сценарии функционирования СС, отражающие различные ситуации и внешние условия.

3.3. Представление импульсных процессов в жордановом базисе

Рассмотрим матрицу A как линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве E^n . Выберем базис B в E^n , в котором матрица A представляется квазидиагональной верхней жордановой формой J_A :

$$J_A = \left\{ J_A^{(\xi)}, \xi = \overline{1, s} \right\}, \quad J_A^{(\xi)} = \lambda_\xi E_{p(\xi)} + H_{p(\xi)},$$

где $\lambda = \{\lambda_\xi\}$ – вектор собственных значений матрицы A , $p(\xi)$ – размерности соответствующих корневых подпространств L^ξ , $E_{p(\xi)}$ – единичные матрицы размерности $p(\xi)$, $H_{p(\xi)}$ – матрица размерности $p(\xi)$ с единичными наддиагональными элементами, остальные ее элементы равны нулю [8]. Базис B можно выбрать как объединение базисов B_ξ корневых подпространств. Тогда выполнено соотношение

$$(11) \quad \sum_{k=1}^s n_k = n, \quad E^n = \sum_{k=1}^S L^{n_k}, \quad B = \bigcup_{k=1}^S B_k.$$

Пусть задано жорданово разложение матрицы смежности $A = Q_A J_A Q_A^{-1}$, где система векторов $\mathbf{q}_A^{(\xi, p)}[\xi = \overline{1, s}; p = \overline{1, p(\xi)}]$ является жордановым базисом (столбцы матрицы Q_A и строки матрицы Q_A^{-1}). Здесь J_A – жорданова форма матрицы A , ξ – номер жордановой клетки, p – высота корневого вектора матрицы A , $p(\xi)$ – размерность ξ -й жордановой клетки, s – их количество, т.е.

$$(A - \lambda_\xi E)^p \mathbf{q}_A^{(\xi, p)} = \sum_{k=0}^p C_p^k \lambda_\xi^k A^{p-k} \mathbf{q}_A^{(\xi, p)} = 0, \quad p = \overline{1, p(\xi)} \quad \text{для каждого } \xi = \overline{1, s}.$$

Положим

$$\mathbf{z}^{(A)}(t) = Q_A^{-1} \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{I}^{(A)}(t) = Q_A^{-1} \mathbf{I}(t), \quad \delta \mathbf{I}^{(A)}(t) = Q_A^{-1} \delta \mathbf{I}(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots,$$

т.е. введенные величины представляют собой текущее и исходное состояния, а также текущий накопленный и начальный импульсы, записанные в жордановом базисе матрицы A .

Рассчитаем суммарную матрицу $J_{\Sigma A}$ и вариацию изменений при различных вариантах жордановых клеток размерности $p(\xi)$:

С л у ч а й 1. $\delta_\xi \neq 1$, λ_ξ – действительное число.

Поскольку $\det(E - J_{\xi d}) = (1 - \lambda_\xi)^{p(\xi)} \neq 0$, то $J_{\Sigma A} = (E - J_A)^{-1}(E - J_A^{t+1})$ при $J_A = J_{\xi d}$. По индукции можно показать, что

$$\left[(E - J_{\xi d})^{-1}\right]_{ik} = (-1)^{k-i+1} (\lambda_\xi - 1)^{i-k-1}, \quad i, k = 1, 2, \dots, p(\xi)$$

и

$$\left[-J_{\xi d}^{t+1}\right]_{kj} = -C_{t+1}^{j-k} \lambda_\xi^{t+1+j-k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, p(\xi),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} -\left[(E - J_{\xi d})^{-1} J_{\xi d}^{t+1}\right]_{ij} &= \sum_{k=1}^{p(\xi)} (-1)^{k-i} C_{t+1}^{j-k} \lambda_\xi^{t+1+j-k} (\lambda_\xi - 1)^{i-k-1} = f_{ij}(t, \lambda_\xi), \\ i, j &= 1, 2, \dots, p(\xi). \end{aligned}$$

В частности, при $p(\xi) = 1$ получим $f_{11}(t, 0) = \lambda_\xi^{t+1}(\lambda_\xi - 1)^{-1}$, а при $\lambda_\xi = 0$ $f_{ij}(t, 0) = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, p(\xi)$.

Таким образом, положив $\delta I a_j(t_0) = \alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, p(\xi)$, получим

$$\begin{aligned} \Delta v_i(t_0, t, \lambda, \alpha) &= \sum_{j=1}^{p(\xi)} \left\{ \left[(E - J_{\xi d})^{-1}\right]_{ij} + f_{ij}(t, \lambda) \right\} \alpha_j = \\ &= B_i(\lambda, \alpha) + \sum_{j=1}^{p(\xi)} f_{ij}(t, \lambda) \alpha_j, \end{aligned}$$

где

$$B_i(\lambda, \alpha) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} \left[(E - J_{\xi d})^{-1}\right]_{ij} \alpha_j = \sum_{j=1}^{p(\xi)} (-1)^{j-i+1} (\lambda - 1)^{i-j-1} \alpha_j.$$

В частности,

$$B_i(0, \alpha) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} \alpha_j.$$

С л у ч а й 2. $\lambda_\xi = 1$.

Для поиска используем свойство биномиальных коэффициентов $\sum_{\tau=0}^t C_\tau^k = C_{t+1}^{k+1}$. Получим

$$\Delta v_i^{(A)}(t) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} [J_{\Sigma A}]_{ij} \left[\delta \mathbf{I}^{(A)}(t_0) \right]_j = t \alpha_i + \sum_{j=i+1}^{p(\xi)} C^{j-i} \alpha_j$$

Таблица

$J_{\xi c} =$	$\alpha = \mu_{\xi} \cos(\varphi_{\xi})$	$\beta = \mu_{\xi} \sin(\varphi_{\xi})$
	$-\beta = -\mu_{\xi} \sin(\varphi_{\xi})$	$\alpha = \mu_{\xi} \cos(\varphi_{\xi})$

или при $t \rightarrow \infty$

$$\Delta v_i^{(A)}(t) = t\alpha_i + C^{k-i}\alpha_k + o\left(t^{-(k-i+1)}\right) \quad \text{при } k > i,$$

где $k = \max_j \{\alpha_j \neq 0\}$.

С л у ч а й 3. λ_{ξ} – комплексное число:

$$(12) \quad \lambda_{\xi} = \mu_{\xi} \exp(i\varphi_{\xi}) = \mu_{\xi}(\cos \varphi_{\xi} + i \sin \varphi_{\xi}) \quad \text{для всех } \xi = \overline{1, s},$$

где i – мнимая единица, μ_{ξ} – модуль, а φ_{ξ} – аргумент комплексного числа λ_{ξ} . Сопряженные комплексные собственные числа объединяют в обобщенную жорданову клетку размерности 2 (см. таблицу), чтобы избежать перехода в унитарное пространство. Жорданову форму с обобщенными жордановыми клетками назовем расширенной жордановой формой J_A матрицы A . Для такой клетки действительные собственные векторы строят из комплексно-сопряженных $\mathbf{x}_{\xi}^{(1)}$ и $\mathbf{x}_{\xi}^{(2)}$.

Вычисляя

$$\begin{aligned} D = \det \left[(E - J_{\xi c})^{-1} \right] &= \left[(1 - \mu_{\xi} \cos \varphi_{\xi})^2 + \mu_{\xi}^2 \sin^2 \varphi_{\xi} \right] = \\ &= (1 - \mu_{\xi})^2 + 2\mu_{\xi} (1 - \cos \varphi_{\xi}), \quad \xi = \overline{1, s}, \end{aligned}$$

получим, что матрица вырождена в случае: $\mu_{\xi} = 1$ и $\varphi_{\xi} = 0$, т.е. при действительном $\lambda_{\xi} = 1$. Иначе $D > 0$.

Вычисляя соотношение $J_{\Sigma 2c}$ для матрицы $J_{\xi c}$, получаем

$$(J_{\Sigma \xi c})_{11} = (J_{\Sigma \xi c})_{22} = \left\{ 1 - \mu \cos \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \cos [(t+1) \varphi_{\xi}] + \mu^{t+2} \cos(t\varphi_{\xi}) \right\} / D$$

и

$$(J_{\Sigma \xi c})_{12} = -(J_{\Sigma \xi c})_{21} = \left\{ \mu \sin \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \sin [(t+1) \varphi_{\xi}] + \mu^{t+2} \sin(t\varphi_{\xi}) \right\} / D.$$

Матрица $J_{\Sigma \xi c}$ является кососимметрической. Получаем

$$\Delta v_i^{(A)}(t) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} [J_{\Sigma A}]_{ij} \delta I_j^{(A)}(t_0) = \sum_{j=1}^{p(\xi)} \left[(E - J_{\xi c})^{-1} (E - J_{\xi c}^{t+1}) \right]_{ij} \alpha_j,$$

$$\begin{aligned} \Delta v_1^{(A)}(t) &= \left\{ [1 - \mu \cos \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \cos [(t+1) \varphi_{\xi}] + \mu^{t+2} \cos(t\varphi_{\xi})] \alpha_1 + \right. \\ &\quad \left. + [\mu \sin \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \sin [(t+1) \varphi_{\xi}] + \mu^{t+2} \sin(t\varphi_{\xi})] \alpha_2 \right\} / D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_2^{(A)}(t) &= \left\{ [1 - \mu \cos \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \cos [(t+1) \varphi_{\xi}] + \mu^{t+2} \cos(t\varphi_{\xi})] \alpha_2 - \right. \\ &\quad \left. - [\mu \sin \varphi_{\xi} - \mu^{t+1} \sin [(t+1) \varphi_{\xi}] + \mu^{t+2} \sin(t\varphi_{\xi})] \alpha_1 \right\} / D. \end{aligned}$$

Вектор α нормирован к 1. Следовательно, можно положить $\alpha_1 = \cos \psi$, $\alpha_2 = \sin \psi$, считая ψ варьируемой величиной (управлением). Тогда можно записать следующие функции от t и ψ :

$$\Delta v_1^{(A)}(t) = \left\{ [1 - \mu \cos \varphi_\xi - \mu^{t+1} \cos [(t+1) \varphi_\xi] + \mu^{t+2} \cos(t \varphi_\xi)] \cos \psi + \right. \\ \left. + [\mu \sin \varphi_\xi - \mu^{t+1} \sin [(t+1) \varphi_\xi] + \mu^{t+2} \sin(t \varphi_\xi)] \sin \psi \right\} / D,$$

$$\Delta v_2^{(A)}(\psi) = \left\{ [1 - \mu \cos \varphi_\xi - \mu^{t+1} \cos [(t+1) \varphi_\xi] + \mu^{t+2} \cos(t \varphi_\xi)] \sin \psi + \right. \\ \left. + [\mu \sin \varphi_\xi - \mu^{t+1} \sin [(t+1) \varphi_\xi] + \mu^{t+2} \sin(t \varphi_\xi)] \cos \psi \right\} / D.$$

Разработанная динамическая модель распространения возмущений и преобразования состояний СС на взвешенном орграфе является основой для решения задач синтеза альтернативных сценариев ее развития, приводящих к достижению поставленной цели с учетом выявленных уязвимостей.

4. Заключение

В соответствии с результатами математического исследования подраздела 3.2 представление (12) выделяет следующие типы базисных сценариев динамической системы (8)–(10):

- сценарий роста значения (резонанса): $\mu_\xi > 1$;
- сценарий уменьшения значения: $\mu_\xi < 1$;
- сценарий колебания значения: $\varphi_\xi \neq 0$.

Следующий набор сценариев может быть получен при совмещении базисных сценариев:

- сценарий возрастающего по амплитуде (резонансного) колебания (раскручивающаяся спираль): $\mu_\xi > 1$, $\varphi_\xi \neq 0$;
- сценарий затухающего по амплитуде колебания: $\mu_\xi < 1$, $\varphi_\xi \neq 0$;
- сценарий с чередованием только максимального и минимального значения: $\lambda_\xi = -1$.

Действительно, разложение (11) задает разбиение расширенного фазового пространства на элементарные экспертно-значимые разбиения [4], в каждом из которых реализуется один из указанных типов сценариев развития системы (8)–(10), соответствующий собственному значению λ_ξ . Любой результирующий сценарий развития с математической точки зрения является линейной комбинацией базисных сценариев.

Полученные результаты позволяют в дальнейшем развивать исследования по следующим направлениям: построение алгебры оперирования базисными сценариями; разработка методов выявления окон уязвимости модели (8)–(10); разработка методов выявления мест уязвимости модели (8)–(10); разработка методов управления параметрической уязвимостью СС; разработка методов

управления структурной уязвимостью СС; возможности и особенности применения предложенной методики сценарного исследования уязвимости для систем рассматриваемого класса.

Полученные результаты показали принципиальную возможность создания моделей и формальных методов сценарного анализа уязвимости сложных систем, формирования, анализа характеристик сценариев с целью принятия рациональных решений при управлении процессами их функционирования и развития.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заплатинский В.М.* Терминология науки о безопасности / В.М. Заплатинский [Электронный ресурс] // Zbornik prispevkov z medzinarodnej vedeckej konferencie “Bezpečnostná veda a bezpečnostné vzdelanie” - Liptovský Mikuláš: AOS v Liptovskom Mikuláši. 2006 (CD nosic).
2. *Kononov D.A., Kosyachenko S.A., Kul’ba V.V.* A Scenario Methodology as Connectability from Strategy to Operation in Complex System // SIC J. December 30. 2001. V. 10. No. 4.
3. *Кононов Д.А., Косяченко С.А., Кульба В.В.* Модели и методы анализа сценариев развития социально-экономических систем в АСУ ЧС // АиТ. 1999. № 9. С. 122–136.
Kononov D.A., Kosyachenko S.A., Kul’ba V.V. Analysis of Scenarios of Development of Socioeconomic Systems in Emergency Control Systems: Models and Methods // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. Part 2. No. 9. P. 1303–1320.
4. Модели и методы анализа и синтеза сценариев развития социально-экономических систем / Под. ред Шульца В.Л., Кульбы В.В. Книги 1, 2. М.: Наука, 2012.
5. *Кузнецов Н.А., Кульба В.В., Микрин Е.А. и др.* Информационная безопасность систем организационного управления. М.: Наука, 2006. Т. 1, 2.
6. *Пономарев Н.О., Кононов Д.А., Швецов Д.А., Пономарев Р.О.* Сценарное исследование уязвимости сложных организационно-технических систем // Тр. НИИСИ РАН. М.: НИИСИ РАН, 2014. Т. 4. № 2. С. 61–68.
7. *Kul’ba V.V., Kofoed L.B., Kononov D.A., Zaikin O.A.* Scenario Research of Complex Manufacturing Systems Vulnerability // IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management and Control, Troyes. France. June 28–30. 2016. Preprints Volume. Paper ID: 400–405.
8. *Кононов Д.А., Косяченко С.А., Кульба В.В.* Формирование и анализ сценариев развития социально-экономических систем с использованием аппарата операторных графов // АиТ. 2007. № 1. С. 121–136.
Kononov D.A., Kosyachenko S.A., Kul’ba V.V. Design and Analysis of Development Scenarios of Social Economic Systems with the Application of the Operator Graph Apparatus // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 1. P. 109–123.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 03.09.2021

После доработки 05.11.2021

Принята к публикации 26.01.2022