

© 2022 г. О.П. КУЗНЕЦОВ, д-р техн. наук (olpkuz@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОБ УСЛОВИЯХ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЦЕПЬ АСИНХРОННЫХ ПОРОГОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ¹

Исследуется процесс распространения сигнала в цепи последовательно соединенных асинхронных пороговых элементов. Асинхронность элементов проявляется в том, что они могут иметь различные длительности переключения из пассивного состояния в активное и обратно. Элементы реактивны, т.е. возбуждаются в результате внешних воздействий, и становятся пассивными, когда внешние воздействия отсутствуют. Показано, что при различных соотношениях длительностей переходных процессов включения и отключения элементов длительность сигнала, проходящего по цепи, может сохраняться, увеличиваться или уменьшаться. В последнем случае сигнал через достаточно длинную цепь не проходит. Сформулированы условия прохождения сигнала через цепь.

Ключевые слова: асинхронный пороговый элемент, прохождение сигнала, переходные процессы.

DOI: 10.31857/S0005231022060095, EDN: ADFCXE

1. Введение

Настоящая статья продолжает исследования сетей из асинхронных пороговых элементов, начатые в [1], где элементами сети являлись биологические нейроны, а связи соответствовали химическим взаимодействиям между ними. В [2] предложено обобщение модели [1]: в нем узлы асинхронной сети рассматриваются как абстрактные пороговые элементы, а химические взаимодействия заменены многосортными сигналами. В моделях [1, 2] асинхронность возникает из-за того, что разные элементы имеют разные длительности переходных процессов, т.е. переключений из активного состояния в пассивное и обратно. Это приводит к конкуренции между элементами, хорошо известной в дискретной схемотехнике под названием состязаний (см., например, [3, 4]).

В различных областях важны разные аспекты асинхронности. В дискретной схемотехнике асинхронность порождает состязания, нарушающие нормальную работу схем. Поэтому в ней преобладает принудительная синхронизация переключений элементов. В управлении бизнесом [5] и программировании [6] асинхронный подход повышает эффективность, экономя время: основной процесс управления запускает параллельные процессы и движется

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00190).

дальше, не дожидаясь их окончания. В нейробиологии активно обсуждаются асинхронные процессы распространения сигналов и их синхронизация в нервных системах [7, 8], а также использование асинхронного программирования для их моделирования [9–11].

В данной статье исследуется еще один аспект асинхронности: влияние соотношения длительностей включения и отключения элементов на прохождение сигнала по сети, даже когда элементы одинаковы, а параллельные процессы отсутствуют.

Результаты, изложенные в разделах 3, 4, опубликованы в [12] без доказательств. Ниже публикуются подробные доказательства теорем, приведенных в [12]; в разделе 5 впервые излагается новый метод вычисления протоколов прохождения сигнала по цепи.

2. Основные определения и постановка задачи

Асинхронный пороговый элемент² — это элемент с несколькими входами и одним выходом, который может находиться в двух состояниях — активном и пассивном. В активном состоянии элемент N_i генерирует сигнал мощности d_i .

Состояние $y_i(t)$ элемента N_i определяется значением его *потенциала* $U_i(t)$, изменяющегося в интервале $U_{i0} \leq U_i(t) \leq U_{\max}$, и *порогом* P_i , лежащим в том же интервале:

$$(1) \quad y_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } U_i(t) \geq P_i; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Помимо потенциала и порога, асинхронный элемент обладает другими параметрами — весами w_{ij} входов (i — номер элемента, j — номер входа) и двумя эндогенными скоростями изменения потенциала (v_{ien}^0 для пассивного и v_{ien}^1 для активного состояния). По определению $v_{\text{ien}}^1 > v_{\text{ien}}^0$. Эндогенные скорости не зависят от внешних воздействий; это константы, характеризующие конкретный элемент.

Асинхронный элемент называется реактивным, если обе его эндогенные скорости отрицательны. Он активируется только при наличии достаточно сильных внешних воздействий; при их отсутствии потенциал реактивного элемента стремится к U_{i0} .

Элемент может интерпретироваться как логический элемент электронной схемы или электромагнитное реле, как нейрон в искусственной или биологической нейронной сети, или как агент в моделях социального поведения.

В дальнейшем будут рассматриваться *однородные асинхронные цепи* реактивных элементов, т.е. сети из реактивных элементов N_1, \dots, N_n , в которых 1) выход элемента N_i соединен с единственным входом элемента N_{i+1} ,

² Асинхронные пороговые элементы впервые были рассмотрены в [1, 2]. В [1] они назывались нейронами, а в [2] — агентами.

Таблица 1

| | P | U_{\max} | U_0 | v_{en}^0 | v_{en}^1 | d | w |
|-------|-----|------------|-------|-------------------|-------------------|-----|-----|
| N_0 | | | | | | 1,0 | |
| N_i | 0,5 | 0,9 | 0 | -0,8 | -0,5 | 1,0 | 1,0 |

$i = 1, \dots, n$, и других связей нет³; 2) вход элемента N_1 и выход элемента N_n — внешние для цепи; 3) значения параметров для любого элемента цепи одинаковы, поэтому можно говорить о параметрах цепи. Пример таблицы, задающей параметры цепи, приведен в табл. 1. N_0 — внешний источник возбуждения.

Входное воздействие будем называть сигналом. Сигнал проходит через элемент, если через некоторое время после поступления сигнала на его вход элемент активируется и генерирует выходной сигнал. Сигнал поступает на вход N_i , пока активен N_{i-1} . Сила влияния сигнала характеризуется экзогенной скоростью $s_i(t)$ изменения потенциала N_i , которая пропорциональна мощности d входного сигнала и весу w входа: $s_i(t) = kwdy_{i-1}(t)$. В дальнейшем полагаем $k = 1$. Суммарная скорость v_i изменения потенциала элемента N_i является суммой экзогенной и эндогенной скоростей

$$(2) \quad v_i(t) = s_i(t) + v_{\text{en}}^0 = wdy_{i-1}(t) + v_{\text{en}}^0,$$

если элемент пассивен (потенциал ниже порога), и

$$(3) \quad v_i(t) = s_i(t) + v_{\text{en}}^0 = wdy_{i-1}(t) + v_{\text{en}}^0,$$

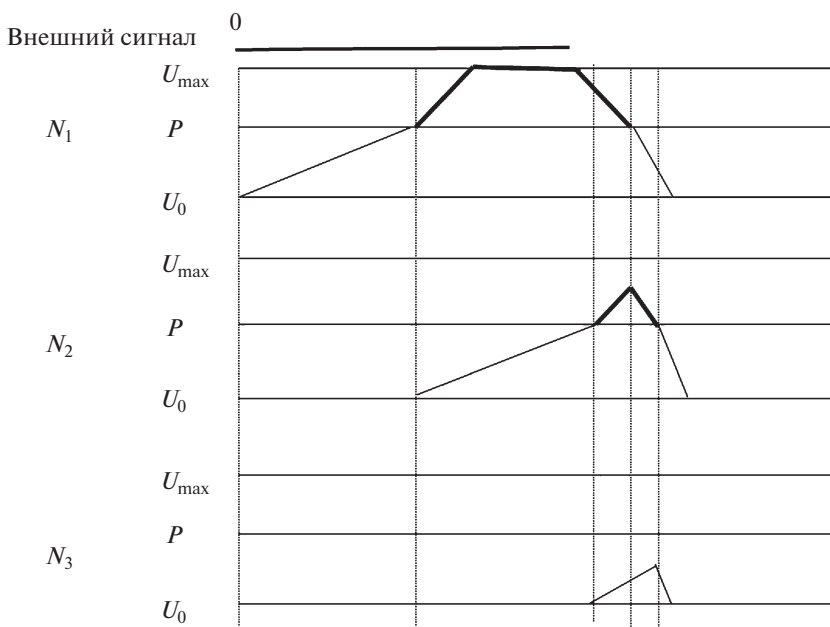
если элемент активен (потенциал выше порога).

Знак скорости означает направление изменения потенциала.

Событием в момент t называется изменение состояния любого элемента цепи, а также достижение U_{i0} или U_{\max} в момент t . Событиям соответствуют точки на шкале непрерывного времени, разбивающие шкалу на отрезки — такты. Границы тактов нумеруются натуральными числами $0, 1, 2, \dots$ и называются дискретными моментами времени. Такт t — это полуинтервал $[t, t + 1]$, длительность которого обозначается как $\tau(t)$. Последовательность событий на непрерывной временной шкале называется *протоколом* функционирования цепи. *Внешним состоянием цепи* называется вектор $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$; *внутренним состоянием* — вектор значений потенциалов элементов $U(t) = (U_1(t), \dots, U_n(t))$.

Функционирование сети из асинхронных элементов, т.е. его протокол, в общем случае вычисляется алгоритмом, описанным в [2]. Для случая асинхронных цепей этот алгоритм упрощается, поскольку сигналы односортны,

³ В [1, 2] рассматриваются многосортные широкополосные связи: сигнал определенного сорта воспринимается всеми элементами, у которых есть входы, чувствительные к этому сорту. В данной работе все сигналы обычные односортные, а связи локальные, т.е. соединяющие ровно два элемента.



Рисунок

все связи имеют стандартный вид (N_i, N_{i+1}) , а изменения потенциалов вычисляются по более простым формулам (2) и (3). Этот алгоритм приведен в [12]. В разделе 5 будет приведен еще более простой алгоритм, не требующий таблиц переходов и связанных с ними понятий, введенных в [2, 12].

В цепи из реактивных элементов нетривиальное поведение может возникнуть только в результате подачи внешнего сигнала на вход N_1 и последовательной активации следующих элементов. *Главная задача, которая исследуется в данной работе: при каких условиях сигнал пройдет через всю цепь, т.е. через некоторое время после подачи сигнала на вход N_1 появится сигнал на выходе N_n ?*

Необходимое условие прохождения сигнала через элемент заключается в том, чтобы сила внешнего воздействия превосходила отрицательную эндогенную скорость, т.е. чтобы суммарная скорость была положительной. Однако этого условия недостаточно; нужно, чтобы сигнал длился достаточно долго, что видно из следующего примера.

Пример 1. На рисунке представлена временная диаграмма функционирования цепи, параметры которой заданы табл. 1, при длительности входного сигнала $Q_0 = 4,5$. Жирными линиями обозначены периоды активности элементов. Видно, что сигнал не проходит уже через третий элемент: длительности активности N_2 недостаточно, чтобы потенциал N_3 достиг порога и N_3 включился. Вертикальные линии соответствуют совпадающим событиям: например, включение N_1 означает начало генерации сигнала, входного для N_2 , и, соответственно, начало роста потенциала N_2 .

Рассмотрим структуру процесса функционирования элемента N_i . Цикл включения-отключения N_i , начинающийся с подачи на его вход входного сигнала, называется *полным*, если он состоит из последовательности пяти фаз (см. график N_1 на рисунке): 1) зарядки (роста потенциала от U_0 до P), 2) роста потенциала от P до U_{\max} ; 3) пребывания потенциала в точке U_{\max} ; 4) разрядки (уменьшения потенциала от U_{\max} до P); 5) падения потенциала до U_0 .

Обозначим длительности этих фаз через $q_{1i}, q_{2i}, q_{3i}, q_{4i}, q_{5i}$, где $i = 1, \dots, n$ – номер элемента. Фазы 1 и 2 называются полными в данном цикле, если за ними следуют фазы 2 и 3 соответственно; фазы 4 и 5 полны, если им предшествуют фазы 3 и 4 соответственно. Если цепь однородна, а фазы 1, 2, 4, 5 полны, то их длительности выражаются формулами (4)–(7), содержащими только параметры, т.е. не зависят от конкретных элементов и времени. Поэтому индексы номеров элементов для полных фаз опущены. Длительность фазы 3 зависит от длительности входного сигнала и для разных элементов может быть различной. Так как скорости v_{en}^0 и v_{en}^1 отрицательны, для наглядности вместо v_{en}^0 и v_{en}^1 будем писать $-|v_{\text{en}}^0|$ и $-|v_{\text{en}}^1|$. Полагаем, что $U_0 = 0$ и $U_{\max} - P = lP$.

$$(4) \quad q_1 = \frac{P - U_0}{wd + v_{\text{en}}^0} = \frac{P}{wd - |v_{\text{en}}^0|},$$

$$(5) \quad q_2 = \frac{U_{\max} - P}{wd + v_{\text{en}}^1} = \frac{lP}{wd - |v_{\text{en}}^1|},$$

$$(6) \quad q_4 = \frac{U_{\max} - P}{|v_{\text{en}}^1|} = \frac{lP}{|v_{\text{en}}^1|},$$

$$(7) \quad q_5 = \frac{P - U_0}{|v_{\text{en}}^0|} = \frac{P}{|v_{\text{en}}^0|}.$$

Для N_1 формулы (4) и (6) верны, только если мощность d_0 внешнего сигнала равна d . Однако именно это предположение $d_0 = d$ будет использоваться в дальнейшем. Оно не снижает общности исследования, поскольку начиная с выхода первого элемента по цепи в любом случае будет распространяться сигнал мощности d . Поэтому, если входной сигнал имеет другую мощность, полученные результаты будут верны для цепи, где N_1 является внешним источником, а сама цепь начинается с элемента N_1 .

Дополнительные обозначения: Q_0 – длительность внешнего сигнала; Q_i , $i = 1, \dots, n$, – длительность активности элемента N_i и, соответственно, длительность его выходного сигнала, t_{ji} – момент начала фазы j элемента N_i , t_{zi} – момент падения U_i до U_0 . Для внешнего сигнала обозначим через $t_{00} = 0$ – момент его начала, t_{z0} – момент его окончания; t_{ji}, t_{00}, t_{z0} – точки на временной шкале, отмечающие моменты наступления событий; последовательность этих моментов на временной шкале – это протокол функционирования цепи. Некоторые события неизбежно совпадают: например, $t_{z0} = t_{41}$.

Для дальнейшего важно простое равенство:

$$(8) \quad Q_i = t_{5i} - q_{2i}.$$

Выходные сигналы элементов цепи (кроме элемента N_n) будем называть *внутренними*. Сигнал называется *длинным*, если $Q_i \geq q_1 + q_2$, *коротким*, если $q_1 < Q_i < q_1 + q_2$, *недостаточным*, если $Q_i \leq q_1$. Заметим, что а) такая классификация сигналов зависит от параметров сети, так как величины q_1, q_2, q_4 зависят от этих параметров; б) она относится не только ко внешнему сигналу, но и к внутренним сигналам цепи; в) если сигнал короткий, то длительности фаз 2 и 4 перестают быть постоянными; их заменяют величины q_{2i}, q_{4i} , которые зависят от длины входного сигнала.

Из диаграммы на рисунке видно, что внешний сигнал — длинный, входной сигнал для N_2 (длительность которого равна Q_1) — короткий, а входной сигнал для N_3 (его длительность равна Q_2) — недостаточный.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Если $Q_i > q_1$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, то $Q_{i+1} = Q_i - q_1 + q_{4,i+1}$.

Действительно, согласно (8) $Q_i = t_{5i} - q_{2i}$; активация N_{n+1} наступает в момент $t_{2i} + q_1$ и заканчивается в момент $t_{5i} + q_{4,i+1}$. Отсюда

$$(9) \quad Q_{i+1} = t_{5i} + q_{4,i+1} - (t_{2i} + q_1) = Q_i - q_1 + q_{4,i+1}.$$

Если входной сигнал для N_{i+1} — длинный, то $q_{4,i+1} = q_4$.

Сигнал, при котором $q_1 = q_{41}$, будем называть *равновесным*. Как будет видно из дальнейшего, равновесным может быть как длинный (если $q_{4,i+1} = q_4$), так и короткий сигнал.

3. Случай длинного внешнего сигнала: $Q_0 > q_1 + q_2$.

В этом случае

$$(10) \quad Q_0 = q_1 + q_2 + \alpha_0, \quad \alpha_0 > 0,$$

и N_1 с момента $t = q_1 + q_2$ переходит в фазу 3; ее длительность $q_{13} = \alpha_0$. При этом фазы 1, 2, 4 элемента N_1 полны, и их длительности вычисляются по формулам (4)–(6). Определение длительностей этих фаз для следующих элементов цепи является одной из задач данной работы. Напомним, что Q_i — это длительность активности элемента N_i и, соответственно, длительность входного сигнала для N_{i+1} .

Теорема 1. Пусть на вход цепи с заданными параметрами подан сигнал длительности $Q_0 = q_1 + q_2 + \alpha_0$, $\alpha_0 > 0$. Тогда:

1. Если $q_1 = q_4$, то $Q_{i+1} = Q_i$, $i = 1, \dots, n$, т.е. сигнал пройдет по всей цепи с сохранением длительности.

2. Если $q_4 = q_1 + \beta$, $\beta > 0$, то при каждом прохождении через элемент сигнал удлиняется на одну и ту же величину β . Поэтому сигнал пройдет через цепь любой длины, причем приращение длительности сигнала на выходе цепи пропорционально длине цепи.

3. Если $q_4 = q_1 - \gamma$, $\gamma > 0$, то существует такое натуральное число z_1 , зависящее от длительности входного сигнала, что, если длина цепи превосходит z_1 , то сигнал через эту цепь не пройдет. Конкретнее: найдется такое натуральное число k , что если цепь содержит не менее $k + 1$ элементов, то выходной сигнал $(k + 1)$ -го элемента будет либо недостаточным, либо коротким. В первом случае $z_1 = k + 1$; во втором случае $z_1 = k + l + 1$, где $l > 0$.

Доказательство. 1. Если $q_1 = q_4$, то равенство $Q_{i+1} = Q_i$, $i = 1, \dots, n$ следует из леммы 1.

2. Если $q_4 = q_1 + \beta$, то из (9) имеем $Q_{i+1} = Q_i + \beta$, т.е. при каждом прохождении через элемент сигнал удлиняется на β . Следовательно, приращение длительности сигнала на выходе пропорционально длине цепи.

3. Из (9) следует, что

$$(11) \quad Q_{i+1} = Q_i - q_1 + q_4 = Q_i - q_1 + q_1 + \gamma = Q_i + \gamma,$$

т.е. при каждом прохождении через элемент выходной сигнал укорачивается на одну и ту же величину γ . Однако это верно только до тех пор, пока выходной сигнал N_{i+1} остается длинным, т.е. период активности N_{i+1} содержит фазу⁴ 3 и длительность фазы 4 равна q_4 . В общем случае дело обстоит так: $Q_1 = q_2 + \alpha_0 + q_4$. Представим α_0 в виде $\alpha_0 = k\gamma + \delta$, где k – неотрицательное целое, $0 \leq \delta < \gamma$. Пока $i \leq k$, $Q_{i+1} = q_2 + \alpha_i + q_4$, где $\alpha_i = \alpha_0 - i\gamma$, откуда

$$(12) \quad Q_{k+1} = q_2 + \alpha_k + q_4 = q_2 + \alpha_0 - k\gamma + q_4 = q_2 + \delta + q_4.$$

Заменив в (12) q_4 на $q_1 - \gamma$, получим

$$Q_{k+1} = q_2 + \delta + q_1 - \gamma = q_1 + q_2 + \delta + \gamma.$$

Поскольку $\delta < \gamma$, то $Q_{k+1} < q_1 + q_2$, т.е. уже не является длинным. Для активации N_{k+2} нужно, чтобы $Q_{k+1} > q_1$. Поэтому, если $q_2 + \delta - \gamma \leq 0$, выходной сигнал N_{k+1} недостаточен, N_{k+1} не активируется и $z = k + 1$, что и требовалось доказать. В противном случае выходной сигнал N_{k+1} – короткий. Этот случай будет рассмотрен в следующем разделе.

Примечание. Утверждение 3 теоремы 1 предполагает фиксированную длительность входного сигнала и потому не противоречит следующему очевидному утверждению: для любой цепи фиксированной длины существует такая длительность внешнего сигнала, что сигнал через эту цепь пройдет. Для этого достаточно, чтобы внешний сигнал длился до момента, когда возбудится последний элемент цепи.

Чтобы получить формулировку теоремы в терминах параметров цепи, нужно заменить величины q_1 и q_4 на правые части формул (4) и (6) соответственно. В частности, равенство $q_1 = q_4$ после такой замены и простых преобразований принимает вид:

$$|v_{\text{en}}^1| = l(wd - |v_{\text{en}}^0|).$$

⁴ На рисунке уже выходной сигнал N_1 является коротким для N_2 .

Пример 2. Для входного сигнала в примере 1 $\alpha_0 = 1,2$. По формулам (4)–(6) получим $q_1 = 2,5$, $q_2 = 0,8$, $q_4 = 0,8$, т.е. имеет место случай 3 теоремы 1. Далее, $\gamma = q_1 - q_4 = 1,7$; $\alpha_0 < \gamma$ и $k = 0$. $Q_1 = q_2 + \alpha_0 + q_4 = 0,8 + 1,2 + 0,8 = 2,8$, т.е. $q_1 < Q_1 < q_1 + q_2$. Поэтому выходной сигнал $N_{i+1} = N_2$ короткий, что видно на рисунке. Завершение примера приведено в конце раздела 4.

4. Случай короткого внешнего сигнала: $Q_0 \leq q_1 + q_2$

Из п. 3 теоремы 1 видно, что короткий сигнал может возникнуть не только на входе N_1 , но и на входе любого элемента цепи. Однако рассмотрение общего случая потребовало бы слишком громоздких обозначений. Поэтому ограничимся случаем внешнего короткого сигнала; рассмотрение общего случая будет отличаться только обозначениями.

4.1. Точка равновесия

В случае короткого сигнала фаза 3 для N_1 отсутствует и

$$(13) \quad Q_0 = q_1 + \varepsilon_0, \quad 0 < \varepsilon_0 \leq q_2.$$

Очевидно, что $q_{21} = \varepsilon_0$. Тогда

$$(14) \quad Q_1 = q_{21} + q_{41} = \varepsilon_0 + q_{41}.$$

За время $q_{21} = \varepsilon_0$ потенциал N_1 вырастет на величину $\Delta U_{21} \leq lP$:

$$(15) \quad \Delta U_{21} = \varepsilon_0 (wd - |v_{\text{en}}^1|),$$

после чего внешний сигнал отключится и у N_1 начнется урезанная фаза 4. При этом

$$(16) \quad q_4 = \Delta U_{21} / |v_{\text{en}}^1| = \varepsilon_0 (wd - |v_{\text{en}}^1|) / |v_{\text{en}}^1|.$$

В дальнейшем формула $(wd - |v_{\text{en}}^1|) / |v_{\text{en}}^1|$ неоднократно понадобится. Поэтому введем обозначение $(wd - |v_{\text{en}}^1|) / |v_{\text{en}}^1| = F$ и перепишем (16) в виде

$$(16') \quad q_{41} = \varepsilon_0 F.$$

Заметим, что $1 + F = 1 + (wd - |v_{\text{en}}^1|) / |v_{\text{en}}^1| = wd / |v_{\text{en}}^1|$.

Из (14) и (16') следует, что

$$(17) \quad Q_1 = \varepsilon_0 + q_{41} = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 F = \varepsilon_0(1 + F).$$

Для того чтобы короткий сигнал прошел по всей цепи с сохранением длительности, т.е. чтобы выполнялось равенство $Q_{i+1} = Q_i$, $i = 1, \dots, n$, как и в случае длинного сигнала, необходимо и достаточно выполнение равенства $q_1 = q_{4i}$. Однако если для длинного сигнала $q_{4i} = q_4$, т.е. зависит только от

параметров цепи, то при коротком сигнале, как видно из (16'), величина q_{4i} зависит еще и от длины сигнала, т.е. выполняется только при определенном значении ε_0 , которое, в свою очередь, должно удовлетворять условию (13).

Выясним теперь, при каком значении ε_0 равенство $q_1 = q_{41}$ выполняется. Подставляя в него вместо q_1 и q_{41} их выражения из формул (4) и (16') соответственно, получим

$$P / (wd - |v_{\text{en}}^0|) = \varepsilon_0 F,$$

откуда

$$(18) \quad \varepsilon_0 = P / ((wd - |v_{\text{en}}^0|) F).$$

Из условия (13) получим:

$$(19) \quad 0 < P / ((wd - |v_{\text{en}}^0|) F) \leq q_2.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Для любой цепи, параметры которой удовлетворяют условию (19), существует величина $\varepsilon^ \leq q_2$, определяемая соотношением (18), такая, что внешний сигнал длины $q_1 + \varepsilon^*$ проходит по цепи без изменения длительности, т.е. является равновесным.*

Для цепи, удовлетворяющей условию (19), момент $q_1 + \varepsilon^*$ назовем *точкой равновесия*.

Пример 3. Для сети с параметрами, заданными таблицей 1, условие (19) не выполняется. Действительно, для этой сети, как было показано в конце предыдущего раздела, $q_4 < q_1$, и, следовательно, $q_{4i} < q_1$. Поэтому условие (19) для этой сети выполняться не может.

Пример 4. Для сети с параметрами, заданными табл. 2, условие (19) выполняется. Для этих параметров $F = (wd - |v_{\text{en}}^1|) / |v_{\text{en}}^1| = 1/0,6$; подстановка в (18) дает $\varepsilon^* = \frac{0,5}{0,8F} = 0,375$. Поскольку по формуле (5) $q_2 = 0,5$, то $\varepsilon^* < q_2$.

В дальнейшем понадобится формула

$$(20) \quad q_{4i} / q_{2i} = F,$$

которая следует из (16').

Поскольку при коротком сигнале величины q_{2i} , q_{4i} , Q_i зависят от ε , введем для них более подробные обозначения. Эти величины в точке равновесия

Таблица 2

| | P | U_{max} | U_0 | v_{en}^0 | v_{en}^1 | d | w |
|-------|-----|------------------|-------|-------------------|-------------------|-----|-----|
| N_0 | | | | | | 1,6 | |
| N_i | 0,5 | 1 | 0 | -0,8 | -0,6 | 1,6 | 1,0 |

(если она существует) обозначим как q_{*21}, q_{*41}, Q_{*0} , а при $Q_0 = q_1 + \varepsilon_0 - x$, как q_{x21}, q_{x41}, Q_{x0} . В этих обозначениях

$$(21) \quad q_{*41} = q_1, \quad q_{*21} = \varepsilon^*.$$

Из (20) и (21) следует

$$(22) \quad q_1 = \varepsilon^* F.$$

Заметим, что равенство (22), предполагающее существование точки равновесия и, соответственно, справедливость равенства $q_1 = q_{4i}$ для любого i , следует из (16') и (21).

4.2. Случай, когда внешний сигнал короче равновесного

В этом случае

$$(23) \quad Q_{\lambda 0} = q_1 + \varepsilon^* - \lambda, \quad \lambda > 0 \quad \text{и} \quad q_{\lambda 21} = \varepsilon^* - \lambda.$$

Из (20) имеем

$$q_{\lambda 41} = (\varepsilon^* - \lambda)F = q_1 - \lambda F; \quad Q_{\lambda 1} = q_{\lambda 21} + q_{\lambda 41} = q_1 + \varepsilon^* - \lambda - \lambda F$$

и с учетом (23)

$$(24) \quad Q_{\lambda 0} - Q_{\lambda 1} = \lambda F.$$

Таким образом, при прохождении через N_1 длительность сигнала уменьшается на величину λF . Если эта величина больше длительности фазы 2, т.е. $q_{\lambda 21} = \varepsilon^* - \lambda \leq \lambda F$, то выходной сигнал N_1 становится недостаточным и распространение сигнала прекращается. В противном случае N_2 активируется и генерирует выходной сигнал.

Лемма 3. Пусть на вход цепи, имеющей точку равновесия, подан короткий сигнал, который короче равновесного (т.е. сигнал, при котором $q_1 > q_{41}$) и который проходит через p элементов. Тогда для любого $i = 1, \dots, p-1$ справедливо неравенство

$$(25) \quad Q_{\lambda i} - Q_{\lambda, i+1} > Q_{\lambda, i-1} - Q_{\lambda i}.$$

Для доказательства леммы понадобится несколько простых соотношений, верных для любого $i < p$.

Во-первых, при коротком сигнале очевидно, что

$$(26) \quad q_{\lambda 2, i+1} = Q_{\lambda i} - q_1.$$

Во-вторых, так как $Q_{\lambda i} = q_{\lambda 2i} + q_{\lambda 4i}$, то с учетом (20) имеем $Q_{\lambda i} = q_{\lambda 2i} + q_{\lambda 2i}F$ или

$$(27) \quad Q_{\lambda i} = q_{\lambda 2i}(1 + F).$$

Из (27) следует, что $Q_{\lambda i} - Q_{\lambda, i+1} = (q_{\lambda 2i} - q_{\lambda 2, i+1})(1 + F)$.

Поэтому для доказательства неравенства (25) достаточно доказать неравенство

$$(28) \quad q_{\lambda 2i} - q_{\lambda 2,i+1} > q_{\lambda 2,i-1} - q_{\lambda 2i}.$$

Используя (26), в левой части (28) заменим $q_{\lambda 2i}$ и $q_{\lambda 2,i+1}$ на $Q_{\lambda,i-1} - q_1$ и $Q_{\lambda i} - q_1$ соответственно, а после сокращения q_1 воспользуемся (27). Получим $q_{\lambda 2i} - q_{\lambda 2,i+1} = Q_{\lambda,i-1} - Q_{\lambda i} = (q_{\lambda 2,i-1} - q_{\lambda 2i})(1 + F)$, откуда непосредственно следует справедливость (28). Тем самым лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что:

— все разности $Q_{\lambda,i-1} - Q_{\lambda i}$ положительны, так как согласно (24) $Q_{\lambda 0} - Q_{\lambda 1} > 0$, а в дальнейшем они только увеличиваются; иначе говоря, величины $Q_{\lambda i}$ уменьшаются с возрастающей скоростью;

— поэтому найдется такое l , что выходной сигнал элемента N_l окажется недостаточным и не сможет активировать элемент N_{l+1} . Способ вычисления l легко извлечь из доказательства леммы 3.

Теперь можно завершить доказательство п. 3 теоремы 1.

Длительность короткого выходного сигнала элемента N_{k+1} имеет вид $Q_{k+1} = q_2 + q_{4,k+1}$. По условию п. 3 теоремы 1 параметры цепи таковы, что $q_1 > q_4$. Следовательно, $q_1 > q_{4,k+1}$, т.е. этот сигнал короче равновесного и удовлетворяет условиям леммы 3. Поэтому найдется такое l , что выходной сигнал элемента N_{k+l+1} окажется недостаточным. Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Еще одно следствие леммы 3 касается цепей, для которых $q_4 = q_1$, но сигнал — короткий. В этом случае фаза 4 будет укороченной: $q_{41} < q_4 = q_1$, т.е. сигнал короче равновесного, и согласно лемме 3 по достаточно длинной цепи этого класса сигнал не пройдет.

4.3. Случай, когда внешний сигнал длиннее равновесного

В этом случае

$$(29) \quad Q_{\lambda 0} = q_1 + \varepsilon^* + \lambda, \quad \lambda > 0 \quad \text{и} \quad q_{\lambda 21} = \varepsilon^* + \lambda.$$

По лемме 2 имеем

$$q_{\lambda 41} = (\varepsilon^* + \lambda)F = q_1 + \lambda F; \quad Q_{\lambda 1} = q_{\lambda 21} + q_{\lambda 41} = q_1 + \varepsilon^* + \lambda + \lambda F$$

и с учетом (29)

$$(30) \quad Q_{\lambda 1} - Q_{\lambda 0} = \lambda F.^5$$

⁵ Это равенство совпадает с (23) с точностью до перемены знака в левой части. Все последующее доказательство леммы 4 также повторяет доказательство леммы 3 с точностью до перемены знака.

Таким образом, при прохождении через N_1 длительность сигнала увеличивается на величину λF . Если эта длительность больше длительности фазы 2, то выходной сигнал N_1 становится длинным. В противном случае справедлива

Лемма 4. Пусть на вход цепи, имеющей точку равновесия, подан короткий сигнал, который длиннее равновесного (т.е. сигнал, длительность которого имеет вид (29)) и который проходит через l элементов, причем сигнал, генерируемый элементом N_l , остается коротким. Тогда для любого $i < l$ справедливо неравенство

$$(31) \quad Q_{\lambda, i+1} - Q_{\lambda i} > Q_{\lambda i} - Q_{\lambda, i+1}.$$

Из (27) следует, что $Q_{\lambda, i+1} - Q_{\lambda i} = (q_{\lambda 2, i+1} - q_{\lambda 2i})(1 + F)$.

Поэтому для доказательства неравенства (30) достаточно доказать неравенство

$$(32) \quad q_{\lambda 2, i+1} - q_{\lambda 2i} > q_{\lambda 2i} - q_{\lambda 2, i-1}.$$

Используя (26), в левой части (33) заменим $q_{\lambda 2, i+1}$ и $q_{\lambda 2i}$ на $Q_{\lambda, i-1} - q_1$ и $Q_{\lambda i} - q_1$ соответственно, а после сокращения q_1 воспользуемся (27). Получим $q_{\lambda 2, i+1} - q_{\lambda 2i} = Q_{\lambda i} - Q_{\lambda, i-1} = (q_{\lambda 2i} - q_{\lambda 2, i-1})(1 + F)$, откуда непосредственно следует справедливость (31). Тем самым лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что:

— все разности $Q_{\lambda i} - Q_{\lambda, i-1}$ положительны, так как согласно (30) $Q_{\lambda 1} - Q_{\lambda 0} > 0$, а в дальнейшем они только увеличиваются; иначе говоря, величины $Q_{\lambda i}$ увеличиваются с возрастающей скоростью;

— поэтому найдется такое l , что выходной сигнал элемента N_l окажется длинным и, следовательно, длительность фазы разрядки N_l будет равна q_4 . Так как цепь имеет точку равновесия и потому $q_1 = q_{4i} < q_4$, то поведение сигнала при его прохождении через элементы N_{l+1}, N_{l+2}, \dots описывается случаем 2 теоремы 1: при прохождении сигнала через каждый элемент сигнал будет удлинняться на одну и ту же величину.

Способ вычисления l легко извлечь из доказательства леммы 4.

Из лемм 2, 3 и 4 непосредственно следует

Теорема 2. Для любой цепи, параметры которой удовлетворяют условию (19):

1) *существует точка равновесия: такая величина $\varepsilon^* \leq q_2$, что внешний сигнал длительности $q_1 + \varepsilon^*$ проходит по цепи без изменения длительности;*

2) *если сигнал длительности $q_1 + \varepsilon$ короче равновесного, т.е. $q_1 < \varepsilon < \varepsilon^*$, то существует величина z_2 такая, что через цепь, содержащую не менее z_2 элементов, этот сигнал не пройдет;*

3) *если сигнал длительности $q_1 + \varepsilon$ длиннее равновесного, т.е. $\varepsilon^* < \varepsilon < q_2$, то существует величина r такая, что в цепи, содержащей не менее r эле-*

ментов, потенциал r -го элемента достигнет максимума; для r -го и последующих элементов будет выполняться случай 2 теоремы 1.

Вторая половина утверждения 3 теоремы следует из того, что условие (19) означает выполнение равенства $q_1 = q_{4i} < q_4$.

4.4. Случай, когда точка равновесия отсутствует

Точка равновесия существует, если выполняется равенство $q_1 = q_{4i}$. В этом случае оно выполняется для любого i . Отсутствие точки равновесия означает, что при любой длительности короткого сигнала, т.е. сигнала, длительность которого имеет вид (13), равенство $q_1 = q_{4i}$ не выполняется ни для какого i . Это возможно только в двух случаях: либо $q_{4i} = q_4$, т.е. сигнал должен быть длинным (п. 1 теоремы 1), либо $q_1 > q_4$ (п. 3 теоремы 1). Второй случай означает, что для любого короткого сигнала существует такое натуральное k , что через цепь длины не меньше k сигнал не пройдет.

4.5. Итоговый результат

Общая картина прохождения сигнала по однородной цепи, которая следует из результатов пп. 3, 4, представлена в табл. 3, где все цепи разбиты на три типа, для которых $q_1 = q_4$, $q_1 < q_4$, $q_1 > q_4$. Случаи, представленные клетками таблицы, в дальнейшем будем кодировать строкой и столбцом: например, случай длинного сигнала для типа 1 кодируется как Т1Д, а случаи короткого сигнала — как Т1К, Т2К1, Т2К2, Т2К3.

Таблица 3

| Сигнал | Тип 1: $q_1 = q_4$ | Тип 2: $q_1 < q_4$ | Тип 3: $q_1 > q_4$ |
|---------------|---|--|---|
| Длинный | Проходит с сохранением длительности | Проходит с увеличением длительности | Укорачивается; не проходит при длине цепи $n < z_1$ |
| Короткий | Укорачивается; не проходит при длине цепи $n < z_3$ | Есть точка равновесия: 1) равновесный сигнал проходит с сохранением длительности; 2) сигнал короче равновесного не проходит при длине цепи $n < z_2$; 3) сигнал длиннее равновесного проходит с увеличением длительности | |
| Недостаточный | Не проходит через первый элемент | | |

Наличие в цепи неоднородных элементов существенно повышает возможности сохранения длительности внешнего сигнала. Например, если начальный отрезок цепи состоит из $r_1 < z_1$ элементов типа 3 (см. табл. 3), то длинный

сигнал проходит этот отрезок, хотя и укорачивается. Если за этим отрезком последует отрезок цепи, состоящий из элементов типа 2, то существует такое число r_2 элементов этого отрезка (способ его вычисления можно извлечь из доказательства п. 3 теоремы 1), что на выходе $(r_1 + r_2)$ -го элемента длительность сигнала будет не меньше длительности внешнего сигнала.

5. Метод вычисления поведения асинхронной цепи

Информации, представленной табл. 3, недостаточно для того, чтобы для класса цепей с заданными параметрами вычислить протокол конкретной цепи этого класса. Здесь опишем метод вычисления протокола функционирования цепи, который опирается на два специфических свойства однородных асинхронных цепей:

1) каждый элемент активируется не более одного раза;

2) если на входе элемента N_{i+1} сигнал появился, то это произошло в момент

$$(33) \quad t_{1i} = (i - 1)q_1 < q_4.$$

Равенство (33) следует из того очевидного факта, что в момент окончания фазы 1 элемента N_{i-1} , т.е. его включения, на входе элемента N_i появляется сигнал и запускается его фаза 1. Поэтому моменты $t_{1,i-1}$ и t_{1i} отстоят друг от друга на величину q_1 .

Для описания метода введем ряд новых понятий.

Статическим профилем Pr_i элемента N_i называется вектор (q_1, q_2, q_4, q_5) . Эти числа определяются параметрами элемента и вычисляются по формулам (4)–(7). Напомним, что длина τ_i входного сигнала для N_i – это длительность активности N_{i-1} , т.е. $\tau_i = Q_{i-1}$.

Динамический профиль $Pr_i(t_{1i})$ элемента N_i – это вектор $Pr_i(t_{1i}) = (t_{1i}, t_{2i}, t_{3i}, t_{4i}, t_{5i})$, который с учетом (33) можно записать как $Pr_i(t_{1i}) = ((i - 1)q_1, t_{2i}, t_{3i}, t_{4i}, t_{5i})$. Отсутствие какой-либо фазы и соответственно момента ее наступления будем обозначать знаком \sim .

Динамическим профилем цепи из n однородных элементов с заданными параметрами называется множество динамических профилей ее элементов. Поскольку динамический профиль элемента привязан к временной шкале, то динамический профиль однородной цепи однозначно соответствует временной диаграмме функционирования цепи, пример которой приведен на рисунке.

Предлагаемый метод заключается в вычислении протокола функционирования цепи путем последовательного (начиная с $Pr_i(t_{11})$) вычисления динамических профилей элементов цепи и расположения событий, содержащихся в этих профилях, т.е. моментов $t_{ji}(j - 1, \dots, 5; i = 1, \dots, n)$ на временной шкале. Он описывается следующим образом.

Пусть заданы параметры цепи, включая число n ее элементов, и длина Q_0 входного сигнала.

1. Вычисляем величины q_1, q_2, q_4, q_5, F .

2. Если $Q_{i-1} > q_1 + q_2$, то сигнал длинный, переход к п. 3; если $q_1 < Q_{i-1} < q_1 + q_2$, то сигнал короткий, переход к п. 4; если $Q_{i-1} < q_1$, то сигнал недостаточный, переход к п. 5.

3. Длинный входной сигнал имеет вид $Q_{i-1} = q_1 + q_2 + \alpha_{i-1}$, $\alpha_{i-1} > 0$. Компоненты $Pr_i(t_{1i})$ вычисляются следующим образом:

$$t_{1i} = (i - 1)q_1;$$

$$t_{2i} = (i - 1)q_1 + q_1 = iq_1;$$

$$t_{3i} = t_{2i} + q_2 = iq_1 + q_2;$$

$$t_{4i} = t_{3i} + \alpha_{i-1} = iq_1 + q_2 + \alpha_{i-1};$$

$$t_{5i} = t_{4i} + q_4 = iq_1 + q_2 + \alpha_i + q_4;$$

$$t_{zi} = t_{5i} + P/v_{\text{en}}^0.$$

$$Q_i = t_{5i} - t_{2i}.$$

Если $i < n$, увеличиваем i на 1 и переходим к п. 2; если $i = n$, переходим к п. 6.

4. Короткий входной сигнал имеет вид $Q_{i-1} = q_1 + \varepsilon_{i-1}$, $0 < \varepsilon_{i-1} \leq q_2$.

$$t_{1i} = (i - 1)q_1;$$

$$t_{2i} = (i - 1)q_1 + q_1 = iq_1;$$

$$t_{3i} = \sim;$$

$$t_{4i} = t_{2i} + q_{2i} = iq_1 + \varepsilon_{i-1};$$

$$t_{5i} = t_{4i} + q_{4i} = iq_1 + \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i-1}F = iq_1 + \varepsilon_{i-1}(1 + F) = \\ = iq_1 + \varepsilon_{i-1}wd/|v_{\text{en}}^1| \text{ (см. (16)).}$$

$$t_{zi} = t_{5i} + P/v_{\text{en}}^0.$$

$$Q_i = t_{5i} - t_{2i}.$$

Если $i < n$, увеличиваем i на 1 и переходим к п. 2; если $i = n$, переходим к п. 6.

5. Недостаточный входной сигнал имеет вид $Q_{i-1} = \omega < q_1$.

$$t_{1i} = (i - 1)q_1;$$

$$t_{2i} = t_{3i} = t_{4i} = \sim;$$

$$t_{5i} = (i - 1)q_1 + \omega;$$

$$t_{zi} = t_{5i} + \omega(wd - |v_{\text{en}}^0|)/|v_{\text{en}}^0| \text{ (вычисляется аналогично (16)).}$$

Переходим к п. 6.

6. Упорядочиваем вычисленное множество чисел $\{t_{ji}\}$ по возрастанию.

7. Конец алгоритма.

Для проверки вычислений полезно отметить, что некоторые события должны совпадать. В частности, $t_{2,i-1} = t_{1i}$, $t_{5,i-1} = t_{4i}$.

Пример 5. Вычислим этим методом протокол цепи, заданной табл. 1. Для этой цепи

$$q_1 = 2,5; \quad q_2 = 0,8; \quad q_4 = 0,8; \quad q_5 = 0,625.$$

$$F = \frac{(wd - |v_{\text{en}}^1|)}{|v_{\text{en}}^1|} = \frac{0,5}{0,5} = 1.$$

Если длительность входного сигнала равна 4,5, то

$$q_{31} = Q_0 - q_1 - q_2 = 4,5 - 2,5 - 0,8 = 1,2;$$

$$Q_1 = q_2 + q_{31} + q_4 = 0,8 + 1,2 + 0,8 = 2,8.$$

$$Q_1 < q_1 + q_2 = 2,5 + 0,8, \quad \text{поэтому сигнал для } N_2 \text{ будет коротким.}$$

Вычислим динамические профили элементов.

1. Для N_1 : $i = 1$.

$$Q_0 = 4,5 = q_1 + q_2 + 1,2. \quad \text{Сигнал длинный и } \alpha_0 = 1,2.$$

$$t_{11} = (i - 1) q_1 = 0;$$

$$t_{21} = (i - 1) q_1 + q_1 = q_1 = 2,5;$$

$$t_{31} = t_{21} + q_2 = 2,5 + q_2 = 3,3;$$

$$t_{41} = t_{31} + \alpha_0 = 3,3 + \alpha_0 = 4,5;$$

$$t_{51} = t_{41} + q_4 = 4,5 + 0,8 = 5,3;$$

$$t_{z1} = t_{51} + \frac{P}{|v_{\text{en}}^0|} = 5,3 + \frac{0,5}{0,8} = 5,925.$$

$$Q_1 = t_{51} - t_{21} = 2,8;$$

$$Pr_1(t_{11}) = (0; 2,5; 3,3; 4,5; 4,5; 5,3).$$

2. Для N_2 : $i = 2$.

$$Q_1 = 2,8 = q_1 + 0,3. \quad \text{Сигнал короткий и } \varepsilon_1 = q_{22} = 0,3.$$

$$t_{12} = (i - 1) q_1 = 2,5;$$

$$t_{22} = (i - 1) q_1 + q_1 = 2q_1 = 5,0;$$

$$t_{32} = \sim;$$

$$t_{42} = t_{22} + q_{22} = t_{22} + \varepsilon_1 = 5,3;$$

$$t_{52} = t_{42} + q_{42} = 5,3 + \varepsilon_1 F = 5,6;$$

$$t_{z2} = t_{52} + \frac{P}{|v_{\text{en}}^0|} = 5,6 + \frac{0,5}{0,8} = 6,225.$$

$$Q_2 = t_{52} - t_{22} = 5,6 - 5,0 = 0,6. \quad Q_2 < q_1; \text{ сигнал недостаточный.}$$

3. Для $N_3 : i = 3$.

$$t_{13} = (i - 1) q_1 = 5,0;$$

$$t_{23} = t_{33} = q_{43} = \sim;$$

$$t_{53} = t_{13} = Q_2 = 5,0 + 0,6 = 5,6.$$

$$t_{z3} = t_{53} + Q_2 \frac{wd - |v_{en}^0|}{|v_{en}^0|} = 5,6 + 0,6 \cdot \frac{0,2}{0,8} = 5,75.$$

На этом вычисление динамических профилей заканчивается. Представим их в виде табл. 4:

Таблица 4

| Элемент | t_{1i} | t_{2i} | t_{3i} | t_{4i} | t_{5i} | t_{zi} |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| N_1 | 0 | 2,5 | 3,3 | 4,5 | 5,3 | 5,925 |
| N_2 | 2,5 | 5,0 | * | 5,3 | 5,6 | 6,225 |
| N_3 | 5,0 | * | * | * | 5,6 | 5,75 |

Расположение событий на единой шкале времени представлено в табл. 5.

Таблица 5

| События | t_{11} | t_{21}, t_{12} | t_{31} | t_{41} | t_{22}, t_{31} | t_{51}, t_{42} | t_{52} | t_{z1} | t_{z2} | t_{z3} |
|----------|----------|------------------|----------|----------|------------------|------------------|----------|----------|----------|----------|
| Значения | 0 | 2,5 | 3,3 | 4,5 | 5,0 | 5,3 | 5,6 | 5,925 | 6,225 | 5,75 |

6. Заключение

Естественным продолжением этого исследования является рассмотрение сетей произвольной топологии.

Полученные результаты можно использовать в нейробиологии при анализе распространения сигналов в нервных системах [1, 8, 13], в исследованиях распространения влияний в социальных сетях [14, 15], а также в пороговых моделях социального поведения [16–20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов О.П., Базенков Н.И., Болдышев Б.А. и др. Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах // Искусственный интеллект и принятие решений. 2018. № 2. С. 3–20.
2. Кузнецов О.П. Асинхронные многосортные системы // АиТ. 2021. № 2. С. 132–148.
3. Brzozowski J.A. Topics in Asynchronous Circuit Theory // Recent Advances Formal Languages Appl. 2006. V. 25. P. 11–42.

4. *Sparsø J.* Introduction to Asynchronous Circuit Design. TU of Denmark, 2020.
5. *Chandy K.M.* Event-Driven Applications: Costs, Benefits and Design Approaches. California Institute of Technology, 2006.
6. *Davies Alex.* Async in C# 5.0. O'Reilly, 2012.
7. *Buzsáki G.* Neural Syntax: Cell Assemblies, Synapses, and Readers // *Neuron*. 2010. V. 68. No. 3. P. 362–385.
8. *Feinerman O., Segal M., Moses E.* Signal Propagation Along Unidimensional Neuronal Networks // *J. Neurophysiol.* 2005. V. 94. No. 5. P. 3406–3416.
9. *D'Haene M., Schrauwen B., Van Campenhout J., Stroobandt D.* Accelerating Event-Driven Simulation of Spiking Neurons with Multiple Synaptic Time Constants // *Neural Comput.* 2008. V. 21. P. 1068–1099.
<https://doi.org/10.1162/neco.2008.02-08-707>
10. *Naveros F., Garrido J.A., Carrillo R.R., Ros E., Luque N.R.* Event- and Time-Driven Techniques Using Parallel CPU-GPU Co-processing for Spiking Neural Networks // *Frontiers Neuroinform.* 2017. V. 11. Article 7. P. 1–22.
11. *Pecevski D., Kappeland D., Jonke Z.* Nevesim: Event-Driven Neural Simulation Framework with a Python Interface // *Frontiers Neuroinform.* 2014. V. 8. P. 70.
12. *Kuznetsov O.P.* Signal Spreading Through a Chain of Asynchronous Threshold Elements // *Lecture Notes in Networks and Systems. Proceedings of the Fifth International Scientific Conference “Intelligent Information Technologies for Industry” (ITI'21).* 2021. V. 330. P. 24–34.
13. *Николаас Дж., Мартин Р., Валлас Б., Фукс П.* От нейрона к мозгу. Пер. с англ. Изд. 5-е, стереотип. М.: УРСС: ЛЕНАНД, 2019.
14. *Jackson M.O.* Social and Economic Networks. Princeton Univer. Press, 2008.
15. *Kempe D., Kleinberg J., Tardos E.* Maximizing the Spread of Influence through a Social Network // *Theory of Computing.* 2015. V. 11. No. 4. P. 105–147.
16. *Schelling T.* Dynamic Models of Segregation // *J. Math. Sociol.* 1971. V. 1. P. 143–186.
17. *Granovetter M.S.* Threshold Models of Collective Behavior // *Amer. J. Sociolog.* 1978. V. 83. No. 6. P. 1420–1443.
18. *Li Z., Tang X.* A Study of Collective Action Threshold Model Based on Utility and Psychological Theories // *Lecture Notes in Computer Science.* 2012. V. 7669. P. 474–482.
19. *Бреер В.В.* “Модели толерантного порогового поведения (от Т. Шеллинга – к М. Грановеттеру)” // *Проблемы управления.* 2016. № 1. P. 11–20.
20. *Zhilyakova L., Gubanov D.* Double-Threshold Model of the Activity Spreading in a Social Network: The Case of Two Types of Opposite Activities // *Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Application of Information and Communication Technologies AICT2017.* 2017. V. 2. P. 267–270.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.Е. Пальчунцовым.

Поступила в редакцию 08.12.2021

После доработки 10.01.2022

Принята к публикации 26.01.2022