

© 2022 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),
П.В. ЛЫСЕНКО (pashlys@yandex.ru),
В.П. ЯХНО, канд. техн. наук (vic_iakhno@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДВЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА¹

Рассмотрена задача планирования траектории управляемого подвижного объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения, для случая, когда необходимые условия оптимальности траектории вырождены. Введены дополнительные ограничения и формализованы две оптимизационные задачи. В первой задаче требуется найти оптимальный скоростной режим объекта на заданной траектории, а во второй — оптимальную траекторию при движении на постоянной скорости. Предложены методы и алгоритмы построения оптимальных траекторий и нахождения скоростных режимов, для второй задачи найдена аналитическая область существования решения для произвольных параметров. Аналитические результаты проиллюстрированы примерами.

Ключевые слова: планирование траекторий, необходимые условия экстремума, индикатриса излучения.

DOI: 10.31857/S0005231022070017, EDN: ADLKXD

1. Введение

Широкое применение беспилотных аппаратов, действующих в различных средах и решающих в автономном режиме задачи гражданской и военной направленности, приводит к необходимости осуществлять планирование их миссий и решать задачи траекторного управления, полагаясь на доступную информацию, поступающую по измерительным каналам и каналам связи [1–3]. Принятие решения на борту о последовательности действий или прокладке маршрута управляемого подвижного объекта (УПО) должно основываться на оптимизации некоторого критерия качества, связанного с конкретной прикладной задачей. Поскольку часто имеется недостаток измерительных и информационных каналов и данных, то приходится использовать математические модели, описывающие появление и эволюцию сигналов физических

¹ Работа П.В. Лысенко выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-38-90215).

полей в пространстве до момента формирования информационного признака, определяющего этот критерий. В частности, в задаче уклонения от обнаружения стационарной поисковой системой критерий формируется на основе вероятности необнаружения УПО [4–6]. Бортовое алгоритмическое и программное обеспечение должно учитывать специфику задачи планирования траектории, в том числе и неединственность ее решения в общем случае [7–9]. Поэтому планирование траекторий УПО является наукоемкой и актуальной задачей [10, 11].

Аналитические решения для опорных траекторий движения УПО в задаче уклонения от обнаружения получены для случая постоянной [12] и переменной скоростей движения [13]. Численный алгоритм был разработан для УПО с неоднородной индикатрисой рассеяния при уклонении от обнаружения радаром [14] и неоднородной индикатрисой излучения при уклонении от обнаружения сенсором [7, 15]. Постановкам, учитывающим наличие радара в области движения УПО, также посвящены публикации [14, 16].

Данная статья продолжает работы по планированию траекторий движения управляемых подвижных объектов (УПО), действующих в конфликтной среде и решающих задачу уклонения от поисковых систем [17–19], и рассматривает математические аспекты планирования. В [7] получены и исследованы условия вырождения необходимых и достаточных условий оптимальности траекторий УПО, обладающего неоднородной индикатрисой излучения и уклоняющегося на плоскости от неподвижного обнаружителя. В [7] был найден явный вид индикатрисы излучения, который приводит к вырождению условий оптимальности.

В настоящей статье будут рассмотрены две постановки и методы решения задач планирования траектории для случая вырожденной индикатрисы излучения. Это задача нахождения оптимального скоростного режима УПО при нулевом детерминанте матрицы Гессе и заданной траектории, а также задача нахождения оптимальной траектории УПО при нулевом детерминанте матрицы Гессе в случае постоянной скорости движения, значение которой должно быть определено в результате решения.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать задачу планирования траектории подвижного объекта, обладающего неоднородной индикатрисой излучения, при уклонении на плоскости от одиночного стационарного обнаружителя. Будем полагать, что УПО движется в поле обнаружения поисковой системы, представляющей собой одиночный сенсор, расположенный в начале координат. Поэтому рассматривается задача планирования траектории УПО, которая доставляет минимум функционалу риска, приведенному в [7]. Задача подвижного объекта — перейти из начальной точки A в конечную точку B за заданное время с минимально возможным риском на траектории.

Задача 1. Требуется найти траекторию $(\rho^*(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал

$$(2.1) \quad \begin{aligned} R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) &= \int_0^T S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}) dt = \\ &= \int_0^T (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2)^{\mu/2} G\left(\arctg \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}}\right) dt \rightarrow \min_{\rho(\cdot), \varphi(\cdot)}, \end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \varphi(0) = \varphi_A, \quad \varphi(T) = \varphi_B.$$

Здесь введены координаты (ρ, φ) , определяющие положение УПО относительно сенсора, $\rho = \ln r$, где r — расстояния между сенсором и УПО, φ — полярный угол. Остановимся на случае $\mu = 2$ и ситуации вырождения, когда детерминант матрицы Гессе равен нулю [7]. Индикатриса излучения $G(\beta)$ связана с профилем излучения УПО. Для компактности записи здесь и далее зависимость в функциях от аргумента будет опущена, кроме случаев, когда потребуется уточнение этой зависимости.

Определение 1. Профилем $P(\alpha)$ называется функция зависимости мощности излучаемого сигнала от угла между выделенной осью, совпадающей в дальнейшем с направлением движения объекта, и направлением на наблюдателя.

В [7] показано, что нормированный профиль $P(\alpha)$, соответствующий гессиану, равному нулю, имеет вид

$$(2.2) \quad P(\alpha, \nu) = \cos^2(\alpha - \nu),$$

где ν — произвольная константа, определяющая различные возможные профили. Профиль объекта приведен на рис. 1 (а именно случай, когда $\nu = 15^\circ$).

Определение 2. Индикатриса излучения $G(\beta)$ — это мощность излучаемого сигнала в направлении сенсора при отклонении объекта на угол β от направления на положение объекта относительно сенсора.

Связь между профилем излучения и индикатрисой излучения поясняется на рис. 2.

На рис. 2 сенсор находится в начале координат. Скорость УПО направлена по отношению к отрезку, соединяющему сенсор и объект, под углом β . Величина индикатрисы излучения в сторону сенсора отмечена отрезком $G(\beta)$. Угол β , как видно из рисунка, определяется по формуле:

$$(2.3) \quad \beta = \arctg \left(\frac{\dot{\varphi} \cdot r}{\dot{r}} \right).$$

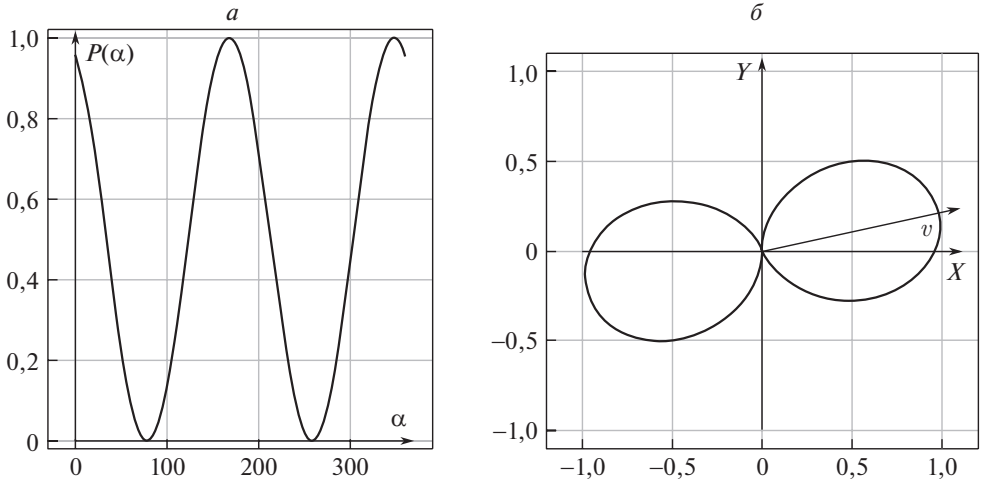


Рис. 1. Профиль излучения с детерминантом матрицы Гессе, равным нулю: *a* — развертка профиля излучения; *б* — профиль излучения на декартовой плоскости.

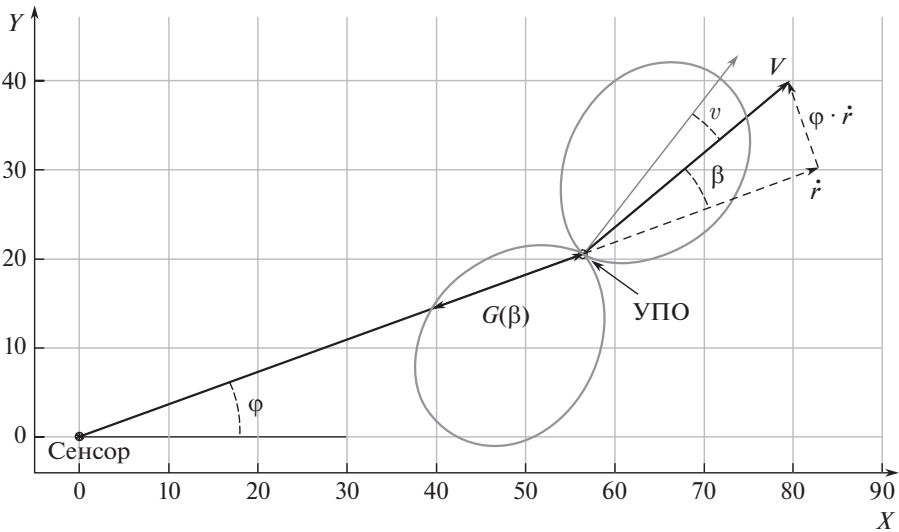


Рис. 2. Геометрия направления движения, расположения УПО и сенсора.

Углы α и β связаны соотношением $\alpha = -\beta$. Индикатриса излучения $G(\beta, \nu)$ в этом случае будет иметь вид

$$(2.4) \quad G(\beta, \nu) = P(-\beta, \nu) = \cos^2(-\beta - \nu) = \cos^2(\nu + \beta).$$

После замены $\rho = \ln r$ угол β принимает вид $\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} \right)$. Тогда подынтегральное выражение в (2.1) можно переписать в виде

$$(2.5) \quad S = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2) \cdot \cos^2(\nu + \beta) = (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2) \cdot (\cos \nu \cdot \cos \beta - \sin \nu \cdot \sin \beta)^2.$$

С учетом равенств

$$(2.6) \quad \sin \beta = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\dot{\rho}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2}}$$

выражение (2.5) принимает вид

$$(2.7) \quad S = (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu)^2 = \cos^2(\nu + \beta) \frac{V^2}{r^2},$$

где V — модуль скорости УПО.

Теперь задача 1 может быть переформулирована следующим образом.

Задача 2. Требуется найти траекторию (вектор временных зависимостей) $(\rho^(t), \varphi^*(t))$, которая минимизирует функционал*

$$(2.8) \quad R(\rho(\cdot), \varphi(\cdot)) = \int_0^T (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu)^2 dt,$$

с краевыми условиями

$$\rho(0) = \rho_A, \quad \rho(T) = \rho_B, \quad \varphi(0) = \varphi_A, \quad \varphi(T) = \varphi_B.$$

Особенностью задачи 2 является то, что из-за специального вида индикатрисы излучения φ_B не определяется однозначно. Краевые условия для точки B могут отличаться на величину $2K\pi$. В простейшем случае можно двигаться, огибая сенсор с разных сторон. Более подробно этот случай рассмотрен при решении задачи нахождения оптимальной траектории с постоянной скоростью движения.

3. Особенности экстремальных траекторий, являющихся решением задачи 2

Уравнения Эйлера задачи 2 имеют вид

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \dot{\rho}} = 2 \cdot \cos \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) = \text{const}, \\ \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} = -2 \cdot \sin \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) = \text{const}. \end{cases}$$

Поскольку функция $S(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi})$ в уравнении (2.7) не зависит явным образом от t , то можно записать выражение для первого интеграла уравнений Эйлера задачи 2 в виде обобщенной функции Гамильтона, которая совпадает с S , а именно:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\rho} \cdot \frac{\partial S}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\varphi} \cdot \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}} - S &= 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \cos \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) - \\ &- 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \nu \cdot (\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu) - S = S = \text{const}. \end{aligned}$$

Поскольку $S = \text{const}$ и значение функционала в оптимальном случае равно $S \cdot T$, где T — время движения, то выражение $\dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu$ с точностью до знака совпадает с \sqrt{S} . Обозначим $C = \sqrt{S}$ и запишем это уравнение

$$(3.3) \quad \dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C,$$

где $\sigma = \{-1, 1\}$. Это уравнение вследствие (2.7) также можно записать в виде

$$(3.4) \quad \cos(\nu + \beta(t)) = \frac{\sigma \cdot C \cdot r(t)}{V(t)},$$

где V — скорость движения. Если уравнение (3.3) проинтегрировать, то получим:

$$(3.5) \quad (\rho(t) - \rho(0)) \cdot \cos \nu - (\varphi(t) - \varphi(0)) \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C \cdot t.$$

Подставляя в (3.5) время движения $t = T$, получим значение константы

$$(3.6) \quad C = \frac{(\rho(T) - \rho(0)) \cdot \cos \nu - (\varphi(T) - \varphi(0)) \cdot \sin \nu}{\sigma \cdot T}.$$

Уравнение (3.5) можно рассматривать как параметрическое задание времени движения по заданной параметрической траектории $(\rho(p), \varphi(p))$

$$(3.7) \quad (\rho(p) - \rho(0)) \cdot \cos \nu - (\varphi(p) - \varphi(0)) \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C \cdot t(p),$$

где $\rho(p)$, $\varphi(p)$, $t(p)$ — непрерывные функции, $p \in [0, 1]$, а значение C определяется в (3.6). “Простым” решением, удовлетворяющим (3.3), являются линейные зависимости $\dot{\rho} = \frac{\rho(T) - \rho(0)}{T}$ и $\dot{\varphi} = \frac{\varphi(T) - \varphi(0)}{T}$, которые, во-первых, являются решением для всех значений угла ν , а во-вторых, индикатриса излучения постоянна на всей траектории, и траектория движения в координатах (ρ, φ) является отрезком прямой, соединяющей начальную и конечную точки. В этом случае в декартовой системе координат решением является логарифмическая спираль. Поэтому в дальнейшем получаемые решения для траекторий и скоростей движения будем часто сравнивать с этим базовым решением, а значение функционала риска — с его минимальным значением на спирали [7]. Поскольку имеется только одно независимое уравнение Эйлера для нахождения экстремали, то можно вводить дополнительные условия для однозначного решения вариационной задачи. Постановок дополнительной задачи может быть множество, но в текущей статье остановимся на двух следующих формулировках. Сначала исследуем для произвольной траектории возможность обеспечения движения по ней таким образом, чтобы значение функционала было минимальным. Если это возможно, то найдем оптимальный скоростной режим. Далее, во второй задаче, найдем траекторию, движение по которой с постоянной скоростью обеспечивает минимальное значение функционала риска.

4. Задача нахождения оптимального скоростного режима движения по заданной траектории

В данном разделе рассматривается задача 2 для случая заданной траектории УПО, а именно: задача нахождения оптимального скоростного режима движения по заданной траектории с минимальным риском для УПО с профилем излучения (2.2), соответствующим нулевому гессиану, и параметром ν . В общем случае можно считать, что траектория задана параметрически. Остановимся на классе гладких траекторий. Траектории задаются в декартовой системе координат $(x(p), y(p))$ или полярной системе $(r(p), \varphi(p))$ при $p \in [0, 1]$. Зафиксируем траекторию в декартовой системе координат, как показано на рис. 3.

Перейдем в систему координат (ρ, φ) с начальными координатами (ρ_A, φ_A) . Система координат удобна тем, что основные переменные, входящие в уравнения, являются координатными осями, а β является углом наклона касательной к траектории, построенной в этой системе координат.

Если углы определены параметрически, то вместо переменной t воспользуемся временноподобным параметром p . Траектория $(\rho(p), \varphi(p))$ и параметрическая зависимость $\beta(p)$ приведены на рис. 4.

Замечание 1. Из уравнения (3.4) следует, что значения суммы углов $\nu + \beta(t)$ вдоль всей траектории должны быть такими, чтобы знак функции $\cos(\nu + \beta(t))$ не изменялся.

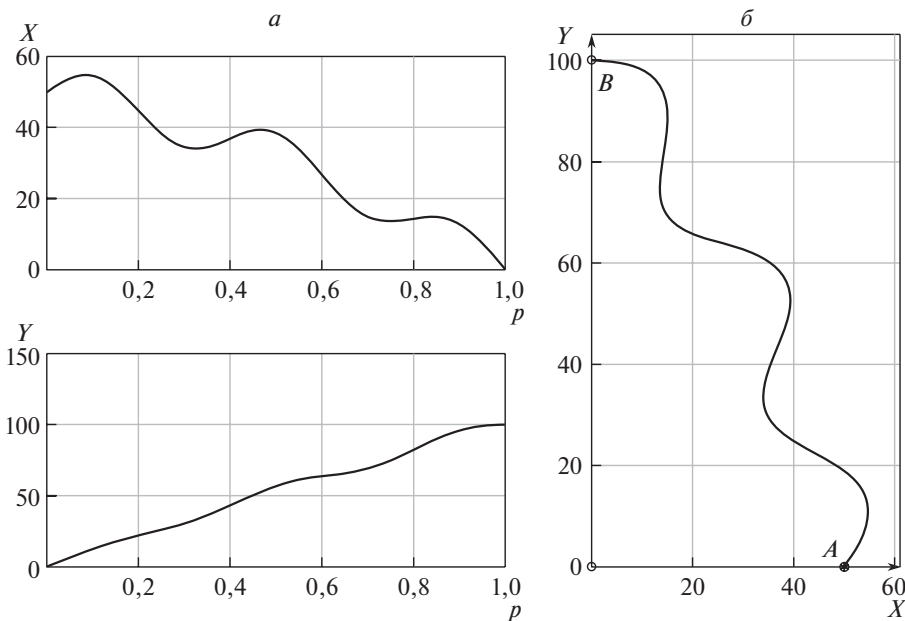


Рис. 3. Пример траектории: а — параметрическое задание координат; б — траектория в декартовых координатах.

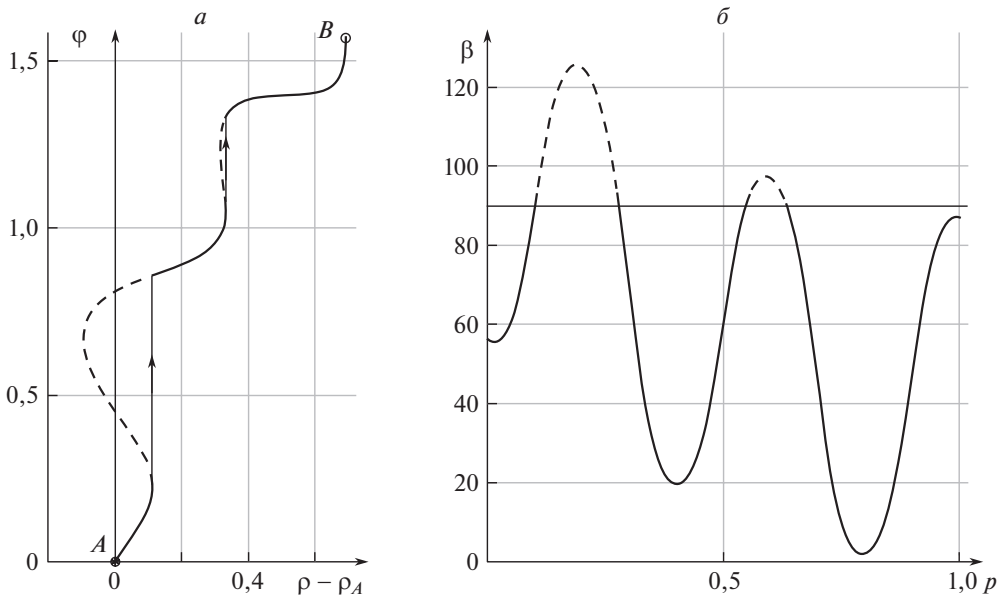


Рис. 4. Графики траектории и производной $\beta(p)$: *a* — траектория в координатах (ρ, φ) ; *б* — значения угла β на траектории.

Замечание 2. Пусть $(\rho(p), \varphi(p))$ — гладкая траектория. Тогда функция $t(p)$ из (3.7) тоже гладкая. Более того, если выполнено условие из замечания 1, то $t(p)$ — монотонно возрастающая функция. В частности, существует обратная к ней функция $p(t)$.

Определим значения β_{\max} и β_{\min} как максимальное и минимальное значения угла $\beta(p)$ на траектории, а $\Delta\beta = \beta_{\max} - \beta_{\min}$ — как диапазон изменения углов. Тогда очевидно выполняется следствие из замечания 1.

Следствие 1. Если $\Delta\beta > 180^\circ$, то движение по такой траектории с риском, равным риску на оптимальной логарифмической спирали, невозможно.

Траектории, удовлетворяющие следствию 1, в статье не рассматриваются.

В приведенном примере $\beta_{\min} = 1,938^\circ$, $\beta_{\max} = 125,43^\circ$ и угол β при движении по траектории пересекает значение 90° , как показано на рис. 4, где углы касательной к траектории становятся равными 90° . Зоны нарушения замечания 1 отмечены штриховой линией. Однако значение $\Delta\beta = 123,492^\circ < 180^\circ$, а значит, существует диапазон параметров ν , при котором движение с оптимальной скоростью возможно. Для этого находим значение максимального угла β_{kr} из набора углов $90^\circ + k \cdot 180^\circ \leq \beta_{\max}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда диапазон возможных значений параметра ν , для которых выполняется замечание 1, находится внутри интервала $(\beta_{kr} - \beta_{\min} + k \cdot 180^\circ, \beta_{kr} + 180^\circ - \beta_{\max} + k \cdot 180^\circ)$. Для траектории, представленной на рис. 4, $\beta_{kr} = 90^\circ$, и, значит, углы лежат в диапазоне $\nu \in (88,062^\circ; 144,57^\circ)$. Следующий интервал углов находит-

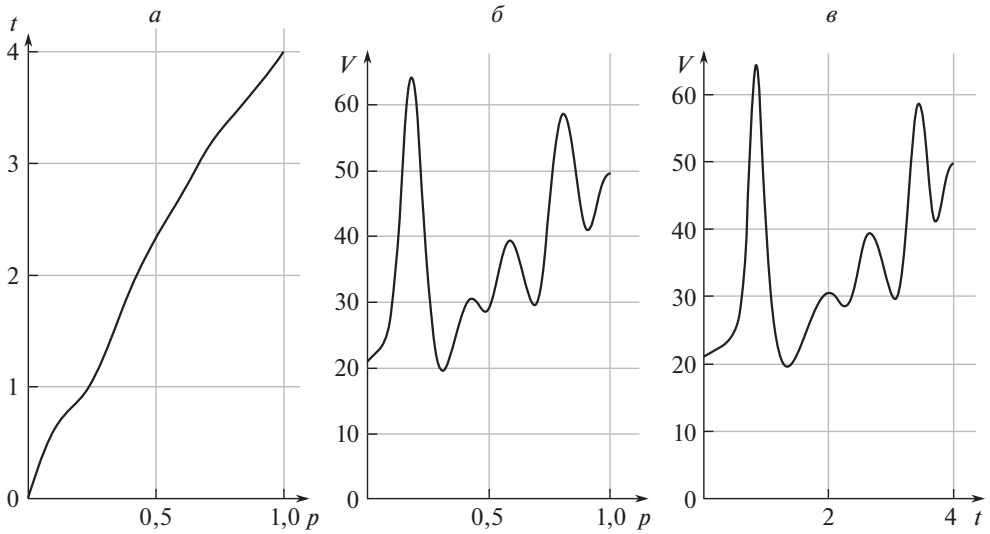


Рис. 5. Решение для угла ν , равного 125° : а — $t(p)$; б — $V(p)$; в — $V(t)$.

ся при $\nu \in (268,062^\circ; 324,57^\circ)$, однако этот диапазон соответствует тому же профилю.

Алгоритм решения исследуемой в разделе задачи имеет следующий вид.

Алгоритм 1 (Алгоритм нахождения $V(t)$).

1. Задание параметров ν , T и траектории $(\rho(p), \varphi(p))$.
2. Проверка замечания 1 для заданного значения ν и фиксированной траектории.
3. Если замечание 1 выполнено, то:
4. Расчет константы C из уравнения (3.6);
5. Расчет $t(p)$ из уравнения (3.7);
6. Расчет скорости по формуле $V(p) = \left| \frac{C \cdot r(p)}{\cos(\nu + \beta(p))} \right|$.
7. Проведение обратной замены времени и нахождение зависимости $V(t) = V(p(t))$.

Для иллюстрации возьмем значение угла $\nu = 125^\circ$, которое попадает в диапазон допустимых значений ν . Функции $t(p)$, $V(p)$ и $V(t)$, найденные согласно алгоритму 1, приведены на рис. 5.

5. Задача нахождения оптимальной траектории с постоянной скоростью движения

В разделе 4 для регуляризации задачи в качестве дополнительного второго уравнения использовались параметризованные траектории движения. В этом разделе в качестве дополнительного уравнения будем использовать условие

постоянства скорости. Тогда система уравнений имеет вид

$$(5.1) \quad \begin{cases} \dot{\rho} \cdot \cos \nu - \dot{\varphi} \cdot \sin \nu = \sigma \cdot C, \\ \dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot r^2 = V_0^2, \end{cases}$$

где $\rho = \ln r$, V_0 — постоянная скорость на траектории. Рассмотрим следующий пример. Пусть сенсор S расположен на декартовой плоскости в точке $(0, 0)$, а УПО требуется осуществить переход из точки $A(50, 0)$ в точку $B(-60, 180)$, как показано на рис. 6. Заданное время движения по траектории $T = 4$. Значение угла ν в профиле равно 12° .

На плоскости (x, y) заданы расстояния от сенсора до начальной точки $r_A = 50$ и до конечной точки $r_B = 189,737$, на плоскости (ρ, φ) эти расстояния равны $\rho_A = 3,912$, $\rho_B = 5,2456$. Точки A, B на плоскости (x, y) отображаются в точки $(0, 0)$ и $(\rho(T) - \rho(0), \varphi(T) - \varphi(0))$ на плоскости $(\rho - \rho(0), \varphi - \varphi(0))$, как показано на рис. 7. Точка A отображается единственным образом, а точка B может отображаться во множество точек, расположенных на вертикали с координатой $\rho(T) - \rho(0)$ с расстоянием между точками по оси φ , равным $2\pi k$, и с расстоянием между соседними точками по оси φ , равным 2π . На рис. 7 представлены четыре возможные точки, пронумерованные цифрами 1, 2, 3, 4. Значения угла φ для этих точек соответственно равны $(-4,3906; 1,8925; 8,1757; 14,4589)$ радиан.

Проекция векторов с началом в начале координат и концами в точках 1–4 на вектор $(\cos \nu, -\sin \nu)$, обозначенный штриховой линией, представлены на рис. 7 и равны соответственно 2,217, 0,911, 0,3954 и 1,7017. Проекция вектора с концом в точке 3 минимальна, далее по возрастанию идут проекции векторов с концами в точках 2, 4 и 1. Здесь представлена еще одна точка φ_0 , для которой значение произведения $C \cdot T = 0$, поскольку она расположена на перпендикуляре к оси $(\cos \nu, -\sin \nu)$, проведенном через точку $(0, 0)$. Для любой точки с координатами $(\rho(T) - \rho(0), \varphi)$, находящейся вне интервала $(\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$, найдется точка, находящаяся внутри интервала, которая в декартовой системе координат определяет конечную точку и имеет меньшее значение функционала. Назовем этот интервал “рабочей областью”. Максимальное значение произведения в рабочей области равно $C \cdot T = |\pi \cdot \sin \nu|$.

Траектории в виде логарифмических спиралей для всех вышеприведенных случаев представлены на рис. 6. Толщина линии соответствует величине проекции. Минимальная толщина соответствует траектории с наибольшей проекцией, а значит, с наибольшим значением функционала, максимальная толщина — траектории с наименьшей проекцией (наименьшим значением функционала). Минимальный риск достигается на переходе из начальной точки в точку с номером 3, которая находится в “рабочей области”. Те же четыре траектории для переходов представлены и на рис. 7. Поэтому для решения задачи сначала нужно выбрать значение угла $\varphi(T)$ и логарифмическую спираль, в окрестности которой будем строить искомую траекторию. Значение φ_B должно лежать внутри “рабочей области”. Теперь будем считать, что значение φ_B выбрано, и переходим к решению задачи.

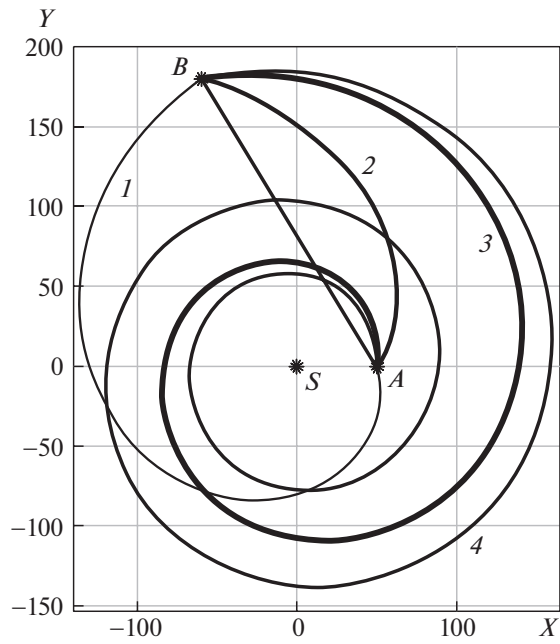


Рис. 6. Положения сенсора S , начальной точки A и конечной точки B .

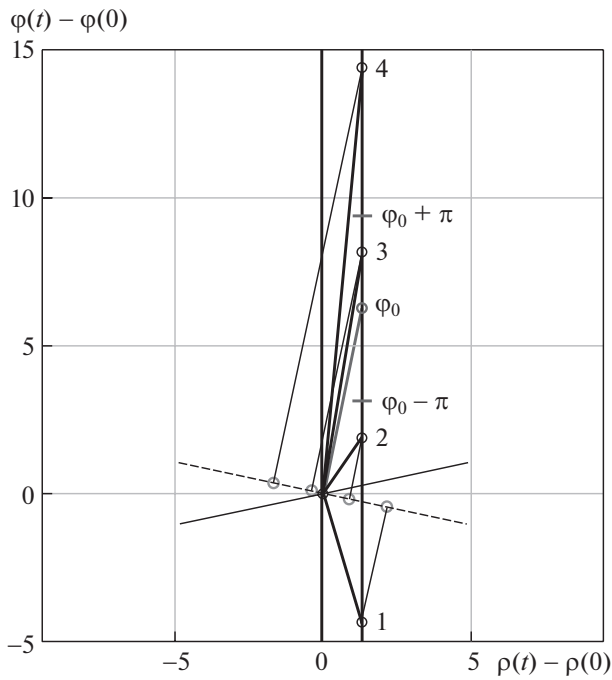


Рис. 7. Возможные положения объекта 1, 2, 3, 4.

5.1. Частные случаи $r_B = r_A$ и $C = 0$

Начнем решение задачи с рассмотрения частного случая, когда $r(T) = r(0) = r_A = r_B$. Тогда частным случаем движения по логарифмической спирали является движение по окружности с постоянной скоростью, что и является решением задачи, рассмотренной в [12],

$$(5.2) \quad \begin{cases} r(t) = \text{const}, \\ \varphi(t) = \varphi_A + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{T} \cdot t. \end{cases}$$

Другим частным случаем является ситуация, когда $r_B \neq r_A$, а в выражении (3.5) $C = 0$. Угол ν в этом случае равен $\nu_0 = \arctg \frac{\rho_B - \rho_A}{\varphi_B - \varphi_A}$. Тогда в системе координат $(\rho - \rho(0), \varphi - \varphi(0))$ траектория является прямой, проходящей через начало координат, и соответственно в декартовой системе (x, y) — логарифмической спиралью. Поскольку значение индикатрисы излучения равно нулю, двигаться можно с любой скоростью и в том числе с постоянной. Модуль скорости в таком случае определяется длиной логарифмической спирали и временем движения. Значение функционала равно нулю. Решение уравнения $\dot{r} = \pm \sin(\nu_0) \cdot V_0$ определяет радиальную компоненту траектории

$$(5.3) \quad r(t) = \pm \sin(\nu_0) \cdot V_0 \cdot t + r_A,$$

где значение скорости $V_0 = \left| \frac{r_B - r_A}{T \cdot \sin(\nu_0)} \right|$. Из уравнения (3.5) получим угловую компоненту

$$(5.4) \quad \varphi(t) = \text{ctg}(\nu_0) \cdot \ln \left(\frac{t}{T} \cdot (\exp(\text{tg} \nu_0 \cdot (\varphi_B - \varphi_A) - 1) + 1) \right) + \varphi_A.$$

Выражения (5.3) и (5.4) определяют траекторию.

5.2. Общий случай

Перейдем к исследованию общего случая. Будем считать, что $C \neq 0$. Также предполагаем, что $\sin \nu \neq 0$ и $\cos \nu \neq 0$. Эти случаи рассмотрим далее. Справедлива лемма 1.

Лемма 1. Система (5.1) заменами $w = \arcsin \left(\frac{C \cdot r}{V_0} \right)$ и $\tau = C \cdot \cos \nu \cdot t$ сводится к дифференциальному уравнению

$$(5.5) \quad \frac{dw}{d\tau} = \sigma \cdot \text{tg} w \pm \text{tg} \nu.$$

Доказательство.

Из первого уравнения системы (5.1) выразим $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{r} \cdot \cos \nu - \sigma \cdot C \cdot r}{r \cdot \sin \nu}.$$

Подставим $\dot{\varphi}$ во второе уравнение. Решение квадратного уравнения относительно \dot{r} имеет вид

$$(5.6) \quad \dot{r} = \sigma \cdot C \cdot r \cdot \cos \nu \pm \sin \nu \cdot \sqrt{V_0^2 - (C \cdot r)^2}.$$

Разделим обе части уравнения (5.6) для \dot{r} на V_0 и получим уравнение

$$(5.7) \quad \frac{\dot{r}}{V_0} = \frac{\sigma \cdot C \cdot r}{V_0} \cdot \cos \nu \pm \sin \nu \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r}{V_0}\right)^2}.$$

Далее совершим замену $u = \frac{C \cdot r}{V_0}$ и подставим в (5.7)

$$(5.8) \quad \frac{\dot{u}}{C} = \sigma \cdot u \cdot \cos \nu \pm \sin \nu \cdot \sqrt{1 - u^2}.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos \nu$, получим

$$(5.9) \quad \frac{\dot{u}}{C \cdot \cos \nu} = \sigma \cdot u \pm \operatorname{tg} \nu \cdot \sqrt{1 - u^2}.$$

Сделаем замену времени $\tau = C \cdot \cos \nu \cdot t$:

$$(5.10) \quad \frac{du}{d\tau} = \sigma \cdot u \pm \operatorname{tg} \nu \cdot \sqrt{1 - u^2}.$$

Заметим, что область определения уравнения $|u| \leq 1$ и, совершив заключительную замену $w = \operatorname{arcsin} u$, получим утверждение леммы 1, уравнение (5.5). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Уравнение (5.5) может быть проинтегрировано в неявном виде

$$(5.11) \quad c_1 + \frac{2 \cdot \tau}{\cos^2 \nu} \mp 2 \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot w - \ln \left(((\operatorname{tg} w \pm \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu) \cdot \cos w)^2 \right) = 0.$$

Здесь c_1 — постоянная интегрирования.

Справедливость леммы 2 проверяется непосредственным дифференцированием выражения (5.11).

Сделаем обратную замену времени $\tau = C \cdot \cos \nu \cdot t$ и перепишем решение (5.11) в виде

$$(5.12) \quad c_1 + \frac{2 \cdot \sigma \cdot t}{\cos \nu} \mp 2 \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot w - \ln \left(((\operatorname{tg} w \pm \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu) \cdot \cos w)^2 \right) = 0.$$

Значение константы c_1 находится из начальных условий при $t = 0$, а именно:

$$(5.13) \quad c_1 = \pm 2 \cdot \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu \cdot w(0) + \ln \left(((\operatorname{tg} w(0) \pm \sigma \cdot \operatorname{tg} \nu) \cdot \cos w(0))^2 \right),$$

где $w(0) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r(0)}{V_0}\right)$. Подставив (5.13) в (5.12) и преобразовав выражение, получим решение относительно функции $w(t)$ в неявном виде

$$(5.14) \quad \pm \sin \nu \cdot (w(t) - w(0)) + \sigma \cdot \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(t))}{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(0))} \right) = C \cdot t.$$

Далее, умножив обе части уравнения на σ , получим

$$(5.15) \quad \pm \sigma \cdot (w(t) - w(0)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(t))}{\sin(\nu \pm \sigma \cdot w(0))} \right) = \sigma \cdot C \cdot t.$$

Уравнения для нахождения скорости движения V_0 получаются при значении времени, равном времени движения $t = T$. Значение V_0 должно удовлетворять хотя бы одному из нижеприведенных уравнений:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} +\sigma \cdot (w(T) - w(0)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \sigma \cdot w(T))}{\sin(\nu + \sigma \cdot w(0))} \right) &= \sigma \cdot C \cdot T, \\ -\sigma \cdot (w(T) - w(0)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu - \sigma \cdot w(T))}{\sin(\nu - \sigma \cdot w(0))} \right) &= \sigma \cdot C \cdot T, \end{aligned}$$

где $w(0) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r_A}{V_0}\right)$, а $w(T) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r_B}{V_0}\right)$.

По существу, уравнения (5.16) — это две параметрические зависимости от V_0 , и для нахождения скоростного режима на всей траектории нужно найти корень хотя бы одной из приведенных функций. Заметим, что значения $w(0)$ и $w(T)$ связаны друг с другом. Например, если $r_B < r_A$, $w(T) = \arcsin\left(\frac{r_B}{r_A} \cdot \sin w(0)\right)$, иначе $w(0) = \arcsin\left(\frac{r_A}{r_B} \cdot \sin w(T)\right)$.

Определим $r_{\max} = \max\{r_A, r_B\}$, $r_{\min} = \min\{r_A, r_B\}$ и введем новую переменную

$$(5.17) \quad z = \sigma \arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\max}}{V_0}\right).$$

Через значения функции z определяются значения $w(0)$ и $w(T)$. Одно из этих значений равно z , а другое равняется $\arcsin\left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \cdot \sin z\right)$. Эта функция удобна тем, что ее значения ограничены диапазоном $[-\pi/2, \pi/2]$ и оба уравнения для нахождения V_0 с участием $w(0)$, $w(T)$ записываются единообразно.

Если $\sigma = 1$, то первое уравнение (5.16) формально определяет поведение в диапазоне от $z \in [\nu, \pi/2 + \nu]$, второе уравнение (5.16) определяет поведение на интервале от $z \in [-\pi/2 + \nu, \nu]$. В общем случае получаемые решения должны быть приведены к диапазону $z \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Если $\sigma = -1$, то, наоборот, уравнения в (5.16) просто меняются местами и это никак не влияет на процедуру нахождения корня.

Лемма 3. Оптимальное значение V_0 модуля скорости на траектории определяется решением уравнения

$$(5.18) \quad F(z) = \sigma \cdot \sigma_r \cdot C \cdot T,$$

где функция $F(z)$ равна

$$(5.19) \quad F(z) = (z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right),$$

$$k_r = \frac{r_{\min}}{r_{\max}}, \quad \sigma_r = \text{sign}(r_B - r_A).$$

Доказательство.

Определим $k_r = \frac{r_{\min}}{r_{\max}}$, $\sigma_r = \text{sign}(r_B - r_A)$. Если $r_{\max} = r_B$, то уравнение (5.16) будет иметь вид

$$(z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right) = \sigma \cdot C \cdot T.$$

И, наоборот, если $r_{\max} = r_A$, то

$$(\arcsin(k_r \cdot \sin z) - z) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))}{\sin(\nu + z)} \right) = \sigma \cdot C \cdot T.$$

Умножив на (-1) и преобразовав, получим зависимость

$$(z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right) = -\sigma \cdot C \cdot T.$$

Поэтому с использованием константы σ_r уравнение (5.16) будет иметь вид

$$\begin{aligned} (z - \arcsin(k_r \cdot \sin z)) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin z))} \right) = \\ = \sigma \cdot \sigma_r \cdot C \cdot T. \end{aligned}$$

Теперь, определив функцию $F(z)$ посредством (5.19), получаем утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Найдем область определения функции $F(z)$. Еще раз заметим, что область определения находится внутри отрезка $z \in [-\pi/2, \pi/2]$. Для существования значения функции необходимо, чтобы под знаком логарифма функции $\sin(\nu + z)$ и $\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin(z)))$ имели один знак и не равнялись нулю. По исходным предположениям $\sin \nu \neq 0$, а на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$ имеется точка $z = \nu_0 = -\nu$, в которой $\sin(\nu + \nu_0) = 0$, и точка $z = z_{gr}$, в которой $\sin(\nu + \arcsin(k_r \cdot \sin(z_{gr}))) = 0$.

Лемма 4. 1) Если z_{gr} существует и $z_{gr} \leq \nu_0$, то область определения функции $F(z)$ задается диапазоном $z \in [-\pi/2, z_{gr}] \cup (\nu_0, \pi/2]$, в противном случае $z \in (\nu_0, \pi/2]$.

2) Если z_{gr} существует и $z_{gr} \geq \nu_0$, то область определения функции $F(z)$ задается диапазоном $z \in [-\pi/2, \nu_0) \cup (z_{gr}, \pi/2]$, в противном случае $z \in [-\pi/2, \nu_0)$.

Доказательство.

Условия существования значения функции $F(z)$ записываются в виде $\arcsin(k_r \cdot \sin z) < \nu_0$ и $z < \nu_0$, либо $\arcsin(k_r \cdot \sin z) > \nu_0$ и $z > \nu_0$. Если точка z_{gr} находится слева от ν_0 , то при $\frac{\sin \nu_0}{k_r} < -1$ в этой области функция не определена, поскольку z_{gr} не существует, и, значит, $z \in (\nu_0, \pi/2]$. В противном случае $z_{gr} = \arcsin\left(\frac{\sin \nu_0}{k_r}\right)$ и область определения $z \in [-\pi/2, z_{gr}) \cup (\nu_0 - \nu, \pi/2]$.

Аналогично доказывается и второе утверждение леммы 4. Лемма 4 доказана.

Чтобы получить менее громоздкий вид функции $F(z)$, введем переменную

$$(5.20) \quad \hat{z} = \arcsin(k_r \cdot \sin(z)).$$

Находить значение V_0 будем в два этапа. Сначала из уравнения (5.19) найдем значение z , поскольку значение V_0 явно не входит в уравнение, а затем по нему определим значение V_0 . Функция $F(z)$ в новых обозначениях примет вид

$$(5.21) \quad F(z) = (z - \hat{z}) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + z)}{\sin(\nu + \hat{z})} \right).$$

Лемма 5. Функция $F(z)$ при условии $\sin \nu \neq 0$ является монотонной функцией в каждой односвязной части области определения, задаваемой по лемме 4, за исключением точек $z = \pm \pi/2$.

Доказательство.

Найдем производную $\frac{dF(z)}{dz}$. Заметим, что $\frac{d\hat{z}}{dz} = k_r \cdot \frac{\cos z}{\cos \hat{z}}$. Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{dz} &= \left(1 - k_r \cdot \frac{\cos z}{\cos \hat{z}}\right) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \frac{\sin(\nu + \hat{z})}{\sin(\nu + z)} \times \\ &\times \left(\frac{\cos(\nu + z)}{\sin(\nu + \hat{z})} - \frac{\sin(\nu + z) \cdot \cos(\nu + \hat{z}) \cdot k_r \cdot \cos z}{\sin^2(\nu + \hat{z}) \cdot \cos \hat{z}} \right) = \\ &= \sin \nu + \cos \nu \cdot \frac{\cos(\nu + z)}{\sin(\nu + z)} - \frac{k_r \cdot \cos z}{\cos \hat{z}} \cdot \left(\sin \nu + \frac{\cos \nu \cdot \cos(\nu + \hat{z})}{\sin(\nu + \hat{z})} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos z}{\sin(\nu + z)} - \frac{k_r \cdot \cos z}{\sin(\nu + \hat{z})} = \\
&= \frac{\cos z}{\sin(\nu + z) \cdot \sin(\nu + \hat{z})} \cdot (\sin \nu \cdot \cos \hat{z} + \cos \nu \cdot \sin \hat{z} - \\
&\quad - k_r \cdot \sin \nu \cdot \cos z - k_r \cdot \cos \nu \cdot \sin z) = \\
&= \frac{\cos z \cdot \sin \nu}{\sin(\nu + z) \cdot \sin(\nu + \hat{z})} \cdot (\cos \hat{z} - k_r \cdot \cos z).
\end{aligned}$$

Поскольку $\cos z > 0$ при $z \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\sin(\nu + z) \cdot \sin(\nu + \hat{z}) > 0$, так как $\sin(\nu + z) \sin(\nu + \hat{z})$ одного знака по условию леммы 4, $\cos(\hat{z}) - k_r \cdot \cos z = \sqrt{1 - (k_r \cdot \sin z)^2} - \sqrt{k_r^2 - (k_r \cdot \sin z)^2} > 0$ и $0 < k_r < 1$, знак производной определяется знаком $\sin \nu$. Если $\sin \nu > 0$, функция монотонно возрастает в каждой односвязной части области определения и, наоборот, если $\sin \nu < 0$, функция монотонно убывает в каждой односвязной части области определения. Лемма 5 доказана.

По лемме 5 легко определить наличие корня внутри области определения $F(z)$, поскольку на одной из границ области значение функции стремится к $+\infty$ или $-\infty$. Величина значения функции на другой границе области и поведение функции $F(z)$ позволяют определить, имеется ли решение, и найти его.

Теорема 1. Если уравнение (5.18) имеет решение и $k_r < 1$, то это решение является единственным.

Доказательство.

Покажем, что решение единственно. Когда область определения состоит из единственного полуинтервала, то по лемме 5 в силу того что функция $F(z)$ монотонно возрастает или убывает, а правая часть уравнения — константа, решение единственно. Пусть имеется два полуинтервала области определения. Тогда по лемме 4 $k_r > \sin \nu$ и каждый из полуинтервалов примыкает к одной из границ возможных значений z . Рассмотрим разность значений функции на границах $\Delta F = F(\pi/2) - F(-\pi/2)$. Заметим, что значение $\Delta F = 0$ для $k_r = 1$. Справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
(5.22) \quad \Delta F &= (\pi/2 - \arcsin k_r) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \pi/2)}{\sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) - \\
&\quad - (-\pi/2 + \arcsin k_r) \cdot \sin \nu - \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu - \pi/2)}{\sin(\nu - \arcsin k_r)} \right) = \\
&= (\pi - 2 \arcsin k_r) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\nu + \pi/2) \cdot \sin(\nu - \arcsin k_r)}{\sin(\nu - \pi/2) \cdot \sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) = \\
&= (\pi - 2 \arcsin k_r) \cdot \sin \nu + \cos \nu \cdot \ln \left(\frac{\sin(\arcsin k_r - \nu)}{\sin(\arcsin k_r + \nu)} \right).
\end{aligned}$$

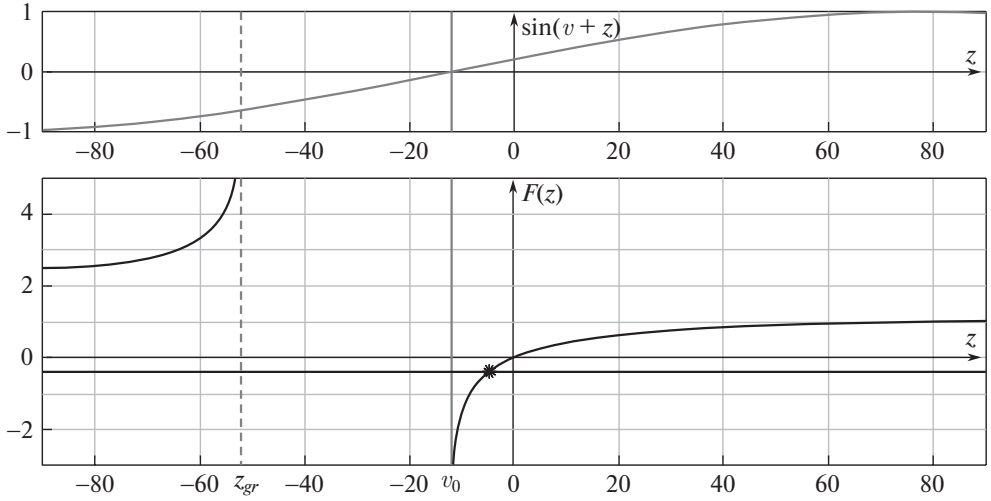


Рис. 8. Функции $\sin \nu + z$ и $F(z)$.

Теперь найдем производную $\frac{d\Delta F}{dk_r}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Delta F}{dk_r} &= -\frac{2 \sin \nu}{\sqrt{1 - k_r^2}} + \frac{\cos \nu \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)}{\sqrt{1 - k_r^2} \cdot \sin(\arcsin k_r - \nu)} \times \\
 &\times \frac{\cos(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu) - \cos(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)}{\sin^2(\arcsin k_r + \nu)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - k_r^2}} \cdot \left(-2 \sin \nu + \frac{\cos \nu \cdot \sin(2 \cdot \nu)}{\sin(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)} \right) = \\
 &= \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 - k_r^2}} \cdot \left(\frac{\cos(2 \arcsin k_r) - \cos(2\nu) + 2 \cos^2 \nu}{\sin(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu)} \right) = \\
 &= \frac{\sin \nu \cdot (1 + \cos(2 \arcsin k_r))}{\sin(\arcsin k_r - \nu) \cdot \sin(\arcsin k_r + \nu) \cdot \sqrt{1 - k_r^2}} = \frac{2 \sin \nu \cdot \sqrt{1 - k_r^2}}{k_r^2 - \sin^2 \nu}.
 \end{aligned}$$

Знак производной $\frac{d\Delta F}{dk_r}$ совпадает со знаком $\sin \nu$, поскольку по лемме 4 $k_r > \sin \nu$. Если $\nu > 0$, то минимальное для левой области значение функции $F(z)$ соответствует $z_1 = -\pi/2$. Значение этой функции максимально для правой области при $z_2 = \pi/2$, а ΔF максимальна при $k_r = 1$ и равна нулю. Это значит, что значения функции в левой области больше значений функции в правой области. Аналогичная ситуация при $\nu < 0$, когда значения функции в левой области меньше значений в правой области. А значит, если решение существует, то оно единственно. Теорема доказана.

Для примера рассмотрим переход, представленный на рис. 6 по траектории 3. На верхней части рис. 8 представлено поведение функции $\sin(\nu + z)$.

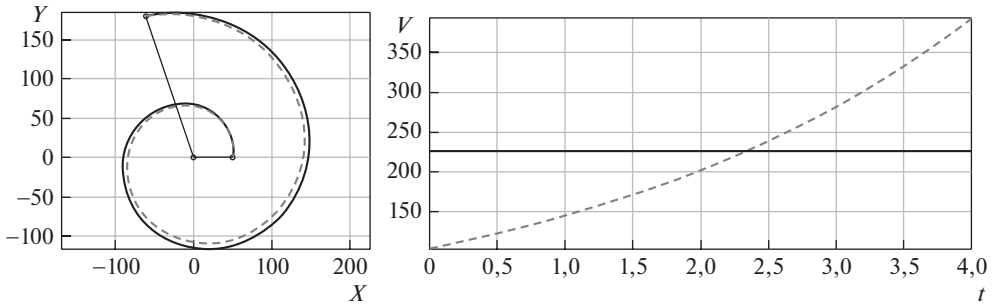


Рис. 9. Экстремальные траектории (слева) и скоростной режим на них (справа).

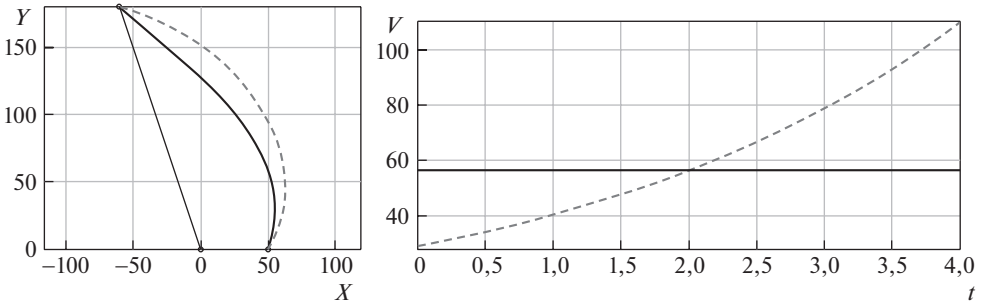


Рис. 10. Экстремальные траектории (слева) и скоростной режим на них (справа).

Точка пересечения этой функцией с нулем определяет положение значения угла ν_0 . Вертикальным отрезком отмечено положение значения $\nu_0 = -12^\circ$. График $F(z)$ расположен в нижней части рисунка. Значение z_{gr} отмечено вертикальной штриховой линией. Область определения $F(z)$ состоит из двух полуинтервалов $[-\pi/2, z_{gr}]$ и $(\nu_0, \pi/2]$. Для рассматриваемого примера $k_r = \frac{r_A}{r_B} = \frac{50}{189,737} = 0,2635$, а $z_{gr} = \arcsin\left(\frac{\sin \nu_0}{k_r}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin(-12^\circ)}{k_r}\right) = -52,089^\circ$. Эта точка отмечена вертикальной штриховой линией. На нижней части рисунка горизонтальной линией отмечено значение правой части уравнения (5.18), равное 0,3954, через которое при $T = 4$ определяется константа $C = 0,09885$. Тогда решением уравнения (5.18) являются точка пересечения соответствующих графиков функций и значение переменной $z = -4,755^\circ$. Оптимальное значение скорости находится по найденным значениям переменных $V_0 = \left| \frac{C \cdot r_{\max}}{\sin z} \right| = 226,25$.

На рис. 9 черным цветом представлены траектория движения и график скорости. Для сравнения штриховой линией представлены траектория в виде логарифмической спирали и оптимальный скоростной режим на этой траектории. Значение функционала $R = 0,039$ и совпадает со значением функционала на логарифмической спирали.

Для сравнения на рис. 10 приведем траектории и скорости для случая перехода в точку 2 на плоскости (ρ, φ) . Значение функционала $R = 0,2075$, что

значительно больше минимального его значения, но совпадает со значением функционала на логарифмической спирали 2.

Осталось рассмотреть несколько частных случаев значений ν . Приступим к их исследованию.

5.3. Частный случай: $\sin \nu = 0$

Рассмотрим случай $\sin \nu = 0$. Тогда справедливо равенство $\cos \nu = \pm 1$ и система уравнений (5.1) принимает вид

$$(5.23) \quad \begin{cases} \dot{r} = \pm \sigma \cdot C \cdot r, \\ \dot{r}^2 + (\dot{\varphi} \cdot r)^2 = V_0^2. \end{cases}$$

Лемма 6. Решение системы уравнений (5.23) имеет вид

$$(5.24) \quad r(t) = r_A \cdot \exp(\pm \sigma \cdot C \cdot t),$$

$$(5.25) \quad \varphi(t) - \varphi_A = \pm (\operatorname{ctg} w(t) + w(t) - \operatorname{ctg} w(0) - w(0)),$$

где $w(t) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right)$.

Доказательство.

Интегрируя первое уравнение (5.23), получим зависимость (5.24). Обозначим $\tilde{C} = \pm C \cdot \sigma$, тогда $r(t) = r_A \cdot \exp(\tilde{C} \cdot t)$. Подставляя \tilde{C} во второе уравнение системы (5.23), получим

$$\tilde{C}^2 \cdot r^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot r^2 = V_0^2.$$

Поскольку $\tilde{C}^2 = C^2$, то выпишем дифференциальное уравнение относительно $\dot{\varphi}(t)$ в виде

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{r^2(t)} - C^2} = \pm \sqrt{\frac{V_0^2}{r_A^2} \cdot \exp(-2 \cdot \tilde{C} \cdot t) - C^2}.$$

Сделаем замену $\tau = \exp(\tilde{C} \cdot t)$ и получим

$$d\varphi = \pm \frac{1}{\tau^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_0}{r_A \cdot C}\right)^2 - \tau^2} \cdot d\tau.$$

После интегрирования последнего уравнения зависимость $\varphi(\tau)$ с некоторой константой интегрирования C_2 принимает вид

$$\varphi(\tau) = \pm \left(-\frac{1}{\tau} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_0}{r_A \cdot C}\right)^2 - \tau^2} - \arcsin\left(\frac{\tau \cdot r_A \cdot C}{V_0}\right) \right) + C_2.$$

Обратная замена времени дает зависимость $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \left(-\sqrt{\left(\frac{V_0}{r(t) \cdot C}\right)^2 - 1} - \arcsin\left(\frac{r(t) \cdot C}{V_0}\right) \right) + C_2.$$

Значение C_2 находится из начальных условий:

$$C_2 = \varphi_A \mp \left(-\sqrt{\left(\frac{V_0}{r_A \cdot C}\right)^2 - 1} - \arcsin\left(\frac{r_A \cdot C}{V_0}\right) \right).$$

Если перейти к переменным $w(t) = \arcsin\left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right)$, то получим зависимость $\varphi(t)$ в виде (5.25). Лемма 6 доказана.

По лемме 6 при подстановке граничного условия в соотношения (5.24)–(5.25) получаем уравнение для нахождения V_0 , которое имеет вид

$$(5.26) \quad |\varphi_B - \varphi_A| = |\operatorname{ctg}(w(T)) + w(T) - \operatorname{ctg}(w(0)) - w(0)|.$$

Функция $\operatorname{ctg}(w) + w$ монотонно убывает на интервале $(0, \pi/2)$ при увеличении w , поскольку

$$\frac{d(\operatorname{ctg} w + w)}{dw} = \frac{-\sin^2 w - \cos^2 w}{\sin^2 w} + 1 = -\operatorname{ctg}^2 w,$$

поэтому если $w(T) > w(0)$, то значение правой части уравнения (5.26) равно $\operatorname{ctg} w(0) + w(0) - \operatorname{ctg} w(T) - w(T)$, иначе $\operatorname{ctg} w(T) + w(T) - \operatorname{ctg} w(0) - w(0)$. Если ввести функции z из (5.17) и \hat{z} из (5.20), то уравнение (5.26) примет вид

$$(5.27) \quad |\varphi_B - \varphi_A| = \operatorname{ctg} \hat{z} + \hat{z} - \operatorname{ctg} z - z.$$

Лемма 7. Решение уравнения (5.27) существует и единственно, если

$$(5.28) \quad |\varphi_B - \varphi_A| \geq \operatorname{ctg}(\arcsin k_r) + \arcsin k_r - \pi/2.$$

Доказательство.

Переменная z , как функция V_0 , монотонна и принимает значения $z \in (0, \pi/2]$. Минимальное значение правой части уравнения (5.27) достигается при значении $z = \pi/2$ и соответственно $\hat{z} = \arcsin k_r$ и равно

$$\operatorname{ctg}(\arcsin k_r) + \arcsin k_r - \pi/2.$$

Поэтому решение существует и единственно, если выполнено (5.28). Лемма 7 доказана.

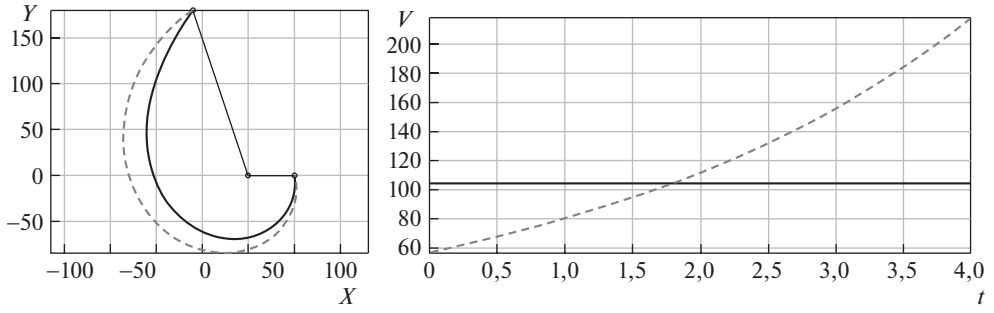


Рис. 11. Экстремальные траектории (слева) и скоростной режим на них (справа).

Рассмотрим пример траектории, изображенной на рис. 6, и обратимся к рис. 7. Поскольку $\nu = 0$, то проекция на горизонтальную ось для всех точек одинакова и это означает, что для всех переходов значение функционала одинаково. Однако скорости для этих случаев сильно отличаются. Естественно выбрать траекторию с минимальной скоростью движения. Рассмотрим сначала движение в окрестности траектории 2. Тогда $|\varphi_B - \varphi_A| = 1,8925$ радиан, значение $k_r = r_B/r_A = 50/189,737 = 0,2635$ и значение выражения (5.28) $\text{ctg}(\arcsin k_r) + \arcsin k_r - \pi/2 = 2,3565 > |\varphi_B - \varphi_A|$. Траектории, по которой УПО движется с постоянной скоростью и которая соответствует минимальному значению риска на траектории 2, не существует. Но если взять траекторию 1, для которой $|\varphi_B - \varphi_A| = 4,3906$ радиан, то движение с постоянной скоростью возможно.

Решение представлено на рис. 11. Для данного случая $V_0 = 104,65$ и значение функционала $R = 0,44463$. Таким образом, в случае $\sin \nu = 0$ и $r_A \neq r_B$, всегда можно подобрать сдвиг, равный $2k\pi$, так, что значение $|\varphi_B - \varphi_A|$ будет удовлетворять лемме 7.

5.4. Частный случай $\cos \nu = 0$

Рассмотрим второй частный случай, когда $\cos \nu = 0$. Тогда $\sin \nu = \pm 1$ и система уравнений (5.1) принимает вид

$$(5.29) \quad \begin{cases} \dot{\varphi} = \mp \sigma \cdot C, \\ \dot{r}^2 + (\dot{\varphi} \cdot r)^2 = V_0^2. \end{cases}$$

Лемма 8. Решение системы (5.29) имеет вид

$$(5.30) \quad \varphi(t) - \varphi_A = \mp \sigma \cdot C \cdot t,$$

$$(5.31) \quad r(t) = \frac{V_0}{C} \sin \left(\arcsin \left(\frac{C \cdot r_A}{V_0} \right) \pm C \cdot t \right).$$

Доказательство.

Интегрируя первое уравнение системы (5.29), получим (5.30). Разрешаем второе уравнение из (5.29) относительно \dot{r}

$$(5.32) \quad \dot{r} = \pm V_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right)^2}.$$

Замена $u = \frac{C \cdot r(t)}{V_0}$ приводит уравнение (5.32) к виду $\frac{\dot{u}}{C} = \pm \sqrt{1 - u^2}$, интегрируя которое получаем, что $\arcsin u = \pm C \cdot t + C_3$, где C_3 — константа интегрирования. Обратная замена дает $\arcsin \left(\frac{C \cdot r(t)}{V_0}\right) = \pm C \cdot t + C_3$. Значение C_3 находится из начальных условий и равно:

$$C_3 = \arcsin \left(\frac{C \cdot r_A}{V_0}\right).$$

Откуда следует (5.31). Лемма 8 доказана.

Подстановка краевых условий в (5.31) дает уравнение для нахождения скорости

$$(5.33) \quad \left| \arcsin \left(\frac{C \cdot r_B}{V_0}\right) - \arcsin \left(\frac{C \cdot r_A}{V_0}\right) \right| = C \cdot T.$$

В переменных z из (5.17) и \hat{z} из (5.20) уравнение (5.33) примет вид

$$(5.34) \quad z - \hat{z} = C \cdot T.$$

Лемма 9. Уравнение (5.34) имеет решение и оно единственно, если для краевых условий выполнено неравенство

$$(5.35) \quad |\varphi_B - \varphi_A| \leq \pi/2 - \arcsin k_r.$$

Доказательство.

Поскольку $\cos \nu = 0$, то $F(z) = z - \hat{z}$, которая по лемме 5 является монотонной функцией. Минимальное значение левой части уравнения (5.34) равно нулю, а максимальное — $(\pi/2 - \arcsin k_r)$. Поэтому уравнение (5.34) имеет решение при значении $C \cdot T$, которое в свою очередь находится из (5.30) и равняется $|\varphi_B - \varphi_A|$. Тогда для существования решения должно быть выполнено условие (5.35), которое является единственным из монотонности $F(z)$. Лемма 9 доказана.

Следствие 2. Если условие (5.35) выполнено, то значение скорости равно

$$(5.36) \quad V_0 = \frac{1}{T} \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\sin(\varphi_B - \varphi_A)} \cdot \sqrt{r_A^2 - 2 \cdot r_A \cdot r_B \cdot \cos |\varphi_B - \varphi_A| + r_B^2}.$$

Доказательство.

Цепочка преобразований приводит к определению V_0 и нахождению такой траектории:

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\max}}{V_0}\right) &= \arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right) + C \cdot T, \\ \sin\left(\arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\max}}{V_0}\right)\right) &= \sin\left(\arcsin\left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right) + C \cdot T\right), \\ \frac{C \cdot r_{\max}}{V_0} &= \frac{C \cdot r_{\min}}{V_0} \cdot \cos(C \cdot T) + \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right)^2} \cdot \sin(C \cdot T), \\ \frac{C \cdot r_{\max}}{V_0} - \frac{C \cdot r_{\min}}{V_0} \cdot \cos(C \cdot T) &= \sqrt{1 - \left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right)^2} \cdot \sin(C \cdot T), \\ \frac{C^2 \cdot (r_{\max}^2 - 2 \cdot r_{\min} \cdot r_{\max} \cdot \cos(C \cdot T) + r_{\min}^2 \cdot \cos^2(C \cdot T))}{V_0^2} &= \\ &= \sin^2(C \cdot T) - \left(\frac{C \cdot r_{\min}}{V_0}\right)^2 \cdot \sin^2(C \cdot T). \end{aligned}$$

Из последних выражений получаем, что

$$V_0 = \frac{C}{\sin(C \cdot T)} \cdot \sqrt{r_{\max}^2 - 2 \cdot \cos(C \cdot T) \cdot r_{\max} \cdot r_{\min} + r_{\min}^2}$$

или можно представить в виде (5.36). Если $C = 0$, то движение происходит по радиус-вектору и

$$V_0 = \frac{1}{T} \cdot |r_B - r_A|.$$

В качестве примера рассмотрим переход, изображенный на рис. 6. Получаем, что $\pi/2 - \arcsin k_r = \pi/2 - \arcsin 0,2635 = 1,304 < \varphi_B - \varphi_A = 1,8925$, поэтому решения в этом случае нет.

5.5. Область существования решения

Выше было рассмотрено решение задачи о нахождении возможности построения траектории движения на постоянной скорости и о нахождении такого значения скорости. Теперь исследуем множество точек на плоскости, для которого существует решение этой задачи. Сделаем несколько уточняющих замечаний.

Замечание 3. Для удобства описания будем рассматривать область существования решения в системе координат с начальным положением объекта на оси X . Тогда $\varphi_A = 0$.

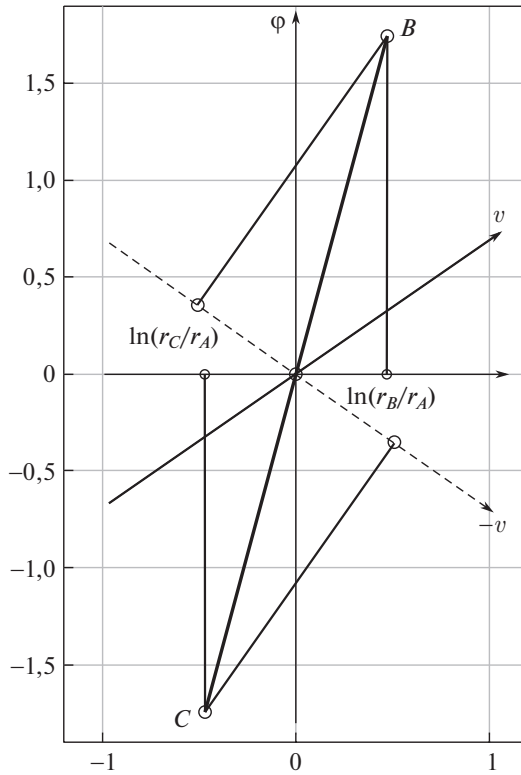


Рис. 12. Симметрия решения в плоскости (ρ, φ) .

Замечание 4. Индикатриса $G(\beta, \nu)$ симметрична, поскольку $G(\beta, \nu \pm \pi) = G(\nu, \beta)$. Следовательно, любой параметр ν можно заменить его значением $\nu \in [0, \pi]$.

Замечание 5. Кроме того, когда $\nu_1 = \pi - \nu$, задача перехода из начальной точки в конечную точку с краевыми условиями $\rho(T) = \rho_B$, $\varphi(T) = \varphi_B$ с углом ν_1 совпадает с задачей перехода в точку с краевыми условиями $\rho(T) = \rho_B$, $\varphi(T) = -\varphi_B$ с углом ν . Значит, для всех значений ν можно использовать только значения $\nu \in [0, \pi/2]$. Тогда при $\nu \in [0, \pi/2]$ функция $F(z)$ всегда будет возрастающей, поскольку $\sin \nu > 0$.

Кроме того имеется еще одна симметрия.

Замечание 6. Для построения области существования решения достаточно построить ее внутри круга $r \leq r_A$.

Проиллюстрируем замечание 6 примером.

Пусть точка A имеет координаты $r_A = 50$, $\varphi_A = 0^\circ$, $r_B = 80$, $\varphi_B = 100^\circ$, а $\nu = 35^\circ$. Рассмотрим на одном графике еще один переход из точки A в точку C с координатами $r_C = 31,25$, $\varphi_C = -100^\circ$. Точки B и C приведены на рис. 12 в системе координат $(\rho(t) - \rho_A, \varphi(t) - \varphi_A)$. Из рисунка видно, что точки B и C расположены симметрично, проекции на ось $(\cos \nu, -\sin \nu)$ имеют

одинаковые абсолютные значения, но разные знаки, т.е. правая часть (5.18) имеет разные знаки для переходов в эти точки. Поскольку $r_C < r_A$, а $r_B > r_A$, то значения k_r для этих точек одинаковы, $k_r = \frac{r_A}{r_B} = \frac{r_C}{r_A}$, а значит, одинаковы и решения. Таким образом, информация обо всей области существования решения содержится внутри круга радиуса r_A .

Существование решения опирается на определение разрешимости уравнения (5.18), где главную роль играют значения $F(-\pi/2)$ и $F(\pi/2)$. Справедлива лемма 10.

Лемма 10. В круге $r < r_A$ множество точек (r_B, φ_B) или (k_r, φ_B) , где $k_r = r_B/r_A$, в которых существует решение задачи 2 определяется двумя системами неравенств:

$$(5.37) \quad \begin{cases} \ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu - \pi \leq \varphi_B, \\ \frac{\pi}{2} - \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{\cos \nu}{\sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) \geq -\ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu + \varphi_B; \end{cases}$$

$$(5.38) \quad \begin{cases} \varphi_B \leq \ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu + \pi, \\ k_r > \sin \nu, \\ -\frac{\pi}{2} + \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{-\cos \nu}{\sin(\nu - \arcsin k_r)} \right) \leq -\ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu + \varphi_B. \end{cases}$$

Доказательство.

Как упоминалось ранее, задачу о поиске границы области существования можно свести к задаче, для которой $\nu > 0$ и $\nu < 90^\circ$ ($\sin \nu > 0$) и $r_B < r_A$. На основании лемм 3, 4 и выбранного интервала значений ν перепишем условия нахождения решения:

$$(5.39) \quad F(\pi/2) \geq -\sigma \cdot C \cdot T,$$

$$(5.40) \quad F(-\pi/2) \leq -\sigma \cdot C \cdot T, \text{ если } k_r > \sin \nu.$$

Для выбранного диапазона значений из уравнения (3.5), считая $\varphi_A = 0$, получим, что

$$\sigma \cdot C \cdot T = \ln k_r \cdot \cos \nu - \varphi_B \cdot \sin \nu.$$

Этот диапазон углов находится в рабочей области, что дает первые неравенства из (5.37), (5.38). Разделив уравнения (5.39), (5.40) на $\sin \nu$, получим второе неравенство (5.37) и третье неравенство (5.38), каждое из которых связано со своей областью значений, задаваемой первыми неравенствами в этих системах. Лемма 10 доказана.

Полярный угол φ_0 , при котором значение $C \cdot T = 0$, определяется как

$$(5.41) \quad \varphi_0 = \ln k_r \cdot \operatorname{ctg} \nu.$$

Значения границ области должны попадать в рабочий диапазон $(\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi)$, как показано на рис. 13. Эти уравнения определяют для заданных

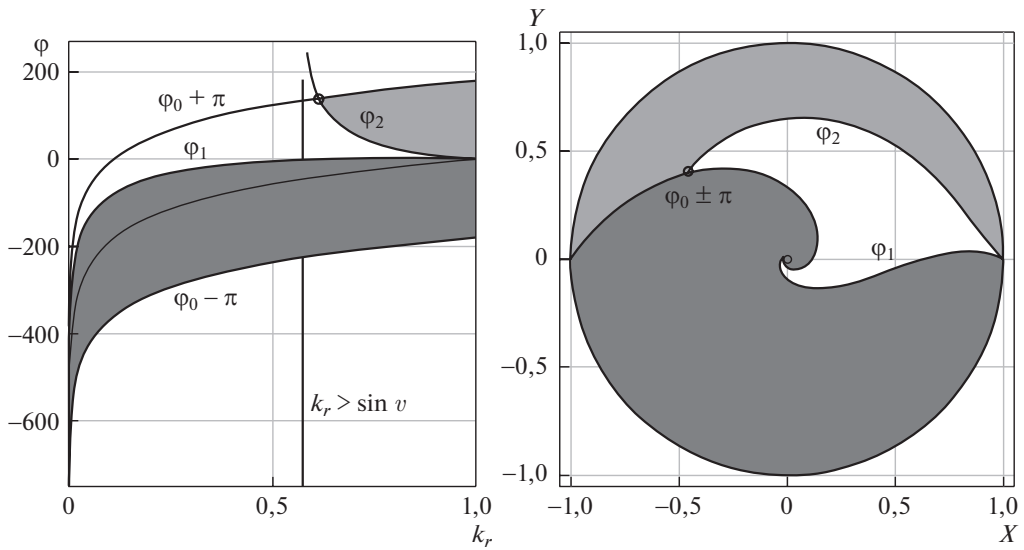


Рис. 13. Границы области существования решения в нормированных на начальную дистанцию полярных (слева) и декартовых (справа) координатах.

значений ν и k_r границы области существования решения:

$$\varphi_1 = \pi/2 - \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{\cos \nu}{\sin(\nu + \arcsin k_r)} \right) + \varphi_0(k_r, \nu),$$

$$\varphi_2 = -\pi/2 + \arcsin k_r + \operatorname{ctg} \nu \cdot \ln \left(\frac{-\cos \nu}{\sin(\nu - \arcsin k_r)} \right) + \varphi_0(k_r, \nu).$$

Эти кривые попарно пересекаются с кривыми $\varphi_0 \pm \pi = 0$. Одна точка пересечения φ_{g1} определяется совместным решением уравнения $\varphi_1 = \varphi_0 - \pi$, другая точка φ_{g2} находится из совместного решения $\varphi_2 = \varphi_0 + \pi$.

Пример расчета области существования решения для максимальной дистанции от сенсора, равного 300 единиц, рассматривается на рис. 14,а. Напомним, что сенсор расположен в точке с координатами $(0, 0)$, начальная точка $A = (50, 0)$. Серым цветом обозначена область существования решения, а черные линии соответствуют частным случаям $r_A = r_B$ и $C = 0$.

На рис. 14,б приведена область существования решения для внутренней части области $r_B < r_A$ при условии, что координаты нормированы. Дистанция определяется в относительных единицах $k_r = r_B/r_A$. Начальная точка A имеет координаты $(1, 0)$. Форма области на рис. 14,б естественно совпадает с формой области внутри круга радиуса r_A для рис. 14,а. Поясним на примере, как по области рис. 14,б определяется существование точки для дистанции большей r_A . Например, возьмем точку D_1 , расположенную на дистанции 210 и углом направления (-60°) (точка D_1 указана на рис. 14,а). Для нее отношение $k_r = 50/210 = 0,2381$. Данные о возможности решения для этой точки можно получить, отложив дистанцию,

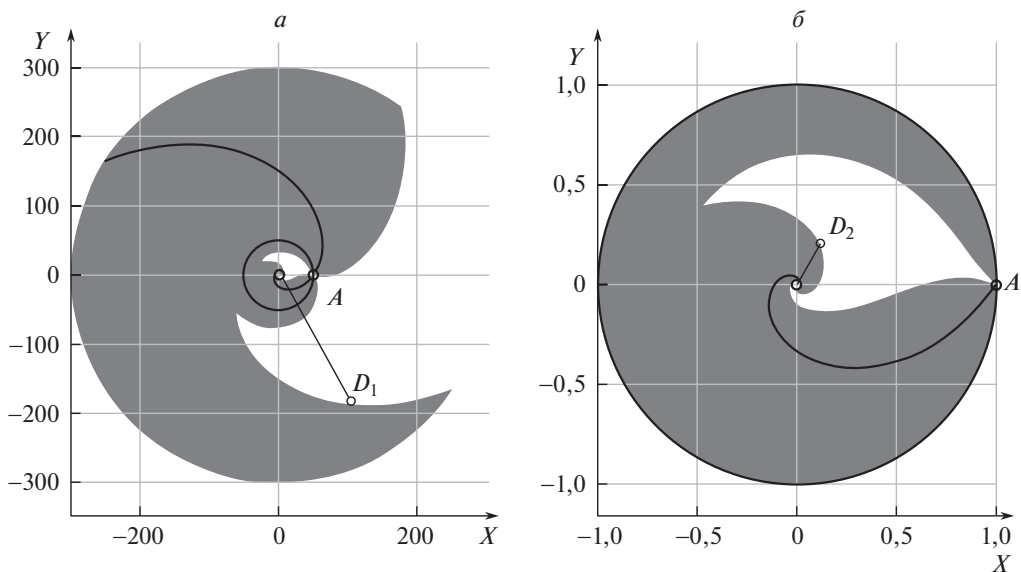


Рис. 14. Область существования решения для $\nu = 35^\circ$: $a - r_B \in [0; 300]$; $b - r_B < r_A$.

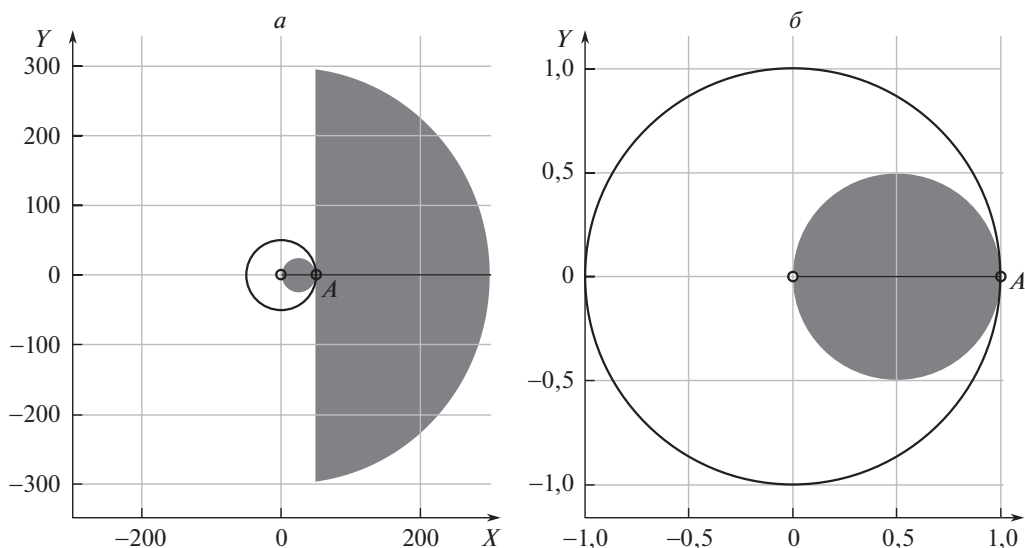


Рис. 15. Область существования решения для $\nu = 90^\circ$: $a - r_B \in [0; 300]$; $b - r_B < r_A$.

равную k_r , под углом 60° (точка D_2 указана на рис. 14,б). И, наконец, рассмотрим частный случай $\cos \nu = 0$. Поскольку условием достижимости является выполнение уравнения (5.35), то граница области легко вычисляется. Для случая $r_B \geq r_A$ значение $k_r = r_A/r_B$, граничная координата $x = r_B \cdot \cos(\pi/2 - \arcsin k_r) = r_B \cdot k_r = r_A$. Вся полуплоскость отображается в область круга с центром и радиусом $r_A/2$. Эта область представлена на рис. 15.

6. Заключение

Две рассмотренные в статье задачи планирования траекторий автономных и пилотируемых УПО указали на общие черты, характерные этому классу задач. Оказывается, что оптимизационные критерии, естественным образом введенные в формализации задач планирования траектории, позволяют получать решение не для всех краевых условий. Для задачи движения по заданной траектории были предложены условия существования оптимального скоростного режима и разработан алгоритм его нахождения. Для задачи нахождения оптимальной траектории движения с постоянной скоростью были найдены области существования решения со значением функционала риска, равным минимальному значению на траектории, соответствующей логарифмической спирали с оптимальным законом изменения скорости на ней, а также предложен метод построения этой области и найден аналитический вид оптимальной траектории.

Дальнейшая работа может быть направлена на решение задачи планирования траектории для случая нескольких скоростных режимов УПО с индикатрисой излучения, при которой вырождаются необходимые условия оптимальности функционала риска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miller A.B., Miller B.M.* On AUV Navigation Based on Acoustic Sensing of the Seabed Profile // *J. Communications Technology and Electronics*. 2018. V. 63. No. 12. P. 1502–1505. <https://doi.org/10.1134/S106422691812015X>.
 2. *Попов А.К., Миллер А.Б., Степанян К.В., Миллер Б.М.* Моделирование процесса навигации беспилотного летательного аппарата с использованием двух бортовых камер, смещенных по высоте // *Сенсорные системы*. 2018. № 1. С. 19–25. <https://doi.org/10.7868/S0235009218010043>.
 3. *Zhi-Wen W., Kun L.M., Li-jing W.* Path Planning for UUV in Dynamic Environment // 9th Int. Sympos. on Computational Intelligence and Design (ISCID). 2016. V. 1. P. 211–215. <https://doi.org/10.1109/ISCID.2016.1055>.
 4. *Shaikin M.E.* On statistical risk functional in a control problem for an object moving in a conflict environment // *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2011. V. 50. No. 1. P. 20–29. <https://doi.org/10.1134/S1064230711010175>.
 5. *Добровидов А.В., Кулида Е.Л., Рудько И.М.* Оптимизация траектории движения объекта по вероятностному критерию в режиме пассивной гидролокации в анизотропной среде // *Пробл. управл.* 2014. № 4. С. 31–37.
 6. *Sysoev L.P.* Detection probability criterion on the path for mobile object control problem in conflict environment // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 8. P. 1766–1775. <https://doi.org/10.1134/S0005117911080157>.
- Сысоев Л.П.* Критерий вероятности обнаружения на траектории в задаче управления движением объекта в конфликтной среде // *Пробл. управл.* 2010. № 6. С. 64–70.
7. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P.* 2D Optimal Trajectory Planning Problem in Threat Environment for UUV with Non-Uniform Radiation Pattern // *Sensors*. 2021. V. 21. No. 2. P. 396. <https://doi.org/10.3390/s21020396>.

8. *Barrios S., Lopez-Franco M., Rios J.D., Arana-Daniel N., Lopez-Franco C., Alanis A.Y.* An Autonomous Path Controller in a System on Chip for Shrimp Robot // *Electronics*. 2020. V. 9. No. 3. P. 441. <https://doi.org/10.3390/electronics9030441>.
9. *Cui J., Wei R., Liu Z., Zhou K.* UAV Motion Strategies in Uncertain Dynamic Environments: A Path Planning Method Based on Q-Learning Strategy // *Applied Sciences*. 2018. V. 8. No. 11. P. 2169. <https://doi.org/10.3390/app8112169>.
10. *Инзарцев А.В., Киселев Л.В., Костенко В.В., Матвиенко Ю.В., Павин А.М., Щербатюк А.Ф.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. М.: Институт проблем морских технологий Дальневосточного отделения РАН.
11. *Киселев Л.В., Инзарцев А.В., Костенко В.В., Павин А.М.* Модели, системы и технологии подводных роботов и их применение для решения поисково-обследовательских задач 2020. М.: ВСПУ, 2019. <https://doi.org/10.25728/VSPU.2019.3271>.
12. *Галляев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2009. № 4. С. 130–136.
13. *Галляев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация закона уклонения подвижного объекта от обнаружения при наличии ограничений // *АиТ*. 2012. № 6. С. 83–94.
Galyaev A.A., Maslov E.P. Optimization of the law of moving object evasion from detection under constraints // *Autom. Remote Control*. 2012 V. 73. No. 6. P. 992–1004. <https://doi.org/10.1134/s0005117912060057>
14. *Kabamba P.T., Meerkov S.M., Zeitz F.H.* Optimal Path Planning for Unmanned Combat Aerial Vehicles to Defeat Radar Tracking // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2006. V. 29. No. 2. P. 279–288. <https://doi.org/10.2514/1.14303>.
15. *Galyaev A.A., Lysenko P.V., Yakhno V.P.* Algorithm for Optimal Two-Link Trajectory Planning in Evasion from Detection Problem of Mobile Vehicle with Non-Uniform Radiation Pattern // *Advances in Syst. Appl.* 2021. V. 2. P. 7182. <https://doi.org/10.25728/ASSA.2021.21.2.1061>.
16. *Pachter L., Pachter M.* Optimal paths for avoiding a radiating source // *Proc. 40th IEEE Conf. on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*. Orlando, FL, USA: IEEE, 2001. P. 3581–3586. <https://doi.org/10.1109/CDC.2001.980415>.
17. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // *Cooperative Control and Optimization*. V. 66 Boston, MA: Springer US, 2002. P. 273–298. <https://doi.org/10.1007/0-306-47536-7-13>.
18. *Zabarankin M., Uryasev S., Murphey R.* Aircraft Routing Under the Risk of Detection // *Naval Research Logistics*. 2006. V. 53. No. 8. P. 728–747. <https://doi.org/10.1002/nav.20165>.
19. *Галляев А.А., Маслов Е.П., Яхно В.П., Абрамянц Т.Г.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения в конфликтной среде // *Управление большими системами*. Сб. тр. 2019. № 79. <https://doi.org/10.25728/UBS.2019.79.5>.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 07.02.2022

После доработки 17.03.2022

Принята к публикации 31.03.2022