Автоматика и телемеханика, № 7, 2022

Стохастические системы

© 2022 г. **А.А. НАЗАРОВ, д-р техн. наук (nazarov.tsu@gmail.com),**
Е.А. ПАВЛОВА (pavlovakatya_2010@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

ИССЛЕДОВАНИЕ СМО ВИДА $MMPP|M|N$ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ДИФФУЗИОННОГО АНАЛИЗА

Представлены результаты исследования N-линейной системы массового обслуживания с обратной связью. Входящий поток является марковским модулированным пуассоновским (MMPP). Методом асимптотически диффузионного анализа находится распределение вероятностей числа заявок на орбите и занятых приборов в системе. Приведены результаты имитационного моделирования, а также численное сравнение предложенного метода с методом асимптотического анализа.

Ключевые слова: многоканальная система массового обслуживания, орбита, мгновенная обратная связь, отсроченная обратная связь, метод асимптотически диффузионного анализа.

DOI: 10.31857/S0005231022070029, **EDN:** ADTPEA

1. Введение

Когда говорят о системах массового обслуживания, под обратной связью понимают повторное обращение заявки к обслуживающему прибору. В некотором смысле качество предоставленного обслуживания определяется интенсивностью повторного обращения заявок в систему. Считается, что клиент возвращается на повторное обслуживание в случае удовлетворительного качества первичного обслуживания, но не исключаются и ситуации, когда он возвращается в связи с неудовлетворительным обслуживанием, в частности в телекоммуникационных системах при искажении передаваемых сообщений.

В системах массового обслуживания различают два вида обратной связи, их называют мгновенная и отсроченная обратная связь. После завершения обслуживания заявка может покинуть систему или мгновенно обратиться за повторным обслуживанием (мгновенная обратная связь). Отсроченная обратная связь осуществляется посредством задержки заявки на орбите, где она ожидает повторного обслуживания в течение случайного времени.

Первые публикации, посвященные результатам исследований систем с обратной связью, принадлежат Такачу [1, 2] и Коэну [3]. В этих публикациях представлены результаты исследования одноканальных систем с неограниченными очередью и орбитой методом производящих функций. Численные алгоритмы точных и приближенных расчетов характеристик СМО с обратной связью были предложены для довольно общих математических моделей [4].

После исследований описанных систем Такача долгое время ученых не привлекала данная область, поэтому новые публикации появились не скоро. Последние три десятилетия модели с обратной связью активно исследуются учеными. Таким образом, в [1, 5–12] представлены результаты исследований СМО с мгновенной обратной связью, а в [2, 13–23] изучены СМО с отстроченной или отложенной обратной связью. Также ряд публикаций [24–27] посвящен исследованию систем с обоими типами обратной связи (в [24] есть обзор публикаций до 2015 г.).

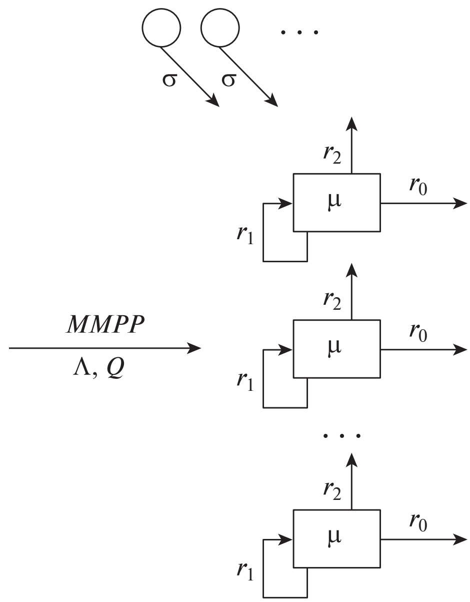
Ключевой задачей исследования систем массового обслуживания с обратной связью является получение распределения вероятностей для многомерных цепей Маркова, представляющих математические модели этих систем. Для изучения моделей умеренной размерности с этой задачей помогают программные средства, основанные на решении балансовых уравнений [28, 29]. Также, применяя различные подходы в решении основной задачи, ученые применяют матрично-геометрический метод [30] и спектральный метод [31], а также различные их модификации. Следует отметить, что в использовании выше указанных методов встречаются и достаточно серьезные вычислительные проблемы, что значительно повышает сложность решения. В [32] представлены исследования авторами марковской системы массового обслуживания с обратной связью методом асимптотического анализа, а также результаты численных экспериментов.

Таким образом, в настоящей статье при изучении СМО с обратной связью мгновенной и отложенной использован метод асимптотически диффузионного анализа.

2. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с N обслуживающими устройствами и обратной связью (см. рисунок). На вход системы поступает MMPP-поток заявок, заданный диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_k]$, $k = 1, 2, \ldots, K$, матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, K$, управляющей потоком цепи Маркова $k(t) = 1, 2, \ldots, K$.

Заявка, поступая в систему, занимает один из свободных приборов и обслуживается в течение случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром μ. Если при поступлении в систему заявка обнаружит все приборы занятыми, она мгновенно отправляется на орбиту, где осуществляет задержку в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром σ.



Система вида $MMPP|M|N$ с обратной связью.

В момент завершения обслуживания заявка может покинуть систему с вероятностью r_0; осуществляя мгновенную обратную связь, отправиться на повторное обслуживание с вероятностью r_1; осуществляя отсроченную обратную связь, отправиться на орбиту с вероятностью r_2, где она осуществляет случайную задержку в течение времени, экспоненциально распределенного с параметром σ, после чего повторно обращается к приборам. Если в момент поступления заявки с орбиты один из приборов оказывается свободным, то она занимает его в течение случайного времени, которое имеет экспоненциальное распределение с тем же параметром μ. Другими словами, завки, поступающие в систему извне, и заявки, которые поступают с орбиты, являются идентичными по времени их обслуживания, т.е. первичные и повторные заявки на приборах не различаются. Если в момент поступления повторной заявки с орбиты все приборы заняты, то она остается на орбите для повторения своего запроса. Предполагается, что возможны многократные повторения запросов для обслуживания, т.е. нет ограничений на число повторных обращений.

Обозначим $k(t) = k$ — состояние цепи Маркова, управляющей $MMPP$-потоком в момент времени t, $k = 1, 2, \ldots, K$, $n(t)$ — число занятых приборов в системе в момент времени t, $n = 0, 1, \ldots, N$, $i(t)$ — число заявок на орбите в момент времени t.

Ставится задача получения двумерного стационарного распределения вероятностей

$$P(n, i) = P\{n(t) = n, i(t) = i\}.$$

3. Система уравнений Колмогорова

Рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{k(t), n(t), i(t)\}$, для его нестационарного распределения вероятностей

$$P\{k(t) = k, n(t) = n, i(t) = i\} = P(k, n, i, t)$$

запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(k,n,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + (1-r_1)n\mu + i\sigma)P(k,n,i,t) + \lambda_k P(k,n-1,i,t) +$$
$$+ (i+1)\sigma P(k,n-1,i+1,t) + (n+1)r_0\mu P(k,n+1,i,t) +$$
$$+(n+1)r_2\mu P(k,n+1,i-1,t) + \sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu,n,i,t), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$
$$\frac{\partial P(k,N,i,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + (1-r_1)N\mu)P(k,N,i,t) + \lambda_k P(k,N-1,i,t) +$$
$$+ \lambda_k P(k,N,i-1,t) + (i+1)\sigma P(k,N-1,i+1,t) + \sum_{\nu} q_{\nu k} P(\nu,N,i,t). \tag{1}$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k,n,u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P(k,n,i,t),$$

где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Тогда можем записать систему (1) для характеристических функций

$$\frac{\partial H(k,n,u,t)}{\partial t} = -(\lambda_k + n\mu(1-r_1))H(k,n,u,t) + \lambda_k H(k,n-1,u,t) +$$
$$+ j\sigma \frac{\partial H(k,n,u,t)}{\partial u} + (n+1)\mu(r_0 + r_2 e^{ju})H(k,n+1,u,t) -$$
$$- j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(k,n-1,u,t)}{\partial u} + \sum_{\nu} q_{\nu k} H(\nu,n,u,t), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$
$$\frac{\partial H(k,N,u,t)}{\partial t} = \left(\lambda_k(e^{ju}-1) - N\mu(1-r_1)\right) H(k,N,u,t) +$$
$$+ \lambda_k H(k,N-1,u,t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H(k,N-1,u,t)}{\partial u} + \sum_{\nu} q_{\nu k} H(\nu,N,u,t). \tag{2}$$

Обозначим вектор-строки

$$\mathbf{H}(n,u,t) = \{H(1,n,u,t), \ldots, H(K,n,u,t)\},$$
$$\frac{\partial \mathbf{H}(n,u,t)}{\partial u} = \left\{ \frac{\partial H(1,n,u,t)}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial H(K,N,u,t)}{\partial u} \right\}$$

и перепишем (2) в матричном виде с учетом введенных обозначений

$$\frac{\partial \mathbf{H}(n,u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(n,u,t)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - n\mu(1-r_1)\mathbf{I}) + \mathbf{H}(n-1,u,t)\mathbf{\Lambda} + \\ + j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}(n,u,t)}{\partial u} + (n+1)\mu(r_0 + r_2 e^{ju})\mathbf{H}(n+1,u,t) - \\ - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}(n-1,u,t)}{\partial u}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(N,u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(N,u,t)(\mathbf{Q} - (1-e^{ju})\mathbf{\Lambda} - N\mu(1-r_1)\mathbf{I}) + \mathbf{H}(n-1,u,t)\mathbf{\Lambda} - \\ - j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}(N-1,u,t)}{\partial u}, \tag{3}$$

здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $K \times K$.

Введем векторное обозначение

$$\mathbf{H}(u,t) = \{\mathbf{H}(0,u,t), \mathbf{H}(1,u,t), \ldots, \mathbf{H}(N,u,t)\}$$

и перепишем уравнения (3) в новой матричной форме. Домножая матричное уравнение (4) на единичный вектор-столбец $\mathbf{e}$, принимая во внимание $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e} = \mathbf{0}$ и $(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1})\mathbf{e} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — вектор из нулевых компонент, запишем скалярное уравнение (5). Получим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)\big(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}\big) + j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\big(\mathbf{I_0} - e^{-ju}\mathbf{I_1}\big), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e} = \left[\mathbf{H}(u,t)\mathbf{B}\mathbf{e} + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\mathbf{I_0}\mathbf{e}\right](e^{ju}-1), \tag{5}$$

здесь блочные матрицы размерности $K\cdot(N+1) \times K\cdot(N+1)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda} & 0 & \ldots & 0 \\ \mu r_0\mathbf{I} & \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-\mu\mathbf{I}(r_0+r_2) & \mathbf{\Lambda} & \ldots & 0 \\ 0 & 2\mu\mathbf{I}r_0 & \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-2\mu\mathbf{I}(r_0+r_2) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-N\mu\mathbf{I}(r_0+r_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \mu\mathbf{I}r_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\mathbf{I}r_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & N\mu\mathbf{I}r_2 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I_1} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Будем искать решение полученной системы уравнений (4)–(5) методом асимптотически диффузионного анализа в условии большой задержки заявки на орбите, т.е. $\sigma \to 0$.

4. Первый этап асимптотического анализа

Обозначим $\sigma = \varepsilon$ и выполним замены в (4)–(5)

$$u = \varepsilon w, \quad \tau = t\varepsilon, \quad \mathbf{H}(u,t) = \mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon). \tag{6}$$

С учетом замен (6) перепишем систему (4)–(5)

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = \mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)\big(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B}\big) + j\frac{\partial \mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\left(\mathbf{I_0} - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I_1}\right), \tag{7}$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\mathbf{e} = \left[\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)\mathbf{B}\mathbf{e} + je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial \mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{I_0}\mathbf{e}\right](e^{juw} - 1). \tag{8}$$

Для решения системы (7)–(8) в условии $\varepsilon \to 0$ докажем утверждение теоремы 1.

Теорема 1. В системе массового обслуживания с обратной связью в предельном условии $\sigma \to 0$ предельная характеристическая функция нормированного числа $i(t)$ заявок на орбите имеет вид

$$\lim_{\sigma \to 0} M\left\{e^{jw\sigma i(t)}\right\} = e^{jwx(\tau)}, \tag{9}$$

где функция $x(\tau)$ является решением дифференциального уравнения

$$x'(\tau) = a(x), \tag{10}$$

а функция $a(x)$ определяется равенством

$$a(x) = \mathbf{r}(\mathbf{B} - x\mathbf{I_0})\mathbf{e}, \tag{11}$$

здесь вектор-строка $\mathbf{r} = \{r(0), r(1), \ldots, r(N)\}$ является решением системы

$$\mathbf{r}\Big\{(\mathbf{A}+\mathbf{B}) - x(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1})\Big\} = 0,$$

$$\mathbf{r}\mathbf{e} = 1. \tag{12}$$

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2 и 3 приведены в Приложении.

Процесс $i(t)$, домноженный на величину σ, называем нормированным.

Обозначим через κ положительный корень уравнения $a(x) = 0$. Подставляя $x = \kappa$ в решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x)$ системы (12), получаем двумерное стационарное распределение вероятностей $\mathbf{r}$ того, что MMPP-поток находится в состоянии k и в системе занято n приборов.

От полученного распределения вероятностей

$$\mathbf{r} = \{r(1,0), \dots, r(K,0), \dots, r(1,N), \dots, r(K,N)\}$$

можем перейти к распределению вероятностей числа n занятых приборов, просуммировав компоненты вектора $\mathbf{r}$ по k, $r(n) = \sum_{k=1}^{K} r(k,n)$.

Далее будет показано, что функция $a(x)$ является коэффициентом переноса диффузионного процесса, который определяет число заявок на орбите.

5. Второй этап асимптотического анализа

Для рассмотрения центрированного процесса $i(t)$ в (4)–(5) выполним замену

$$\mathbf{H}(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}\mathbf{H}^{(2)}(u,t),$$

получим систему

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)\mathbf{H}^{(2)}(u,t) = \mathbf{H}^{(2)}(u,t)\left(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B}\right) +$$

$$+ j\sigma\left[\frac{j}{\sigma}x(\sigma t)\mathbf{H}^{(2)}(u,t) + \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial u}\right](\mathbf{I_0} - e^{-ju}\mathbf{I_1}),$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)\mathbf{H}^{(2)}(u,t)\right]\mathbf{e} =$$

$$= (e^{ju} - 1)\left\{\mathbf{H}^{(2)}(u,t)\mathbf{Be} + j\sigma e^{-ju}\left[\frac{j}{\sigma}x(\sigma t)\mathbf{H}^{(2)}(u,t) + \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial u}\right]\mathbf{I_0 e}\right\}.$$

Перепишем последнюю систему с учетом (11) и (12)

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jua(x)\mathbf{H}^{(2)}(u,t) = \mathbf{H}^{(2)}(u,t)\left(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B} - x(\mathbf{I_0} - e^{-ju}\mathbf{I_1})\right) +$$

$$+ j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial u}\left(\mathbf{I_0} - e^{-ju}\mathbf{I_1}\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial t}\mathbf{e} + jua(x)\mathbf{H}^{(2)}(u,t)\mathbf{e} =$$

$$= (e^{ju} - 1)\left(\mathbf{H}^{(2)}(u,t)\left[\mathbf{Be} - e^{-ju}x\mathbf{I_0}\right] + e^{-ju}j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u,t)}{\partial u}\mathbf{I_0}\right)\mathbf{e}. \tag{13}$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и выполним в (13) замены

$$u = \varepsilon w, \quad \tau = t\varepsilon^2, \quad \mathbf{H}^{(2)}(u,t) = \mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),$$

получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=$$
$$=\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\left(\mathbf{A}+e^{j\varepsilon w}\mathbf{B}-x(\mathbf{I_0}-e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I_1})\right)+$$
$$+j\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\left(\mathbf{I_0}-e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I_1}\right),$$
$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{e}+j\varepsilon wa\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\mathbf{e}=$$
$$=(e^{j\varepsilon w}-1)\left(\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)\left[\mathbf{Be}-e^{-j\varepsilon w}x\mathbf{I_0}\right]+e^{-j\varepsilon w}j\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}^{(1)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{I_0}\right)\mathbf{e}. \tag{14}$$

Продолжая исследование, докажем утверждение теоремы 2.

Теорема 2. *В системе массового обслуживания с обратной связью в предельном условии $\sigma\to 0$ асимптотическая характеристическая функция*

$$\Phi(w,\tau)=\lim_{\sigma\to 0}M\exp\left\{jw\sqrt{\sigma}\left(i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)-\frac{x(\tau)}{\sigma}\right)\right\}$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}a'(x)+\frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau), \tag{15}$$

здесь скалярная функция $b(x)$ определяется выражением

$$b(x)=a(x)+2\mathbf{g}[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}+2\mathbf{r}x\mathbf{I_0}\mathbf{e}, \tag{16}$$

где вектор $\mathbf{g}$ является решением системы уравнений

$$\mathbf{g}(\mathbf{A}+\mathbf{B}+x(\mathbf{I_1}-\mathbf{I_0}))=a\mathbf{r}+\mathbf{r}(x\mathbf{I_1}-\mathbf{B}),$$
$$\mathbf{ge}=0. \tag{17}$$

Процесс $i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)-\frac{x(\tau)}{\sigma}$ называем центрированным, его математическое ожидание равно нулю.

6. Асимптотически диффузионный анализ

Продолжая исследование, докажем теорему 3.

Теорема 3. *Предельная плотность распределения вероятностей нормированного числа заявок на орбите в рассматриваемой системе с обратной связью имеет вид*

$$\pi(z)=\frac{C}{b(z)}\exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z\frac{a(x)}{b(x)}dx\right\}, \tag{18}$$

здесь C — нормирующая константа, а функции $a(x)$ и $b(x)$ определяются выражениями (11) *и* (16) *соответственно.*

7. Дискретное распределение вероятностей

Рассмотрим выражение (18), подставляя в него набор аргументов $k\sigma$, где $k = 0, 1, 2\ldots$, получим набор чисел

$$\pi(k\sigma) = \frac{C}{b(k\sigma)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int\limits_0^{k\sigma} \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\},$$

применяя условие нормировки к которому, получим дискретное распределение вероятностей

$$P(k) = \frac{\pi(k\sigma)}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \pi(k\sigma)}. \tag{19}$$

Таким образом, получена аппроксимация $P(k)$ дискретного распределения числа заявок на орбите в рассматриваемой системе с обратной связью.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима в рассматриваемой системе является неравенство

$$\lambda < r_0 \mu N,$$

которое запишем в виде (20)

$$\lambda = \rho r_0 \mu N, \tag{20}$$

где $0 < \rho < 1$.

Для любой аппроксимации, включая (19), важно определить точность и область ее применения, т.е. диапазон всех значений параметра загрузки системы ρ, а также параметра σ, значения которого в теоретических вычислениях бесконечно малы ($\sigma \to 0$).

Точность аппроксимации будем определять расстоянием Колмогорова

$$\Delta = \max_{0 \leqslant i < \infty} \left| \sum_{n=0}^{i} \Big(P(n) - P_1(n) \Big) \right|, \tag{21}$$

где $P_1(n)$ — достаточно точное распределение, полученное в допредельной ситуации в результате имитационного моделирования.

В качестве примера рассмотрим систему $MMPP|M|N$ при $N = 5$, где матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{\Lambda_1} = \rho\mathbf{\Lambda}$, определяющие входящий MMPP-поток, заданы в виде

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & -0{,}8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1. Расстояние Колмогорова, метод асимптотически диффузионного анализа

	$\sigma = 0{,}5$	$\sigma = 0{,}2$	$\sigma = 0{,}1$	$\sigma = 0{,}05$
$\rho = 0{,}6$	0,049	0,023	$9{,}9 \times 10^{-3}$	0,011
$\rho = 0{,}7$	0,040	0,016	$9{,}9 \times 10^{-3}$	$5{,}2 \times 10^{-3}$
$\rho = 0{,}8$	0,026	0,010	$6{,}1 \times 10^{-3}$	$3{,}2 \times 10^{-3}$
$\rho = 0{,}9$	0,015	$7{,}1 \times 10^{-3}$	$3{,}3 \times 10^{-3}$	$2{,}4 \times 10^{-3}$

Таблица 2. Расстояние Колмогорова, метод асимптотического анализа

	$\sigma = 0{,}5$	$\sigma = 0{,}2$	$\sigma = 0{,}1$	$\sigma = 0{,}05$
$\rho = 0{,}6$	0,083	0,047	0,038	0,030
$\rho = 0{,}7$	0,098	0,069	0,049	0,038
$\rho = 0{,}8$	0,114	0,094	0,079	0,056
$\rho = 0{,}9$	0,179	0,123	0,100	0,074

Для $\mu = 1$, $r_0 = 0{,}5$, $r_1 = 0{,}2$, $r_2 = 0{,}3$, в табл. 1 представлены значения Δ из (21) и указанные значения параметров ρ и σ. В табл. 2 представлены значения, полученные в результате аналогичных [30] исследований системы $MMPP|M|N$ методом асимптотического анализа.

Предполагая, что приближение $P_1(n)$ приемлемо, если его точность составляет $\Delta < 0{,}05$, можно сделать вывод: предложенное диффузионное приближение $P_1(n)$ приемлемо для рассматриваемого примера при указанных в табл. 1 и 2 значениях параметров ρ и σ. Точность аппроксимации возрастает (Δ уменьшается) с уменьшением значения параметра σ. Это довольно естественно из-за ограничивающего условия $\sigma \to 0$. Сравнивая результаты работы метода асимптотически диффузионного анализа и метода асимптотического анализа, отметим, что по мере увеличения нагрузки при $\rho \geqslant 0{,}6$ точность приближения $P_1(n)$ также увеличивается для метода асимптотически диффузионного анализа, что делает метод предпочтительным. В то же время Δ достигает значений менее 0,01, что свидетельствует об очень высокой точности предлагаемого метода.

8. Заключение

В данной статье предложена математическая модель системы вида $MMPP|M|N$ с мгновенной и отложенной обратной связью. В предельном условии большой задержки ($\sigma \to 0$) заявок на орбите с возможностью осуществить отложенную обратную связь получено асимптотическое распределение вероятностей нормированного числа заявок на орбите методом асимптотически диффузионного анализа. Проведен численный эксперимент, в ходе которого были построены имитационные модели для частного случая рассматриваемой системы. Сравнительный анализ полученных результатов показал, что метод асимптотически диффузионного анализа позволяет повысить точность аппроксимации по сравнению с методом асимптотического анализа кратно или даже на порядок, что отражено в табл. 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим (7) в предельном условии $\varepsilon \to 0$, обозначим $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon) = \mathbf{F}(w,\tau)$, получим

$$\mathbf{F}(w,\tau)(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + j\frac{\partial \mathbf{F}(w,\tau)}{\partial w}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) = 0. \tag{П.1}$$

Будем искать решение $\mathbf{F}(w,\tau)$ системы (П.1) в виде $\mathbf{F}(w,\tau) = \mathbf{r}e^{jwx}$, тогда получим систему уравнений

$$\mathbf{r}\Big\{(\mathbf{A}+\mathbf{B}) - x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})\Big\} = 0,$$
$$\mathbf{re} = 1,$$

что совпадает с (12) формулировки теоремы 1.

Рассмотрим теперь (8) в предельном условии $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\partial \mathbf{F}(w,\tau)}{\partial \tau}\mathbf{e} = jw\left[\mathbf{F}(w,\tau)\mathbf{Be} + j\frac{\partial \mathbf{F}(w,\tau)}{\partial w}\mathbf{I_0 e}\right]$$

и подставим решение в виде $\mathbf{F}(w) = \mathbf{r}e^{jwx(\tau)}$, тогда

$$x'(\tau) = \mathbf{r}(\mathbf{B} - x(\tau)\mathbf{I_0})\mathbf{e} \equiv a(x),$$

что совпадает с (11).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Запишем первое уравнение системы (14) с точностью до $O(\varepsilon^2)$

$$j\varepsilon wa\mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = \mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)(\mathbf{A}+\mathbf{B}+j\varepsilon w\mathbf{B} - x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}+j\varepsilon w\mathbf{I_1})) +$$
$$+ j\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) + O(\varepsilon^2).$$

Решение будем искать в виде

$$\mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon) = \Phi(w)\{\mathbf{r} + j\varepsilon w\mathbf{f}\} + O(\varepsilon^2), \tag{П.2}$$

здесь $\Phi(w)$ — некоторая скалярная функция, которую определим далее.

Получаем

$$j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)\{\mathbf{r}+j\varepsilon w\mathbf{f}\} =$$
$$= \Phi(w,\tau)\{\mathbf{r}+j\varepsilon w\mathbf{f}\}(\mathbf{A}+\mathbf{B}+j\varepsilon w\mathbf{B} - x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}+j\varepsilon w\mathbf{I_1})) +$$
$$+ j\varepsilon\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w}\{\mathbf{r}+j\varepsilon w\mathbf{f}\} + \Phi(w,\tau)j\varepsilon\mathbf{f}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) + O(\varepsilon^2),$$

тогда, принимая во внимание (12), имеем

$$j\varepsilon wa\Phi(w,\tau)\mathbf{r} = \Phi(w,\tau)\{j\varepsilon w[\mathbf{f}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}))+\mathbf{r}(\mathbf{B}-x\mathbf{I_1})]\}+$$
$$+\,j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\mathbf{r}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})+O(\varepsilon^2).$$

Разделим последнее уравнение на $j\varepsilon w\Phi(w,\tau)$ и, устремляя $\varepsilon\to 0$, получим

$$\mathbf{f}(\mathbf{A}+\mathbf{B}+x(\mathbf{I_1}-\mathbf{I_0})) = a\mathbf{r}-\mathbf{r}(\mathbf{B}-x\mathbf{I_1})+\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}\mathbf{r}(\mathbf{I_1}-\mathbf{I_0}).$$

Решение $\mathbf{f}$ последней системы можем записать в виде

(П.3) $$\mathbf{f} = C\mathbf{r}+\mathbf{g}-\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}.$$

Подставив это разложение в (17), для векторов $\mathbf{g}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ получим системы

(П.4) $$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})) = \mathbf{r}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}),$$

(П.5) $$\mathbf{g}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})) = a\mathbf{r}+\mathbf{r}(x\mathbf{I_1}-\mathbf{B}).$$

Рассмотрим первое уравнение системы (12), продифференцируем его по x, получим уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\Big\{(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x(\mathbf{I_0}+\mathbf{I_1})\Big\}-\mathbf{r}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) = 0.$$

Принимая во внимание (П.4), запишем равенство

(П.6) $$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x},$$

где $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}=0$.

Векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{g}$ являются частными решениями неоднородных систем (П.4) и (П.5), поэтому они удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, которые выберем в виде $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}=0$ (следует из (П.6)) и аналогично $\mathbf{ge}=0$, тогда решения $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{g}$ систем (П.4) и (П.5), удовлетворяющие этим условиям, определяются однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение (14) и подставим в него разложение (П.2), принимая во внимание (12) и (П.1), можем записать

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\{2(\mathbf{f}[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]+\mathbf{r}x\mathbf{I_0}-a\mathbf{f})\mathbf{e}+a\}-$$
$$-\,w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\mathbf{r}\mathbf{I_0}\mathbf{e}.$$

Далее подставим в последнее уравнение выражение (П.3)

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial\tau}{\Phi(w,\tau)} = \frac{(jw)^2}{2}\{2\mathbf{g}[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}+2\mathbf{r}x\mathbf{I_0}\mathbf{e}+a\}+$$

$$+\,w\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{\Phi(w,\tau)}\{\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}-\mathbf{r}\mathbf{I_0}\mathbf{e}\}. \tag{П.7}$$

Обозначим

$$b(x) = a+2\mathbf{g}[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}+2\mathbf{r}x\mathbf{I_0}\mathbf{e}$$

и перепишем (П.7) с учетом этого обозначения

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}\{\varphi[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}-\mathbf{r}\mathbf{I_0}\mathbf{e}\}+\frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau). \tag{П.8}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\varphi[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}-\mathbf{r}\mathbf{I_0}\mathbf{e}, \tag{П.9}$$

применим к нему (П.6), имеем

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}-\mathbf{r}\mathbf{I_0}\mathbf{e}.$$

Рассмотрим также $a(x)$ из (11), продифференцируем эту функцию по x, получим

$$a'(x) = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}[\mathbf{B}-x\mathbf{I_0}]\mathbf{e}-\mathbf{r}\mathbf{I_0}\mathbf{e}.$$

Сравнивая полученное равенство с выражением (П.9), перепишем (П.8) в виде

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}a'(x)+\frac{(jw)^2}{2}b(x)\Phi(w,\tau),$$

что совпадает с (15).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим уравнение (15) из теоремы 2, выполним здесь обратное преобразование Фурье по переменной w для плотности распределения $P(y,\tau)$ нормированного и центрированного случайного процесса

$$y(\tau) = \lim_{\sigma\to 0}\sqrt{\sigma}\left\{i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)-\frac{x(\tau)}{\sigma}\right\},$$

получим

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{a'(x)yP(y,\tau)\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{b(x)P(y,\tau)\}$$

— уравнение Фоккера–Планка для плотности распределения $P(y,\tau)$ числа заявок на орбите. $y(\tau)$ — диффузионный процесс с коэффициентом переноса $a'(x)y$ и с коэффициентом диффузии $b(x)$, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dy(\tau) = a'(x)yd\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau).$$

Составим систему обыкновенного и стохастического дифференциальных уравнений, используя (10),

$$dx(\tau) = a(x)d\tau,$$

$$dy(\tau) = a'(x)yd\tau + \sqrt{b(x)}dw(\tau) \tag{П.10}$$

и введем случайный процесс $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau)$, где $\varepsilon = \sqrt{\sigma}$.

Запишем $dz(\tau) = dx(\tau) + \varepsilon dy(\tau)$, куда подставим правые части из системы дифференциальных уравнений (П.10), выполнив несложные преобразования, имеем

$$dz(\tau) = (a(x) + \varepsilon ya'(x))d\tau + \varepsilon\sqrt{b(x)}dw(\tau).$$

Запишем коэффициенты в виде

$$a(x) + \varepsilon ya'(x) = a(x+\varepsilon y) + O(\varepsilon^2) = a(z) + O(\varepsilon^2),$$

$$\varepsilon\sqrt{b(x)} = \sqrt{\varepsilon^2 b(x+\varepsilon y) + O(\varepsilon^3)} = \varepsilon\sqrt{b(z) + O(\varepsilon)} = \sqrt{\sigma b(z)} + O(\varepsilon^2).$$

Теперь с точностью до $O(\varepsilon^2)$ можем записать стохастическое дифференциальное уравнение для случайного процесса $z(\tau)$

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \sqrt{\sigma b(z)}dw(\tau).$$

Поскольку $z(\tau)$ является решением этого стохастического дифференциального уравнения, $z(\tau)$ — диффузионный процесс с коэффициентом переноса $a(z)$ и коэффициентом диффузии $\sigma b(z)$. Запишем уравнение Фоккера–Планка для стационарной плотности $\pi(z)$ этого диффузионного процесса

$$-\frac{\partial}{\partial z}\{a(z)\pi(z)\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z)\} = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение второго порядка, получим

$$-a(z)\pi(z) + \frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial z}\{b(z)\pi(z)\} = 0.$$

Принимая во внимание условие нормировки, а также, что $\pi(\infty) = 0$, получим стационарную плотность распределения вероятностей числа заявок на орбите

$$\pi(z) = \frac{C}{b(z)}\exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z \frac{a(x)}{b(x)}dx\right\},$$

что совпадает с (18).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takacs L.* A Single-Server Queue with Feedback // Bell Syst. Technical J. 1963. V. 42. P. 505–519.
2. *Takacs L.* A Queuing Model with Feedback // Oper. Res. 1977. V. 11. P. 345–354.
3. *Cohen J.W.* Basic Problems of Telephone Traffic Theory and the Influence of Repeated Calls // Phillips Telecomm. Rev. 1957. V. 18. No. 2. P. 49–100.
4. *Степанов С.Н.* Численные методы расчета систем с повторными вызовами // М.: Наука, 1983.
5. *Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С.* Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13. Вып. 5. С. 88–92.
6. *Моисеева С.П., Захорольная И.А.* Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. 2011. Т. 47. Вып. 6. С. 51–58.
7. *Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U.* The Queuing Model MAP/PH/1/N with Feedback Operating in a Markovian Random Environment // Austrian J. Statistics. 2005. V. 34. Iss. 2. P. 101–110.
8. *Wortman M.A., Disney R.L., Kiessler P.C.* The M/GI/1 Bernoulli Feedback Queue with Vacations // Queueing Syst. 1991. V. 9. Iss. 4. P. 353–363.
9. *D'Avignon G.R., Disney R.L.* Queues with Instantaneous Feedback // Management Sci. 1997. V. 24. Iss. 2. P. 168–180.
10. *Berg J.L., Boxma O.J.* The M/G/1 Queue with Processor Sharing and Its Relation to Feedback Queue // Queueing Syst. 1991. V. 9. Iss. 4. P. 365–402.
11. *Hunter J.J.* Sojourn Time Problems in Feedback Queue // Queueing Syst. 1989. V. 5. Iss. 1–3. P. 55–76.
12. *Melikov A.Z., Zadiranova A., Moiseev A.* Two Asymptotic Conditions in Queue with MMPP Arrivals and Feedback // Communications in Comput. and Inform. Sci. 2016. V. 678. P. 231–240.
13. *Pekoz E.A., Joglekar N.* Poisson Traffic Flow in a General Feedback // J. Appl. Probability. 2002. V. 39. Iss. 3. P. 630–636.
14. *Lee H.W., Seo D.W.* Design of a Production System with Feedback Buffer // Queueing Syst. 1997. V. 26. Iss. 1. P. 187–198.
15. *Lee H.W., Ahn B.Y.* Analysis of a Production System with Feedback Buffer and General Dispatching Time // Math. Problems in Engineering. 2000. V. 5. P. 421–439.
16. *Foley R.D., Disney R.L.* Queues with Delayed Feedback // Advances in Appl. Probability. 1983. V. 15. Iss. 1. P. 162–182.
17. *Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G.* M/M/1 Retrial Queuing System with Loss and Feedback under Non-Pre-Emptive Priority Service by Matrix Geometric Method // Appl. Math. Sci. 2010. V. 4. P. 2379–2389.
18. *Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G.* M/M/1 Retrial Queuing System with Loss and Feedback under Pre-Emptive Priority Service // Int. J. Comput. Appl. 2010. V. 2. P. 27–34.
19. *Bouchentouf A.A., Belarbi F.* Performance Evaluation of Two Markovian Retrial Queuing Model with Balking and Feedback // Acta Univ. Sapientiae. Mathematica. 2013. V. 5. P. 132–146.

20. *Choi B.D., Kim Y.C., Lee Y.W.* The M/M/c Retrial Queue with Geometric Loss and Feedback // Comput. and Math. with Appl. 1998. V. 36. P. 41–52.

21. *Krishna Kumar B., Rukmani R., Thangaraj V.* On Multiserver Feedback Retrial Queue with Finite Buffer // Appl. Math. Modeling. 2009. V. 33. P. 2062–2083.

22. *Do T.V.* An Efficient Computation Algorithm for a Multiserver Feedback Retrial Queue with a Large Queuing Capacity // Appl. Math. Modeling. 2010. V. 34. P. 2272–2278.

23. *Mokaddis G.S., Metwally S.A., Zaki B.M.* A Feedback Retrial Queuing System with Starting Failures and Single Vacation // Tamkang J. Sci. and Engineering. 2007. V. 10. P. 183–192.

24. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Methods for Analysis of Queuing Models with Instantaneous and Delayed Feedbacks // Communications in Comput. and Inform. Sci. 2015. V. 564. P. 185–199.

25. *Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Methods for Analysis of Multi-Channel Queuing Models with Instantaneous and Delayed Feedbacks // Cybern. Syst. Anal. 2016. V. 52. Iss. 1. P. 58–70.

26. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Hierarchical Space Merging Algorithm to Analysis of Open Tandem Queuing Networks // Cybern. Syst. Anal. 2016. V. 52. Iss. 6. P. 867–877.

27. *Melikov A.Z., Aliyeva S.H.* Refined Approximate Algorithm for Steady-State Probabilities of the Large Scale Queuing Systems with Instantaneous and Delayed Feedbacks // Communications in Comput. and Inform. Sci. 2019. V. 1109. P. 188–201.

28. *Штрик Я., Ефросинин Д.В.* Анализ надежности систем массового обслуживания с повторными заявками и конечным числом требований при помощи инструментальных программных систем // АиТ. 2010. № 7. С. 119–125.

    Sztrik J., Efrosinin D. Tool Supported Reliability Analysis of Finite-Source Retrial Queues // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 7. P. 1388–1393.

29. *Berczes T., Sztrik J., Toth A., Nazarov A.A.* Performance Modeling of Finite-Source Retrial Queueing Systems with Collisions and Non-Reliable Server Using MOSEL // Communications in Comput. and Inform. Sci. 2017. V. 700. P. 248–258.

30. *Neuts M.F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. Baltimore: John Hopkins University Press, 1981.

31. *Mitrani I., Chakka R.* Spectral Expansion Solution for a Class of Markov Models: Application and Comparison with the Matrix-Geometric Method // Performance Evaluation. 1995. V. 23. P. 241–260.

32. *Nazarov A., Melikov A., Pavlova E., et al.* Analyzing an M|M|N Queueing System with Feedback by the Method of Asymptotic Analysis // Cybern. Syst. Anal. 2021. V. 57. No. 1. P. 57–65. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00329-x

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 02.11.2021

После доработки 02.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022