

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. Л.Т. АЩЕПКОВ, д-р физ.-мат. наук (ashchepkov@yahoo.com)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА С АМПЛИТУДНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Рассматривается стационарная задача оптимального управления нового линейно-квадратичного типа на полуоси времени с амплитудным ограничением на управление. С помощью достаточных условий оптимальности находится оптимальное позиционное управление с разрывом на подпространстве фазового пространства. Исследуется движение доопределенной системы по подпространству в скользящем режиме. Показана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы. Приведены примеры.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача линейно-квадратичного типа, оптимальный синтез, скользящий режим, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231022070030, EDN: ADTRWW

1. Введение

Задача аналитического построения регулятора с момента появления первых публикаций [1, 2] стала предметом многочисленных исследований благодаря широкому применению в технических приложениях. Обзор опубликованных работ служит предметом отдельного серьезного исследования и не входит в цели настоящей статьи. Отметим лишь, что аналитическое и численное решение задачи при дополнительных ограничениях на управление значительно усложняется (см., например, [3–7]). Причины усложнения состоят в нелинейности и разрывности управлений типа обратной связи и трудности описания скользящих режимов на различных пересечениях поверхностей разрыва управлений.

Исследованию одной из таких задач посвящена настоящая статья. Рассматривается задача оптимального управления линейно-квадратичного типа на полуоси времени с ограниченной евклидовой нормой управления. Новым элементом в постановке задачи служит целевой функционал, который наряду с традиционным квадратичным отклонением траектории от начала координат учитывает ее отклонение от подпространства R разрыва оптимального управления. Это подпространство естественно появляется при аналитическом решении задачи с помощью достаточных условий оптимальности [8]. Анализ показывает, что подпространство R состоит из двух взаимно дополняющих

друг друга множеств. Первое из них прошивается траекториями замкнутой системы без односторонних касаний. Второе множество заполняется траекториями скольжения, ведущими в начало координат. В целом замкнутая система с дополнительными уравнениями скольжения экспоненциально устойчива.

В теории систем с переменной структурой разрывные позиционные управления специально вводятся в систему для создания устойчивых и мало чувствительных к возмущениям скольльзящих движений [9]. Вопросы оптимальности управлений при этом обычно не рассматриваются или отодвигаются на второй план. В данном случае новизна предлагаемого подхода состоит в том, что требования существования и устойчивости скольльзящих движений формулируются на уровне постановки задачи и непосредственно закладываются в ее условия. При минимизации функционала из множества возможных позиционных управлений выделяется единственное оптимальное управление с нужными свойствами. Тем самым исключается произвол в выборе управления.

Остановимся еще на одном моменте, связанном с постановкой задачи. Выбор в качестве области управления U шара не случаен и обусловлен тем, что оптимальное управление в этом случае определено и непрерывно на всем фазовом пространстве, исключая подпространство R . Это значительно упрощает описание и анализ скольльзящих движений. Технически шар U легко заменить эллипсоидом, чтобы учесть разномасштабные координаты управления. Вместе с тем обобщение результатов на области управления с негладкими границами, например многогранники, нетривиально из-за сложности описания скольльзящих режимов на различных пересечениях плоскостей разрыва управления.

2. Постановка задачи

Объектом нашего внимания будет задача оптимального управления

$$(1) \quad J = \int_0^{\infty} (x(t)'Cx(t) + 2 \|B'Lx(t)\|) dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(\infty) = 0, \quad \|u\| \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Здесь $A, C, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — постоянные матрицы с уточненными далее свойствами; $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — постоянная матрица ранга $m \leq n$; $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ — переменный и фиксированный фазовые векторы, $x_0 \neq 0$; $\dot{x} = dx/dt$; $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления со значениями в шаре U , заданном неравенством $\|u\| \leq 1$. Во всех операциях используются векторы-столбцы; штрих — знак транспонирования; $\|u\| = (u'u)^{1/2}$ — евклидова норма вектора u . Равенство $x(\infty) = 0$ понимается в предельном смысле: $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Примем дополнительные предположения: матрица L удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению Ляпунова

$$(2) \quad A'L + LA + C = 0;$$

все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части; матрица C симметричная и положительно определенная. Последние два условия необходимы и достаточны [10] для существования, единственности, симметричности и положительной определенности матрицы L .

Непрерывную кусочно-гладкую *траекторию* $x(t)$, $t \geq 0$, и кусочно-непрерывное *управление* $u(t)$, $t \geq 0$, назовем *процессом*, если пара $x(t)$, $u(t)$ отвечает условиям (1), исключая, возможно, первое требование, и соответствующее значение функционала J конечно. Задача состоит в отыскании среди всех процессов *оптимального процесса* с наименьшим значением целевого функционала.

Отметим, что квадратичная форма $x' L x$ является функцией Ляпунова экспоненциально устойчивой однородной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$.

3. Синтез оптимальной системы

Для решения задачи воспользуемся достаточными условиями оптимальности [8]. С использованием формулы Лейбница–Ньютона представим целевой функционал на произвольном фиксированном процессе $x(t)$, $u(t)$ в виде

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)' C x(t) + 2 \|B' L x(t)\|) dt + \int_0^{\infty} (x(t)' L x(t))' dt - x(t)' L x(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

Выполним во втором интеграле дифференцирование по t . Учитывая краевые условия (1), равенство (2) и соотношения

$$L' = L, \quad x' L A x = (x' L A x)' = x' A' L x, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

получим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x(t)' C x(t) + 2 \|B' L x(t)\|) dt + \int_0^{\infty} 2x(t)' L (A x(t) + B u(t)) dt + x_0' L x_0 = \\ &= x_0' L x_0 + \int_0^{\infty} x(t)' (A' L + L A + C) x(t) dt + 2 \int_0^{\infty} (\|B' L x(t)\| + x(t)' L B u(t)) dt = \\ &= x_0' L x_0 + 2 \int_0^{\infty} (\|B' L x(t)\| + (B' L x(t))' u(t)) dt. \end{aligned}$$

Найдем нижнюю оценку целевого функционала. Имеем

$$\begin{aligned} J &= x_0' L x_0 + 2 \int_0^{\infty} (\|B' L x(t)\| + (B' L x(t))' u(t)) dt \geq \\ &\geq x_0' L x_0 + 2 \int_0^{\infty} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{\|u\| \leq 1} (\|B' L x\| + (B' L x)' u) dt. \end{aligned}$$

В силу известного неравенства Коши–Буняковского минимизируемая по u функция под знаком интеграла на шаре $\|u\| \leq 1$ неотрицательна и равна нулю при

$$(3) \quad u(x) = -\frac{B'Lx}{\|B'Lx\|}, \quad B'Lx \neq 0.$$

В результате нижняя оценка функционала примет вид

$$(4) \quad J = x'_0 Lx_0 + 2 \int_0^{\infty} \left(\|B'Lx(t)\| + (B'Lx(t))' u(t) \right) dt \geq x'_0 Lx_0.$$

Как видно, позиционное управление (3) определено и непрерывно на всем фазовом пространстве, за исключением точек x подпространства R , заданного уравнением $B'Lx = 0$.

Прежде чем установить точность нижней оценки (4), введем в рассмотрение замкнутую управлением (3) систему уравнений

$$(5) \quad \dot{x} = Ax + Bu(x)$$

и выясним поведение ее траекторий в малой окрестности подпространства R . Обозначим через

$$\dot{s}(x, u) = B'L(Ax + Bu)$$

производную векторной функции $s(x) = B'Lx$ в силу системы дифференциальных уравнений (1). Определим в подпространстве R два множества S и P :

$$\begin{aligned} x \in S &\Leftrightarrow (0 \in \dot{s}(x, U), B'Lx = 0), \\ x \in P &\Leftrightarrow (0 \notin \dot{s}(x, U), B'Lx = 0). \end{aligned}$$

Здесь символом $\dot{s}(x, U)$ обозначена область значений функции $\dot{s}(x, u)$ на шаре U при фиксированном x . Согласно первому определению точка x принадлежит S в том и только в том случае, если $B'Lx = 0$ и найдется вектор $v(x) \in U$ со свойством $B'L(Ax + Bv(x)) = 0$. С учетом невырожденности матрицы $B'LB$ представим включение $x \in S$ в равносильной форме

$$(6) \quad v(x) = -(B'LB)^{-1} B'LAx, \quad \|v(x)\| \leq 1, \quad B'Lx = 0.$$

Отсюда следуют очевидные свойства множества S — выпуклость, замкнутость и симметричность относительно начала координат. Эти свойства проверяются непосредственно. Например, чтобы убедиться в выпуклости S , достаточно показать, что из включений $x, y \in S$ вытекает $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in S$ при $\lambda \in [0, 1]$. Действительно, в силу выполнения соотношений (6) для x, y , свойств нормы и условия $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} v(z) &= v((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)v(x) + \lambda v(y) = -(B'LB)^{-1} B'LAz, \\ \|v(z)\| &= \|(1 - \lambda)v(x) + \lambda v(y)\| \leq (1 - \lambda)\|v(x)\| + \lambda\|v(y)\| \leq 1, \\ B'Lz &= B'L((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)B'Lx + \lambda B'Ly = 0, \end{aligned}$$

т.е. $z \in S$. Соответствующие управлению (6) траектории замкнутой системы уравнений

$$(7) \quad \dot{x} = Ax + Bv(x), \quad B'Lx = 0,$$

исходящие из точек множества S , лежат в S . В связи с этим назовем S *областью скольжения* и (7) — *уравнениями скольжения*.

Рассмотрим подробнее множество P . Пусть x — произвольная фиксированная точка P , в которой $B'Lx = 0$ и $0 \notin \dot{s}(x, U)$. По определению множество $\dot{s}(x, U)$ выпуклое, замкнутое и ограниченное. Применим к множествам $\dot{s}(x, U)$ и 0 теорему об отделимости [11]. Согласно этой теореме найдется зависящий от x ненулевой вектор $c \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющий неравенству $c'\dot{s}(x, U) < 0$, или в подробной записи

$$(8) \quad c'B'L(Ax + Bu) < 0, \quad u \in U.$$

В геометрической трактовке неравенство (8) означает, что в точке $x \in P$ все векторы скорости $\dot{x} = Ax + Bu$, $u \in U$, имеют отрицательные проекции на вектор $c'B'L \neq 0$. В частности, если при малом $\varepsilon > 0$ непрерывное решение $x(t)$, $|t - \tau| \leq \varepsilon$ замкнутой системы (5) имеет в точке $x(\tau) = x$ односторонние производные

$$\dot{x}(\tau \pm 0) = Ax(\tau) + Bu(x(\tau \pm 0)),$$

то проекции векторов $\dot{x}(\tau \pm 0)$ на вектор $c'B'L$ тоже отрицательны. Тогда из соображений непрерывности, условия $x(\tau) = x \in P$ и достаточной малости $\varepsilon > 0$ следует, что

$$c'B'Lx(\tau - \varepsilon) = c'B'L(x(\tau - \varepsilon) - x(\tau)) = -\varepsilon c'B'L\dot{x}(\tau - 0) + o(\varepsilon) > 0,$$

$$c'B'Lx(\tau + \varepsilon) = c'B'L(x(\tau + \varepsilon) - x(\tau)) = \varepsilon c'B'L\dot{x}(\tau + 0) + o(\varepsilon) < 0,$$

где $o(\varepsilon)$ — малая порядка выше ε . Значит, траектория $x(t)$ пересекает плоскость $c'B'Lx = 0$ в точке $x(\tau)$ без односторонних касаний. Так как плоскость $c'B'Lx = 0$ содержит P и $x \in P$, то траектория $x(t)$ одновременно пересекает множество P в точке $x(\tau) = x$. В силу произвольности x последний вывод верен для любой точки P .

Множество P назовем *областью прошивания*. Как видно из сказанного, условие $x \in P$ достаточно для того, чтобы проходящая через точку x траектория замкнутой системы (5) прошивала подпространство R разрыва управления (3).

Итак, в зависимости от положения начальной точки x_0 непрерывная траектория замкнутой системы (5) может пересекать область прошивания $P \subset R$ без односторонних касаний и частично лежать в области скольжения $S \subset R$. Движение в скользящем режиме описывается уравнениями скольжения (7).

Вернемся к проверке точности оценки (4). Обозначим через $x(t)$ непрерывную траекторию, определенную на полуоси $t \geq 0$ уравнениями замкнутой системы (5), (7) и начальным условием $x(0) = x_0$. Выделим на полуоси времени множества T_1, T_2, T_3 , полагая

$$t \in T_1 \Leftrightarrow x(t) \notin R; \quad t \in T_2 \Leftrightarrow x(t) \in S; \quad t \in T_3 \Leftrightarrow x(t) \in P.$$

Если $t \in T_1$, то на основании (2), (3), (5) получим

$$\begin{aligned} (x(t)'Lx(t))^\bullet &= 2x(t)'L(Ax(t) + Bu(x(t))) = \\ &= x(t)'(A'L + LA)x(t) - 2\|B'Lx(t)\| \leq -x(t)'Cx(t). \end{aligned}$$

Если $t \in T_2$, то в силу (2), (6), (7) точно так же находим

$$\begin{aligned} (x(t)'Lx(t))^\bullet &= 2x(t)'L(Ax(t) + Bv(x(t))) = \\ &= x(t)'(A'L + LA)x(t) + 2(B'Lx(t))'v(x(t)) = -x(t)'Cx(t). \end{aligned}$$

Приведенные выкладки показывают, что неравенство

$$(9) \quad (x(t)'Lx(t))^\bullet \leq -x(t)'Cx(t)$$

имеет место во всех точках гладкости траектории $x(t)$, $t \geq 0$, за возможным исключением моментов $t \in T_3$ и момента первого попадания траектории в область S . Из неравенства (9) с учетом положительной определенности матрицы L и теоремы Вейерштрасса получим

$$\frac{(x(t)'Lx(t))^\bullet}{x(t)'Lx(t)} \leq -\frac{x(t)'Cx(t)}{x(t)'Lx(t)} \leq -\min_{\|x\|=1} \frac{x'Cx}{x'Lx} = -\alpha < 0, \quad t \geq 0.$$

Отсюда путем интегрирования неравенства по t в пределах от нуля до t находим

$$\ln x(t)'Lx(t) - \ln x_0'Lx_0 \leq -\alpha t.$$

Следовательно,

$$(10) \quad x(t)'Lx(t) \leq x_0'Lx_0 e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Оценка (10) свидетельствует об экспоненциальной устойчивости замкнутой системы (5), (7) при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и влечет выполнение предельного соотношения $x(\infty) = 0$.

На процессе $x(t)$, $u(t)$ с управлением

$$\begin{aligned} u(t) &= -B'Lx(t)/\|B'Lx(t)\|, \quad t \in T_1; \\ u(t) &= -(B'LB)^{-1}B'LAx(t), \quad t \in T_2, \end{aligned}$$

нижняя оценка (4) целевого функционала достигается. Действительно, в этом случае при $t \in T_1$ подынтегральная функция в неравенстве (4) равна нулю на основании определения управления $u(t)$ и при $t \in T_2 \cup T_3$ — вследствие выполнения равенства $B'Lx(t) = 0$. По построению множества T_1, T_2, T_3 не пересекаются, и их объединение совпадает с полуосью $t \geq 0$, поэтому интеграл в неравенстве (4) равен нулю. Значит, процесс $x(t), u(t)$ — оптимальный.

Подведем итоги. Если условия задачи (1) отвечают перечисленным в разделе 2 предположениям, то при любом x_0 решение задачи существует. Оптимальное позиционное управление (3) кусочно-непрерывное с разрывом на подпространстве R . В дополняющих друг друга областях P, S подпространства R выполнены соответствующие достаточные условия прошивания и скольжения. В области скольжения управление $v(x)$ непрерывное и допустимое по амплитудному ограничению (1). Уравнения скольжения (7) линейны и линейно зависимы. Замкнутая система (5), (7) экспоненциально устойчива. Минимум целевого функционала равен $x'_0 L x_0$.

Приведенные выводы и точная нижняя оценка (4) целевого функционала дают ответ на вопрос, в каком случае пробный процесс $y(t), u(t) \equiv 0$, соответствующий задаче Коши $\dot{y} = Ay$ с начальными значениями $y = x_0, t = 0$ оптимален в задаче (1). Для этого процесса на основании оценки (4) имеем

$$(11) \quad J = x'_0 L x_0 + 2 \int_0^{\infty} \|B'Ly(t)\| dt \geq x'_0 L x_0.$$

В силу неотрицательности и непрерывности подынтегральной функции $\|B'Ly(t)\|$ равенство в оценке (11) возможно в том и только в том случае, если $B'Ly(t) \equiv 0, t \geq 0$. При нарушении данного условия, хотя бы в один момент $t \geq 0$, пробный процесс удовлетворяет строгому неравенству (11), т.е. не оптимален. Другими словами, по функционалу (1) пробный процесс оптимален в том и только в том случае, если его траектория полностью лежит в области скольжения.

4. Примеры

В зависимости от матрицы B оптимальное управление (3) имеет разные аналитические свойства. Если B — квадратная невырожденная матрица, то оптимальное управление непрерывно на всем фазовом пространстве, за исключением начала координат. Режим скольжения отсутствует.

Если матрица B состоит из единственного столбца $b \neq 0$, то оптимальное управление

$$u(x) = -b'Lx / |b'Lx| = -\text{sign } b'Lx$$

— релейное с разрывом на плоскости $b'Lx = 0$. Области скольжения S и прошивания P заданы соответствующими условиями

$$(12) \quad |b'Lx| \leq b'Lb, \quad b'Lx = 0; \quad |b'Lx| > b'Lb, \quad b'Lx = 0.$$

Если векторы $b'L$ и $b'LA$ линейно независимы, то геометрически область скольжения представляет собой замкнутую полосу на плоскости $b'Lx = 0$, заключенную между двумя параллельными плоскостями $b'LAx = \pm b'Lb$. Уравнения скольжения имеют вид

$$\dot{x} = Ax + bv(x), \quad v(x) = -b'LAx/b'Lb, \quad b'Lx = 0.$$

Описания (12) областей скольжения и прошивания равносильны известным достаточным условиям существования скользящих режимов и прошивания [9] в терминах функции $s(x) = b'Lx$ и ее односторонних производных в силу замкнутой системы $\dot{x} = Ax + bu(x)$.

Поясним сказанное иллюстративным примером, в котором

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

С использованием приведенных выше формул находим оптимальное релейное управление $u(x_1, x_2) = -\text{sign}(x_1 - x_2)$ с разрывом на прямой $x_1 - x_2 = 0$, области скольжения $x_1 - x_2 = 0$, $|x_2| \leq 2$, прошивания $x_1 - x_2 = 0$, $|x_2| > 2$, и уравнения скольжения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + v(x_1, x_2), & \dot{x}_2 &= -2x_2 - v(x_1, x_2), \\ v(x_1, x_2) &= (x_1 - 2x_2)/2, & x_1 - x_2 &= 0, \quad |x_2| \leq 2. \end{aligned}$$

Эти уравнения приводятся к удобному для интегрирования виду

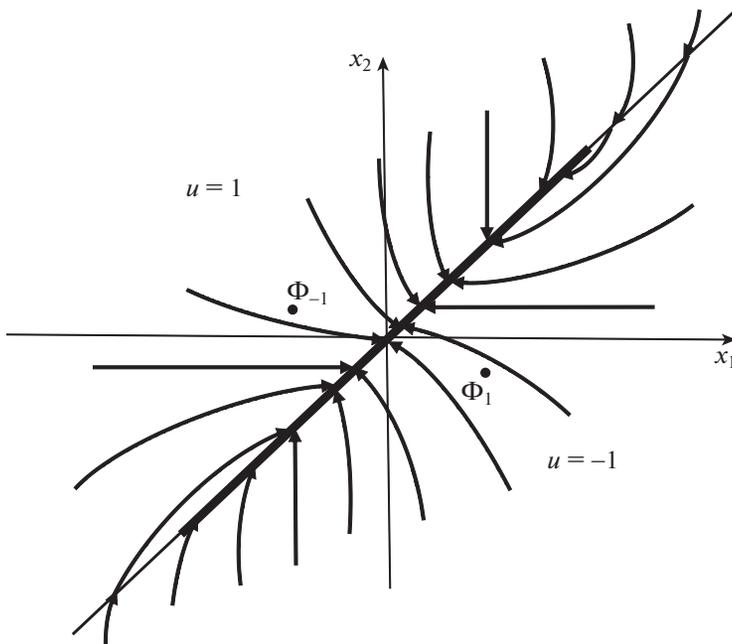
$$(13) \quad \dot{x}_1 = -3x_1/2, \quad \dot{x}_2 = -3x_2/2, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad |x_2| \leq 2$$

с помощью эквивалентных представлений $v(x_1, x_1) = -x_1/2$; $v(x_2, x_2) = -x_2/2$ управления $v(x_1, x_2)$ в области скольжения. При постоянном управлении $u = -1$ или $u = +1$ фазовая точка исходной системы дифференциальных уравнений с возрастанием времени движется к устойчивому фокусу $\Phi_{-1} = (-1, 1/2)$ или $\Phi_{+1} = (1, -1/2)$ по соответствующей параболе

$$x_2 = 1/2 + c_1(x_1 + 1)^2 \quad (u = -1); \quad x_2 = -1/2 + c_2(x_1 - 1)^2 \quad (u = +1).$$

Постоянные c_1, c_2 определяются начальными значениями. Картина расположения оптимальных траекторий представлена на рисунке. Как видно из рисунка, на заключительном этапе оптимальное движение к началу координат происходит преимущественно в режиме скольжения.

Сравним по переходным периодам оптимальную траекторию $x(t) = (\xi e^{-3t/2}, \xi e^{-3t/2})$, $t \geq 0$, системы (13), исходящую в момент $t = 0$ из произвольной фиксированной точки $x = (\xi, \xi)$, $|\xi| \leq 2$, области скольжения с пробной траекторией $y(t) = (\xi e^{-t}, \xi e^{-2t})$, $t \geq 0$, описываемой при $u = 0$ исходными дифференциальными уравнениями с теми же начальными значениями. Переходными периодами считаем моменты времени t_1, t_2 первого попадания этих



Фазовый портрет оптимальной системы в примере. Жирной линией выделена область скольжения, по которой происходит движение в начало координат. Остальная часть прямой разрыва оптимального управления состоит из точек прошивания.

траекторий на границу квадрата $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ при малом положительном $\varepsilon < |\xi|$. Используя координатное представление траекторий $x(t)$, $y(t)$, после очевидных вычислений находим

$$t_1 = (2/3) \ln (|\xi| / \varepsilon); \quad t_2 = \ln (|\xi| / \varepsilon).$$

Очевидно, переходный период t_1 оптимальной траектории составляет $2/3$ переходного периода t_2 пробной траектории для любой начальной точки области скольжения. Так как пробная траектория не лежит в области скольжения, то в силу неравенства (11) она уступает оптимальной траектории еще и по целевому функционалу. Таким образом, в примере оптимальная траектория на участке скольжения лучше пробной траектории по переходному периоду и значению целевого функционала.

5. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления нового линейно-квадратичного типа на полуоси времени при ограничении на управление. С использованием матричного алгебраического уравнения Ляпунова и достаточных условий оптимальности получены простые аналитические выражения для разрывного оптимального позиционного управления и допол-

нительных уравнений скольжения в подпространстве разрыва управления. Установлена экспоненциальная устойчивость замкнутой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I // *АиТ.* 1960. № 4. С. 436–441.
2. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // *Тр. 1 Межд. конгресса ИФАК.* М.: АН СССР, 1961. Т. 1. С. 521–547.
3. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. Дальнейшее развитие проблемы. V // *АиТ.* 1962. № 11. С. 1405–1413.
4. *Фуллер А.Т.* Оптимизация линейных систем регулирования по различным критериям качества // *Тр. 1 Межд. конгресса ИФАК.* М.: АН СССР, 1961. Т. 1. С. 584–605.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С.* Построение программного и позиционного решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики.* 2008. Т. 48. № 10. С. 1748–1779.
6. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
7. *Антипин А.С., Хорошилова Е.В.* О краевой задаче терминального управления с квадратичным критерием качества // *Изв. Иркутского гос. ун-та.* 2014. Т. 8. С. 7–28.
8. *Кротов В.Ф., Букреев В.З., Гурман В.И.* Новые методы вариационного исчисления в динамике полета. М.: Машиностроение, 1969.
9. *Уткин В.И.* Системы с переменной структурой: состояние, проблемы, перспективы // *АиТ.* 1983. № 9. С. 5–25.
10. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. Томск: Томский ун-т, 1989.
11. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 21.10.2021

После доработки 15.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022