Автоматика и телемеханика, № 7, 2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. **П.Ф. ПРЯШНИКОВА**, канд. техн. наук (ppf99999@rambler.ru)
(Филиал Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Севастополь)

РОБАСТНОЕ D-РАЗБИЕНИЕ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА ОТ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

Предлагается метод построения множества интервальной устойчивости многочлена, коэффициенты которого являются интервальными и полиномиальным образом зависят от двух параметров. Метод основан на аппроксимации с заданной точностью множества интервальной устойчивости объединением прямоугольников и не требует исследования и построения границ D-разбиения. Доказана сходимость метода. Эффективность метода проиллюстрирована примерами.

Ключевые слова: многочлен, устойчивость, D-разбиение, робастность, полиномиальная зависимость.

DOI: 10.31857/S0005231022070054, **EDN:** AEIIWG

1. Введение

В современной теории управления наблюдается значительный интерес к проблемам робастности. Обзор различных типов неопределенностей в задачах исследования робастности и методы решения этих задач приведены в [1–24]. Одним из средств исследования робастности является робастное D-разбиение [25], которое разработано на основе объединения классического D-разбиения [26, 27] и современной теории робастной устойчивости, основанной на теореме Харитонова [28] или частотном подходе [29].

Классическое D-разбиение по двум параметрам разработано для случая линейной зависимости от параметров коэффициентов характеристического многочлена и использует традиционную методику, заключающуюся в аппроксимации границ областей D-разбиения конечным множеством точек и указанием правила, определяющего расположение областей устойчивости по отношению к границе. В [30] рассмотрен случай полиномиальной зависимости от параметров коэффициентов характеристического многочлена и предложена альтернативная методика D-разбиения, не требующая построения граничных точек. Методика заключается в аппроксимации областей D-разбиения объединением прямоугольников. Процесс построения прямоугольников позволяет аппроксимировать области устойчивости с любой заданной точностью.

В данной работе методика, предложенная в [30], распространена на построение областей робастной устойчивости. Кроме того, по сравнению с [30], предложен метод повышения скорости сходимости процесса аппроксимации.

2. Постановка задачи

Обозначим:

$$p\left(\alpha',\alpha'',\beta',\beta''\right) = \\ = \Big\{(\alpha,\beta)\Big|(\alpha,\beta)\in[\alpha';\alpha'']\times[\beta';\beta''];\ \alpha',\alpha'',\beta',\beta''\in\mathbb{R};\ \alpha'<\alpha'';\ \beta'<\beta''\Big\}$$

— прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

Рассматривается многочлен

$$a\left(s,\alpha,\beta\right) = q\left(s,\alpha,\beta\right) + r\left(s\right), \tag{1}$$

где $q(s,\alpha,\beta)=q_0(\alpha,\beta)+q_1(\alpha,\beta)s+\ldots+q_n(\alpha,\beta)s^n$ – многочлен, коэффициенты которого определены на прямоугольнике $\Lambda=p\left(\alpha_{\min};\alpha_{\max};\beta_{\min};\beta_{\max}\right)\subset\subset\mathbb{R}^2$ и полиномиальным образом зависят от параметров α и β

$$q_k\left(\alpha,\beta\right) = \sum_{\mu=0}^{n_{\alpha,k}}\sum_{\nu=0}^{n_{\beta,k}} q_{k\mu\nu}\alpha^\mu\beta^\nu \quad \left(k=0,\ldots,n\right); \tag{2}$$

$r(s)$ — интервальный многочлен из множества $R=\Big\{r(s)=r_0+r_1s+\cdots+ +r_ms^m \mid r_k\in[r_k';r_k'']\subset\mathbb{R};\ r_k'\le r_k''\ \left(k=0,\ldots,m\right);\ m\ne n\Big\}$.

Решается задача построения множества Λ_s робастной устойчивости многочлена, такого что $\Lambda_s\subseteq\Lambda$ и $((\alpha,\beta)\in\Lambda_s)\Leftrightarrow$ многочлен (1) устойчив для всех $r\left(s\right)\in R$ (робастно устойчив).

Решение задачи ищется в виде объединения прямоугольников

$$\Lambda_r = \bigcup_{p\in P_r} p \tag{3}$$

из множества $P_r=\left\{p_i=\left(\alpha_i',\alpha_i'',\beta_i',\beta_i''\right)\right\}_{i=1}^{N_r}$ таких, что 1) $p_i\subseteq\Lambda$; 2) p_i и p_j при $i\ne j$ не имеют общих внутренних точек; 3) $(\alpha,\beta)\in p_i\Rightarrow$ многочлен (1) робастно устойчив $(i,j=1,\ldots,N_r)$. Множество P_r строится путем последовательного добавления прямоугольников до тех пор, пока значение критерия близости множеств Λ_r и Λ_s не станет меньше заданной точности $\rho>0$.

3. Теоретическая часть

Для построения множества P_r будем рассматривать еще три множества прямоугольников:

a) множество $P_u = \{p_i = (\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i, \beta''_i)\}_{i=1}^{N_u}$ таких, что 1) $p_i \subseteq \Lambda$; 2) p_i и p_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 3) $(\alpha, \beta) \in p_i \Rightarrow$ многочлен (1) робастно неустойчив $(i, j = 1, \ldots, N_u)$;

b) множество $P_t = \{p_i = (\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i, \beta''_i)\}_{i=1}^{N_t}$ таких, что 1) $p_i \subseteq \Lambda$; 2) p_i и p_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 3) робастная устойчивость многочлена (1) на прямоугольнике p_i требует дополнительного анализа $(i, j = 1, \ldots, N_t)$;

c) множество $P_x = \{p_i = (\alpha'_i, \alpha''_i, \beta'_i, \beta''_i)\}_{i=1}^{N_x}$ таких, что 1) $p_i \subseteq \Lambda$; 2) p_i и p_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек; 3) $\max(\alpha''_i - \alpha'_i, \beta''_i - \beta'_i) \le d_{\max}$, где $d_{\max} > 0$ есть заданное положительное число, при уменьшении которого увеличивается близость множеств Λ_r и Λ_s $(i, j = 1, \ldots, N_x)$.

Алгоритм 1 построения множества P_r при заданном $d_{\max}$ заключается в следующем:

1. Полагаем $P_t := \Lambda$; $P_r := \varnothing$; $P_u := \varnothing$; $P_x := \varnothing$.
2. Если $P_t = \varnothing$, заканчиваем выполнение алгоритма, в противном случае переходим к выполнению п. 3.
3. Извлекаем из множества P_t прямоугольник p, добавленный последним.
4. Полагаем $P_t := P_t \backslash \{p\}$.
5. Если для прямоугольника p выполняется приведенное ниже достаточное условие робастной устойчивости (теорема 2), то полагаем $P_r := P_r \cup \{p\}$ и переходим к выполнению п. 2. В противном случае переходим к выполнению п. 6.
6. Если для прямоугольника p выполняется приведенное ниже достаточное условие робастной неустойчивости (теорема 2), то полагаем $P_u := P_u \cup \{p\}$ и переходим к выполнению п. 2. В противном случае переходим к выполнению п. 7.
7. Если для прямоугольника p выполняется условие $\max(\alpha''_i - \alpha'_i, \beta''_i - \beta'_i) \le$ $\le d_{\max}$, то полагаем $P_x := P_x \cup \{p\}$ и переходим к выполнению п. 2. В противном случае переходим к выполнению п. 8.
8. Прямоугольник p делим по стороне с наибольшей длиной (если длины всех сторон равны, то делим по стороне $[\alpha'_i, \alpha''_i]$) на два равновеликих прямоугольника $\tilde{p}$ и $\tilde{\tilde{p}}$. Полагаем $P_t := P_t \cup \left\{\tilde{p}, \tilde{\tilde{p}}\right\}$ и переходим к выполнению п. 3.

Выполнение цикла алгоритма 1 (п. 2, ..., п. 8) согласно теореме 1 закончится за конечное число шагов.

Теорема 1. Равенство $P_t = \varnothing$ в алгоритме 1 выполнится не более чем за $n = \left(\left[\max\left(0; \log_2 \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{d_{\max}}\right)\right] + 1\right)\left(\left[\max\left(0; \log_2 \frac{\beta_{\max} - \beta_{\min}}{d_{\max}}\right)\right] + 1\right)$ повторений п. 2, ..., п. 8, где $[\ldots]$ означает целую часть числа.

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Основная проблема при применении алгоритма 1 заключается в проверке условий п. 5 и п. 6. Ниже предложено решение этой проблемы.

Для построения достаточных условий робастной устойчивости и неустойчивости многочлена (1) рассмотрим на множестве Λ множество многочленов Харитонова [28, с. 2087–2088] $K(\alpha,\beta)=\left\{K^{(1)}(s,\alpha,\beta);\ K^{(2)}(s,\alpha,\beta);\ K^{(3)}(s,\alpha,\beta);\ K^{(4)}(s,\alpha,\beta)\right\}$, $(\alpha,\beta)\in\Lambda$. Каждый элемент множества $K(\alpha,\beta)$ согласно формуле (1) равен сумме многочлена $q(s,\alpha,\beta)$ и соответствующего многочлена Харитонова для интервального многочлена $r(s)$.

Может быть сформулирована очевидная теорема 2, используемая для проверки условий п. 5 и п. 6 алгоритма 1.

Т е о р е м а 2. *Если все многочлены множества $K(\alpha,\beta)$ устойчивы на прямоугольнике p, то многочлен* (1) *робастно устойчив на прямоугольнике p. Если для всех $(\alpha,\beta)\in p$ хотя бы один многочлен множества $K(\alpha,\beta)$ неустойчив, то многочлен* (1) *робастно неустойчив на прямоугольнике p.*

Таким образом, проверка условий п. 5 и п. 6 алгоритма 1 сводится к определению устойчивости или неустойчивости на прямоугольнике p многочленов $b(s,\alpha,\beta)=b_0(\alpha,\beta)+b_1(\alpha,\beta)s+\cdots+b_n(\alpha,\beta)s^n\in K(\alpha,\beta)$, коэффициенты которых полиномиальным образом зависят от параметров α и β. По теоремам 4, 1, 2 [30] вещественные части $\mathrm{ReS}(\alpha,\beta)$ всех нулей многочлена $b(s,\alpha,\beta)$ сохраняют знак на прямоугольнике p, если на этом прямоугольнике не имеет решения совокупность

$$\left[\begin{array}{l} b_n(\alpha,\beta)=0;\\ b_0(\alpha,\beta)=0;\\ \Delta_{n-1}(\alpha,\beta)=0, \end{array}\right. \tag{4}$$

где $\Delta_{n-1}(\alpha,\beta)$ есть $(n-1)$-й определитель Гурвица многочлена $b(s,\alpha,\beta)$. Поэтому для проверки условий теоремы 2 достаточно установить, что совокупность (4) не имеет решений на прямоугольнике p, и проверить устойчивость многочлена в любой выбранной точке $(\alpha^*,\beta^*)\in p$. Устойчивость многочлена во всех точках прямоугольника p совпадает с устойчивостью в точке (α^*,β^*).

Левая часть каждого из уравнений совокупности (4) есть многочлен вида

$$\begin{cases} d(\alpha,\beta)=\displaystyle\sum_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum_{\nu=0}^{m_\beta}d_{\mu\nu}(\alpha,\beta);\\ d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)=d_{\mu\nu}\alpha^\mu\beta^\nu\ \ (d_{\mu\nu}\in\mathbb{R};\mu=0,\ldots,m_\alpha;\nu=0,\ldots,m_\beta). \end{cases} \tag{5}$$

Достаточные условия отсутствия нулей многочлена (5) на прямоугольнике p дает

Т е о р е м а 3. *Многочлен* (5) *не имеет нулей на прямоугольнике*

$$p(\alpha',\alpha'',\beta',\beta''),$$

если существуют функции $\varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$, $\psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ $(\mu=0,\ldots,m_\alpha;\nu=0,\ldots,m_\beta)$ такие, что для всех $(\alpha,\beta)\in p$ выполняются неравенства

$$\varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta)\le d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)\le\psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) \tag{6}$$

и

$$
\left[\begin{array}{l}
\min\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi(\alpha,\beta) > 0; \quad \varphi(\alpha,\beta) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta);\\
\max\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \psi(\alpha,\beta) < 0; \quad \psi(\alpha,\beta) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} \psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta).
\end{array}\right. \tag{7}
$$

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении.

В [30] предложено выбирать $\varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \mathrm{const} = \min\limits_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ и $\psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \mathrm{const} = \max\limits_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ $(\mu = 0,\ldots,m_\alpha; \nu = 0,\ldots,m_\beta)$. Такой выбор имеет алгоритмическую и вычислительную простоту. Однако в силу грубости приближения функций $d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ $(\mu = 0,\ldots,m_\alpha; \nu = 0,\ldots,m_\beta)$ константами, приближение множества Λ_s множеством Λ_r происходит достаточно медленно (большое число прямоугольников попадает во множество P_x). Для повышения скорости приближения предлагается выбирать функции $\varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$, $\psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ $(\mu = 0,\ldots,m_\alpha; \nu = 0,\ldots,m_\beta)$ в соответствии с теоремой 4.

Теорема 4. *В теореме 3 могут быть выбраны функции*

$$
\begin{cases}
\varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \varphi_{\alpha\beta}\alpha\beta + \varphi_\alpha\alpha + \varphi_\beta\beta + \varphi_0;\\
\psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \psi_{\alpha\beta}\alpha\beta + \psi_\alpha\alpha + \psi_\beta\beta + \psi_0,
\end{cases} \tag{8}
$$

коэффициенты которых определены в доказательстве теоремы 4. Индексы $\mu = 0,\ldots,m_\alpha$; $\nu = 0,\ldots,m_\beta$ в правых частях равенств (8) *опущены для сокращения обозначений.*

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении.

Функции $\varphi(\alpha,\beta)$ и $\psi(\alpha,\beta)$, определяемые формулами (7) и (8), есть многочлены двух переменных вида $\chi(\alpha,\beta) = \chi_{\alpha\beta}\alpha\beta + \chi_\alpha\alpha + \chi_\beta\beta + \chi_0$. Для определения $\min\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \chi(\alpha,\beta)$ и $\max\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \chi(\alpha,\beta)$ необходимо сравнить значения функции $\chi(\alpha,\beta)$ в вершинах прямоугольника p, и если $\chi_{\alpha\beta} \neq 0$ и точка $\left(-\frac{\chi_\alpha}{\chi_{\alpha\beta}}, -\frac{\chi_\beta}{\chi_{\alpha\beta}}\right) \in p$, то и в этой точке.

Формулы, приведенные в доказательстве теоремы 4, позволяют выполнить проверку условий п. 5 и п. 6 алгоритма 1 для случая, когда исходное множество Λ, для которого строится робастное D-разбиение, принадлежит первому квадранту. Если множество Λ принадлежит второму квадранту, то путем замены переменной $\alpha := -\alpha$ в многочлене (1) задача сводится к случаю, удовлетворяющему условию теоремы 4. Если множество Λ принадлежит третьему квадранту, то путем замены $\alpha := -\alpha$; $\beta := -\beta$ в многочлене (1) задача сводится к случаю, удовлетворяющему условию теоремы 4. Если множество Λ принадлежит четвертому квадранту, то путем замены переменной $\beta := -\beta$ в многочлене (1) задача сводится к случаю, удовлетворяющему условию теоремы 4. Если множество Λ одновременно пересекает несколько квадрантов, то множество Λ делится не более чем на четыре прямоугольника, каждый из которых принадлежит одному из квадрантов, и робастное D-разбиение строится для каждого из прямоугольников.

Сходимость метода робастного D-разбиения определим как существование для всех $\varepsilon > 0$ такого $d_{\max}$, что $|S_{\Lambda_s} - S_{\Lambda_r}| < \varepsilon$, где S — площадь соответствующих множеств. Сходимость метода доказывает

Т е о р е м а 5. *Для любой точки $(\alpha, \beta) \in \Lambda_s$ существует $d_{\max}$ такое, что существует прямоугольник $p \in P_r$, содержащий точку (α, β).*

Доказательство теоремы 5 дано в Приложении.

Имеет место включение $\Lambda_s \subseteq \Lambda_r \cup \Lambda_x$, и точность приближения множества Λ_s множеством Λ_r можно характеризовать величиной

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{S_{\Lambda_x}}{S_{\Lambda_r}}, & \text{если} \quad \Lambda_r \neq \varnothing; \\ S_{\Lambda_x}, & \text{если} \quad \Lambda_r = \varnothing. \end{cases} \tag{9}$$

Площади S_{Λ_x} и S_{Λ_r} вычисляются как суммы площадей прямоугольников, составляющих эти множества.

По построению зависимость $\rho(d_{\max})$ есть неубывающая функция. Площадь аппроксимирующего множества Λ_r отличается (в относительных единицах при $\Lambda_r \neq \varnothing$) от площади множества робастной устойчивости не более чем на ρ. Для уменьшения ρ следует уменьшить $d_{\max}$ и (при сохранении ранее построенных прямоугольников множества Λ_r) применить алгоритм 1 к множеству прямоугольников Λ_x. По теореме 5, уменьшая $d_{\max}$ и многократно применяя алгоритм 1 к множествам Λ_x, можно достичь любой наперед заданной точности ρ.

В [30] проведен анализ объема вычислений, необходимых для аппроксимации множества устойчивости многочлена. При аппроксимации множества робастной устойчивости объем вычислений будет примерно в четыре раза больше, так как множество Λ_r строится с использованием четырех многочленов Харитонова. Примеры 1, 2 иллюстрируют возможности предложенного метода для решения задач, названных в [25, с. 43] характерными. Пример 3 иллюстрирует возможности предложенного метода для решения задач, для которых, как отмечается в [25, с. 51], “техника описания робастного D-разбиения не разработана”. Пример 4 иллюстрирует возможность применения предложенного метода с использованием персонального компьютера при достаточно высоких степенях многочленов $q\,(s, \alpha, \beta)$, $r\,(s)$, $q_k\,(\alpha, \beta)$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Алгоритм 1 допускает параллельные вычисления, что может быть использовано для уменьшения времени построения множества робастной устойчивости.

4. Результаты численного эксперимента

Алгоритм 1 реализован в виде прикладной компьютерной программы в среде разработки Embarcadero RAD Studio. С помощью разработанной про-

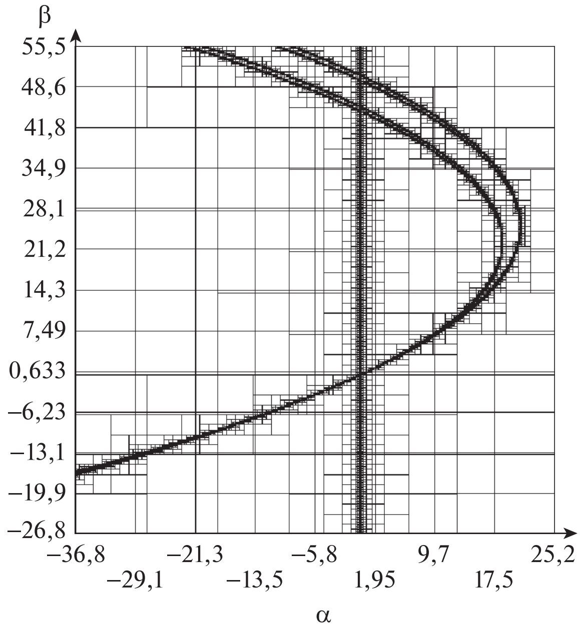

Рис. 1. Множество P примера 1.

граммы на персональном компьютере с процессором AMD FX-8350 построены аппроксимации множеств робастной устойчивости для многочленов различного уровня сложности. На рис. 2, 4, 6, 8 множество Λ_r изображено светло-серым цветом, множество Λ_u — белым цветом, множество Λ_x — черным цветом. Площадь множества Λ_x мала, и изображение множества Λ_x выглядит как пунктирная линия.

В [25] применение традиционного D-разбиения для случая непрерывных систем и двух параметров иллюстрируется на характерных примерах. Покажем решение этих примеров методом аппроксимации множества Λ_s множеством Λ_r. В примере 1 приведены все многочлены, используемые в алгоритме 1, в остальных примерах приведены только конечные результаты.

В *примере* 1 (пример 1 из [25, с. 43–44]):

$$q\,(s,\alpha,\beta) = \alpha + \beta s; \quad r(s) = [3{,}93; 3{,}97]\, s^2 + [2{,}38; 2{,}42] s^3 + [0{,}19; 0{,}21] s^4;$$

$$\alpha_{\min} = -36{,}8; \quad \alpha_{\max} = 25{,}2; \quad \beta_{\min} = -26{,}8; \quad \beta_{\max} = 55{,}5.$$

Многочлены Харитонова:

$$K^{(1)}\,(s,\alpha,\beta) = \alpha + \beta s + 3{,}97 s^2 + 2{,}42 s^3 + 0{,}19 s^4;$$
$$K^{(2)}\,(s,\alpha,\beta) = \alpha + \beta s + 3{,}97 s^2 + 2{,}38 s^3 + 0{,}19 s^4;$$
$$K^{(3)}\,(s,\alpha,\beta) = \alpha + \beta s + 3{,}93 s^2 + 2{,}38 s^3 + 0{,}21 s^4;$$
$$K^{(4)}\,(s,\alpha,\beta) = \alpha + \beta s + 3{,}93 s^2 + 2{,}42 s^3 + 0{,}21 s^4.$$

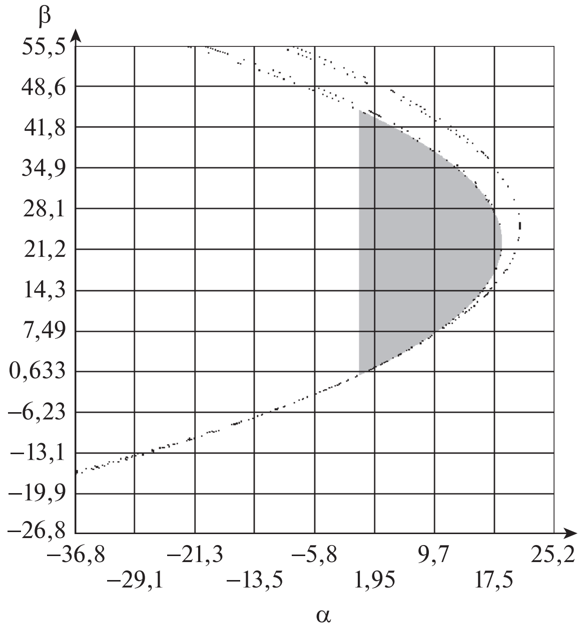

Рис. 2. Робастное D-разбиение примера 1.

Многочлены совокупности (4):

1) для $K^{(1)}(s,\alpha,\beta)$: $b_4(\alpha,\beta) = 0{,}19;\ b_0(\alpha,\beta) = \alpha;$

$$\Delta_3(\alpha,\beta) = 9{,}6074\beta - 0{,}19\beta^2 - 5{,}8564\alpha;$$

2) для $K^{(2)}(s,\alpha,\beta)$: $b_4(\alpha,\beta) = 0{,}19;\ b_0(\alpha,\beta) = \alpha;$

$$\Delta_3(\alpha,\beta) = 9{,}4486\beta - 0{,}19\beta^2 - 5{,}6644\alpha;$$

3) для $K^{(3)}(s,\alpha,\beta)$: $b_4(\alpha,\beta) = 0{,}21;\ b_0(\alpha,\beta) = \alpha;$

$$\Delta_3(\alpha,\beta) = 9{,}3534\beta - 0{,}21\beta^2 - 5{,}6644\alpha;$$

4) для $K^{(4)}(s,\alpha,\beta)$: $b_4(\alpha,\beta) = 0{,}21;\ b_0(\alpha,\beta) = \alpha;$

$$\Delta_3(\alpha,\beta) = 9{,}5106\beta - 0{,}21\beta^2 - 5{,}8564\alpha.$$

Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0{,}01$ приведено на рис. 1, изображение робастного D-разбиения — на рис. 2.

В *примере* 2 (пример 2 из [25, с. 44–45]):

$$q(s,\alpha,\beta) = \alpha + 6s + \beta s^2 + 20s^3 + 6s^5; \quad r(s) = [13{,}5; 16{,}5]s^4 + [0{,}9; 1{,}1]s^6;$$
$$\alpha_{\min} = -10; \quad \alpha_{\max} = 30; \quad \beta_{\min} = -10; \quad \beta_{\max} = 60.$$

Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0{,}01$ приведено на рис. 3, изображение робастного D-разбиения — на рис. 4.

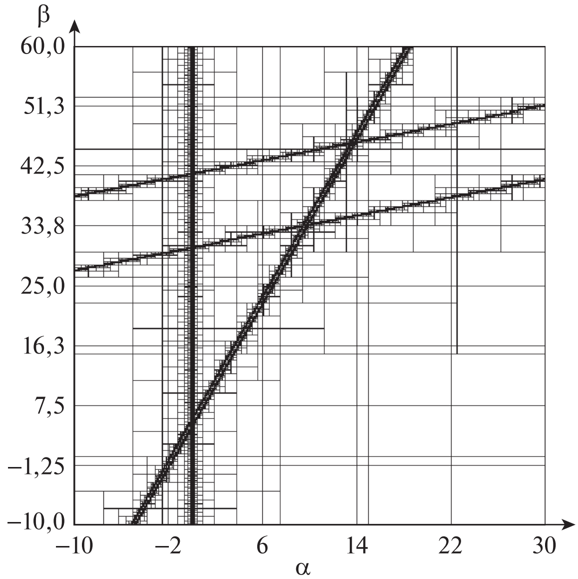

Рис. 3. Множество P примера 2.

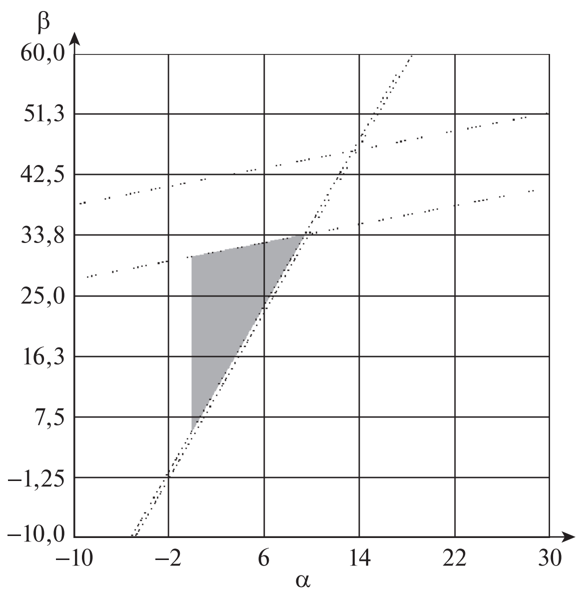

Рис. 4. Робастное D-разбиение примера 2.

В *примере* 3 (пример из [25, с. 51–52]):

$$q\,(s,\alpha,\beta) = 1 + 0{,}2s + \beta s + \alpha s + 0{,}01s^2 + 0{,}2\beta s^2 + 0{,}2\alpha s^2 + \alpha\beta s^2 +$$
$$+ 0{,}01\beta s^3 + 0{,}01\alpha s^3 + 0{,}2\alpha\beta s^3 + 0{,}01\alpha\beta s^4; \quad r\,(s) = [27; 33];$$
$$\alpha_{\min} = -4{,}5; \quad \alpha_{\max} = 6{,}54; \quad \beta_{\min} = -3{,}13; \quad \beta_{\max} = 4{,}64.$$

Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0{,}001$ приведено на рис. 5, изображение робастного D-разбиения — на рис. 6.

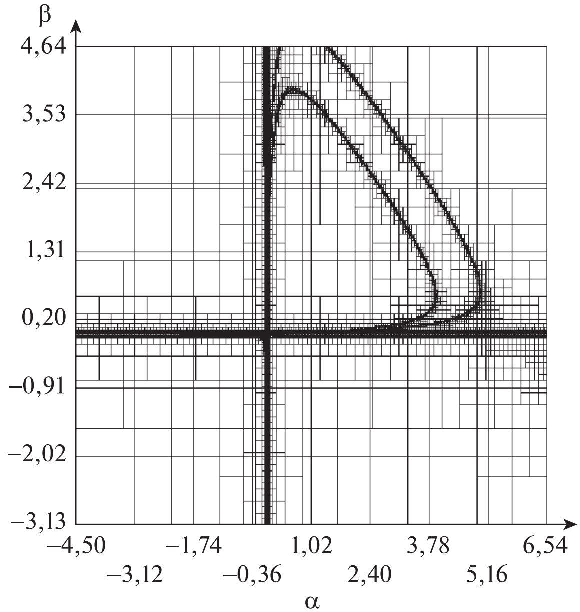

Рис. 5. Множество P примера 3.

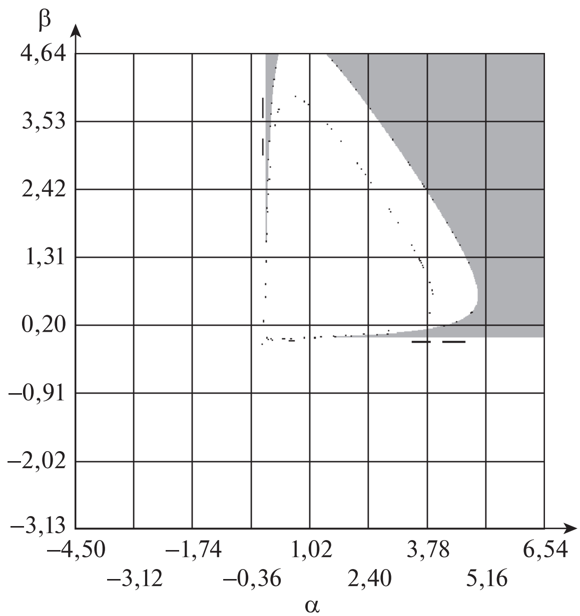

Рис. 6. Робастное D-разбиение примера 3.

В *примере* 4 (робастная версия примера 1 из [30, с. 39–40]):

$$q\,(s,\alpha,\beta) = 10\left(1 + 3\alpha - 10\alpha\beta + 2\alpha^2 + 16\alpha^2\beta^2 - 40\alpha^4 - 16\beta^4\right) +$$
$$+\,10s + 14s^2 + 11s^3 + 5{,}3s^4 + 1{,}6s^5 + 0{,}32s^6 + 0{,}039s^7 +$$
$$+\,10^{-4}\left(27 - \alpha^4 + \beta^2 + \alpha^5\beta^7\right)s^8 + 10^{-5}\left(8 + 1{,}5\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta^2\right)s^9;$$

$$r(s) = [-0{,}7; 0{,}3] + [-0{,}1; 0{,}2]\, s^5 + [-0{,}001; 0{,}002] s^7;$$
$$\alpha_{\min} = -1; \quad \alpha_{\max} = 1; \quad \beta_{\min} = -1; \quad \beta_{\max} = 1.$$

Миноры $\Delta_8(\alpha, \beta)$ для многочленов Харитонова есть многочлены 48-й степени, включающий 454 монома. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 0{,}001$ приведено на рис. 7, изображение робастного D-разбиения — на рис. 8.

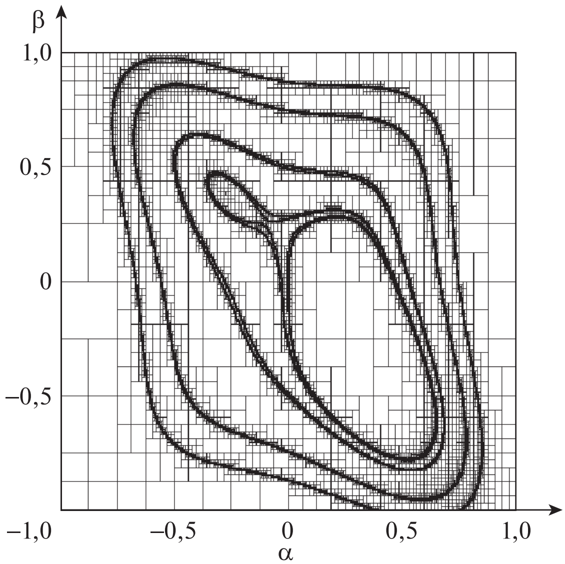

Рис. 7. Множество P примера 4.

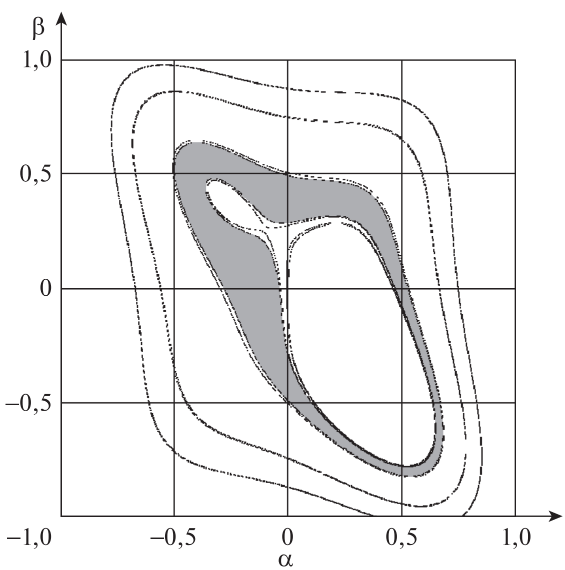

Рис. 8. Робастное D-разбиение примера 4.

Таблица 1. Численные характеристики робастного D-разбиения

$d_{\max}$		0,1	0,01	0,001	0,0001
Пример 1	N	22 262	273 140	2 727 898	31 051 682
	ρ	0,098098	0,010264	0,001131	0,00010661
	t	1,814 с	19,802 с	3 мин 14,047 с	35 мин 4,854 с
Пример 2	N	15 671	130 047	1 222 201	16 748 097
	ρ	0,23724	0,029056	0,0030431	0,00022637
	t	1,557 с	11,541 с	1 мин 37,292 с	21 мин 22,703 с
Пример 3	N	2362	29 022	351 635	2 953 418
	ρ	0,36141	0,046215	0,0045418	0,00056646
	t	0,353 с	3,169 с	37,157 с	4 мин 55,033 с
Пример 4	N	760	10 458	115 998	2 109 903
	ρ	16,125	0,80623	0,12702	0,0079101
	t	1,656 с	14,09 с	2 мин 39,652 с	48 мин 24,646 с

Таблица 1 для примеров 1–4 характеризует зависимость числа прямоугольников N, точность ρ и время построения t робастного D-разбиения от значения $d_{\max}$.

Приемлемое в большинстве научных и инженерных приложений значение $\rho < 0{,}05$ для примеров 1–3 достигается при $d_{\max} < 0{,}01$, для примера 4 значение $\rho < 0{,}13$ достигается при $d_{\max} < 0{,}001$.

5. Заключение

В статье предложен новый метод построения множества интервальной устойчивости многочлена в пространстве двух параметров, от которых коэффициенты многочлена зависят полиномиальным образом. Метод не требует исследования и построения границ множества робастной устойчивости, а основан на аппроксимации множества робастной устойчивости множеством вписанных прямоугольников. Предложенный метод и разработанное программное обеспечение могут быть использованы при решении научных и инженерных задач параметрического анализа и синтеза систем управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Наибольшее число повторений цикла алгоритма 1 соответствует случаю, когда прямоугольник p извлекается из множества P_t без возвращения только при выполнении условия п. 7: $\max(\alpha_i'' - \alpha_i', \beta_i'' - \beta_i') \leq d_{\max}$ (условия п. 5 и п. 6 не выполняются для всех построенных прямоугольников). Из множества P_t обязательно будут извлечены все прямоугольники без возвращения, если у всех прямоугольников каждая из длин сторон будет не больше $d_{\max}$. Для этого потребуется не более $\tilde{n}$ делений вдоль параметра α так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2^{\tilde{n}}} \leq d_{\max} \Leftrightarrow \tilde{n} \geq \log_2 \frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{d_{\max}}$, и не более $\tilde{\tilde{n}}$ делений вдоль параметра β так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{\beta_{\max}-\beta_{\min}}{2^{\tilde{\tilde{n}}}} \le d_{\max} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \tilde{\tilde{n}} \ge \log_2 \frac{\beta_{\max}-\beta_{\min}}{d_{\max}}$. Так как $\tilde{n}, \tilde{\tilde{n}} \in \mathbb{N}$ и значения логарифмов могут быть отрицательными, то можно принять $\tilde{n} \ge \left[\max\left(0; \log_2 \frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{d_{\max}}\right)\right] + 1$, $\tilde{\tilde{n}} \ge \left[\max\left(0; \log_2 \frac{\beta_{\max}-\beta_{\min}}{d_{\max}}\right)\right] + 1$. Всего потребуется не более $n = \tilde{n}\tilde{\tilde{n}}$ делений. На каждом шаге цикла алгоритма 1 из множества P_t либо извлекается без возвращения последний добавленный прямоугольник, либо этот прямоугольник делится на два прямоугольника по стороне с наибольшей длиной. Поэтому необходимое число делений будет осуществлено не более чем за n повторений цикла. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Суммируя неравенства (6) по $\mu = 0, \ldots, m_\alpha$ и $\nu = 0, \ldots, m_\beta$, получим для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ неравенства

$$
(\text{П.1}) \quad \begin{cases} d(\alpha,\beta) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta) \ge \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \varphi(\alpha,\beta) \ge \min\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi(\alpha,\beta); \\ d(\alpha,\beta) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta) \le \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} \psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \psi(\alpha,\beta) \le \max\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \psi(\alpha,\beta). \end{cases}
$$

Если выполняется первое из неравенств совокупности (7), то из первого неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha, \beta) > 0$ для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha, \beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p. Если выполняется второе из неравенств совокупности (7), то из второго неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha, \beta) < 0$ для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha, \beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию $g(\alpha, \beta) = \alpha^\mu \beta^\nu$ ($\mu, \nu \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$), определенную на прямоугольнике $p \subset [0; +\infty)^2$, принадлежащем первому квадранту. Функция $g_\alpha(\alpha) = \alpha^\mu$ выпукла вниз, и все ее значения не меньше значений касательной $g'_\alpha(\alpha)$, проведенной в точке $(\alpha', (\alpha')^\mu)$, и не больше значений хорды $g''_\alpha(\alpha)$, проведенной через точки $(\alpha', (\alpha')^\mu)$ и $(\alpha'', (\alpha'')^\mu)$. То есть для всех $\alpha \in [\alpha'; \alpha'']$ имеет место неравенство

$$
(\text{П.2}) \qquad g'_\alpha(\alpha) \le \alpha^\mu \le g''_\alpha(\alpha).
$$

Уравнение касательной:

$$
(\text{П.3}) \qquad \begin{cases} g'_\alpha(\alpha) = a'_\alpha \alpha + b'_\alpha; \\ a'_\alpha = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu = 0; \\ \mu(\alpha')^{\mu-1}, \text{ если } \mu \ge 1; \end{cases} \\ b'_\alpha = (\alpha')^\mu - a'_\alpha \alpha'. \end{cases}
$$

Уравнение хорды:

$$\text{(П.4)}\qquad \begin{cases} g''_\alpha(\alpha) = a''_\alpha \alpha + b''_\alpha; \\ a''_\alpha = \dfrac{(\alpha'')^\mu - (\alpha')^\mu}{\alpha'' - \alpha'}; \\ b''_\alpha = (\alpha')^\mu - a''_\alpha \alpha'. \end{cases}$$

Аналогично формулам (П.2)–(П.4) для всех $\beta \in [\beta'; \beta'']$ имеют место формулы:

$$\text{(П.5)}\qquad g'_\beta(\beta) \le \beta^\nu \le g''_\beta(\beta);$$

$$\text{(П.6)}\qquad \begin{cases} g'_\beta(\beta) = a'_\beta \beta + b'_\beta; \\ a'_\beta = \begin{cases} 0, \text{ если } \nu = 0; \\ \nu(\beta')^{\nu-1}, \text{ если } \nu \ge 1; \end{cases} \\ b'_\beta = (\beta')^\nu - a'_\beta \beta'; \end{cases}$$

$$\text{(П.7)}\qquad \begin{cases} g''_\beta(\beta) = a''_\beta \beta + b''_\beta; \\ a''_\beta = \dfrac{(\beta'')^\nu - (\beta')^\nu}{\beta'' - \beta'}; \\ b''_\beta = (\beta')^\nu - a''_\beta \beta'. \end{cases}$$

Так как прямоугольник p принадлежит первому квадранту, то значения всех функций неравенств (П.2) и (П.5) неотрицательны. Перемножая эти неравенства, получим, что для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ выполняется:

$$\text{(П.8)}\qquad \begin{cases} g'(\alpha,\beta) \le \alpha^\mu \beta^\nu \le g''(\alpha,\beta); \\ g'(\alpha,\beta) = g'_\alpha(\alpha)\, g'_\beta(\beta) = g'_{\alpha\beta}\alpha\beta + g'_\alpha \alpha + g'_\beta \beta + g'_0; \\ g''(\alpha,\beta) = g''_\alpha(\alpha)\, g''_\beta(\beta) = g''_{\alpha\beta}\alpha\beta + g''_\alpha \alpha + g''_\beta \beta + g''_0; \\ g'_{\alpha\beta} = a'_\alpha a'_\beta;\ g'_\alpha = a'_\alpha b'_\beta;\ g'_\beta = a'_\beta b'_\alpha;\ g'_0 = b'_\alpha b'_\beta; \\ g''_{\alpha\beta} = a''_\alpha a''_\beta;\ g''_\alpha = a''_\alpha b''_\beta;\ g''_\beta = a''_\beta b''_\alpha;\ g''_0 = b''_\alpha b''_\beta. \end{cases}$$

Если $d_{\mu\nu} > 0$ $(\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \nu = 0, \ldots, m_\beta)$, то, умножая первое неравенство (П.8) на $d_{\mu\nu}$, получим для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ неравенство $d_{\mu\nu} g'(\alpha,\beta) \le d_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = d_{\mu\nu}\alpha^\mu\beta^\nu \le d_{\mu\nu} g''(\alpha,\beta)$ и положим

$$\text{(П.9)}\qquad \begin{cases} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = d_{\mu\nu} g'(\alpha,\beta); \\ \psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = d_{\mu\nu} g''(\alpha,\beta). \end{cases}$$

Если $d_{\mu\nu} < 0$ $(\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \nu = 0, \ldots, m_\beta)$, то, умножая первое неравенство (П.8) на $d_{\mu\nu}$, получим для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ неравенство $d_{\mu\nu} g''(\alpha,\beta) \le d_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = d_{\mu\nu}\alpha^\mu\beta^\nu \le d_{\mu\nu} g'(\alpha,\beta)$ и положим

$$\text{(П.10)}\qquad \begin{cases} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = d_{\mu\nu} g''(\alpha,\beta); \\ \psi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = d_{\mu\nu} g'(\alpha,\beta). \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть (α_0, β_0) есть произвольная точка из множества робастной устойчивости Λ_s. Тогда для каждого многочлена Харитонова, соответствующего этой точке, совокупность (4) не имеет решения. Это означает, что для каждого из многочленов вида (5) имеет место неравенство

$$d\,(\alpha_0, \beta_0) \neq 0. \tag{П.11}$$

Для доказательства теоремы укажем способ выбора $d_{\max}$, при котором существует прямоугольник p, содержащий точку (α_0, β_0), и для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ справедлива совокупность неравенств (7), выполнение которых по теореме 3 обеспечивает робастную устойчивость на прямоугольнике p.

По теореме 6 [30] для любой точки $(\alpha_0, \beta_0) \in \Lambda_s$ существует $d_{\max}$ такое, что существует прямоугольник p, содержащий точку (α_0, β_0), и для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ справедлива совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\min} > 0; \quad d_{\mu\nu,\min} = \min\limits_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta); \\ \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\max} < 0; \quad d_{\mu\nu,\max} = \max\limits_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta)\,. \end{array}\right. \tag{П.12}$$

Покажем, что из первого неравенства совокупности (П.12) следует первое неравенство совокупности (7) и из второго неравенства совокупности (П.12) следует второе неравенство совокупности (7). Тем самым докажем теорему 5. Из неравенства $\varphi\,(\alpha,\beta) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} \varphi_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta) \geq \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} \min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta)$ следует

$$\min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi\,(\alpha,\beta) \geq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum_{\nu=0}^{m_\beta} \min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta). \tag{П.13}$$

При $d_{\mu\nu} > 0$:

$$\min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta) = \min_{(\alpha,\beta)\in p} \big(d_{\mu\nu} g'\,(\alpha,\beta)\big) = \min_{(\alpha,\beta)\in p} \big(d_{\mu\nu} g'_\alpha\,(\alpha)\, g'_\beta\,(\beta)\big).$$

Касательные $g'_\alpha\,(\alpha)$, $g'_\beta\,(\beta)$ есть неубывающие, неотрицательные функции, поэтому под знаком последнего минимума стоит непрерывная функция, не убывающая вдоль каждой координаты и достигающая наименьшего значения при наименьших значениях аргументов:

$$\begin{aligned} \min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta) &= d_{\mu\nu} g'_\alpha\,(\alpha')\, g'_\beta\,(\beta') = d_{\mu\nu} (\alpha')^\mu (\beta')^\nu = \\ &= d_{\mu\nu}\,(\alpha',\beta') = \min_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}\,(\alpha,\beta)\,. \end{aligned} \tag{П.14}$$

Подставляя выражение для $\min\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ из (П.14) в (П.13), получим, что при $d_{\mu\nu} > 0$ имеет место неравенство

$$\text{(П.15)}\qquad \min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi(\alpha,\beta) \geq \sum_{\mu=0}^{m_\alpha}\sum_{\nu=0}^{m_\beta} \min_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta).$$

При $d_{\mu\nu} < 0$:

$$\min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) = \min_{(\alpha,\beta)\in p} \left(d_{\mu\nu} g''(\alpha,\beta)\right) = \min_{(\alpha,\beta)\in p} \left(d_{\mu\nu} g''_\alpha(\alpha)\, g''_\beta(\beta)\right).$$

Хорды $g''_\alpha(\alpha)$, $g''_\beta(\beta)$ есть неубывающие, неотрицательные функции, поэтому под знаком последнего минимума стоит непрерывная функция, не возрастающая вдоль каждой координаты и достигающая наименьшего значения при наибольших значениях аргументов:

$$\text{(П.16)}\qquad \begin{aligned} \min_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta) &= d_{\mu\nu} g''_\alpha\left(\alpha''\right) g''_\beta\left(\beta''\right) = d_{\mu\nu}\left(\alpha''\right)^\mu \left(\beta''\right)^\nu = \\ &= d_{\mu\nu}\left(\alpha'',\beta''\right) = \min_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Подставляя выражение для $\min\limits_{(\alpha,\beta)\in p} \varphi_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ из (П.16) в (П.13), получим, что при $d_{\mu\nu} > 0$ имеет место неравенство (П.15).

Таким образом, из первого неравенства совокупности (П.12) с учетом доказанного неравенства (П.15) следует первое неравенство совокупности (7).

Аналогично доказывается, что из второго неравенства совокупности (П.12) следует второе неравенство совокупности (7).

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. *Пупков К.А.* (ред.). Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 3. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
3. *Яковлев В.Б.* (ред.). Теория автоматического управления. М.: Высшая школа, 2005.
4. *Ротач В.Я.* Теория автоматического управления. М.: МЭИ, 2008.
5. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: URSS, 2019.
6. *Оморов Р.О.* Алгебраический метод исследования робастности интервальных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 3. С. 364–370.
7. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Линейные системы. М.: Юрайт, 2021.

8. *Gu Da-Wei, Petko Hr.P., Konstantinov M.M.* Robust Control Design with Matlab. London, UK: Springer, 2005.
9. *Lin F.* Robust Control Design. An Optimal Control Approach. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2007.
10. *Sinha A.K.* Linear Systems. Optimal and Robust Control. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2007.
11. *Belmiloudi A.* Stabilization, Optimal and Robust Control: Theory and Applications in Biological and Physical Sciences. London, UK: Springer, 2008.
12. *Bartoszewicz A.* Robust Control, Theory and Applications. Rijeka, Croatia: InTech, 2011.
13. *Levine W.S.* The Control Systems Handbook. Control System Advanced Methods. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2011.
14. *Yedavalli R.K.* Robust Control of Uncertain Dynamic Systems. A Linear State Space Approach. New York, U.S.: Springer, 2014.
15. *Dodds S.J.* Feedback Control. Linear, Nonlinear and Robust Techniques and Design with Industrial Applications. London, UK: Springer, 2015.
16. *Liu K.-Z., Yao Y.* Robust Control. Theory and Applications. Singapore: John Wiley & Sons, 2016.
17. *Feng Y., Yagoubi M.* Robust Control of Linear Descriptor Systems. Singapore: Springer, 2017.
18. *Garcia-Sanz M.* Robust Control Engineering. Practical QFT solutions. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2017.
19. *Golnarachi F., Kuo B.* Automatic Control Systems. New York, U.S.: McGraw Hill, 2017.
20. *Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A.* Feedback Control of Dynamic Systems. London, UK: Pearson Education Limited, 2020.
21. *Astrom K.J., Murray R.M.* Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. Princeton. U.S.: Princeton university press, 2021.
22. *Baillieul J., Samad T.* Encyclopedia of Systems and Control. London, UK: Springer, 2021.
23. *Dorf R., Bishop R.* Modern Control Systems. London, UK: Pearson Education Limited, 2022.
24. *Fortuna L., Frasca M., Buscarino A.* Optimal and Robust Control Advanced Topics with MATLAB. Boca Raton, U.S.: CRC Press, 2022.
25. *Петров Н.П., Поляк Б.Т.* Робастное D-разбиение // АиТ. 1991. № 11. С. 41–53.

    Petrov N.P., Polyak B.T. Robust D-decomposition // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 11. P. 1513–1523.
26. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
27. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
28. *Харитонов В.Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Том 14. № 11. С. 2086–2088.

29. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. 1990. № 9. С. 45–54.

Polyak B.T., Tsypkin Ya.Z. Frequency Domain Criteria for Robust Stability and Aperiodicity of Linear Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 9. P. 1192–1201.

30. *Пряшникова П.Ф.* D-разбиение при полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена от двух параметров // АиТ. 2021. № 3. С. 32–46.

Pryashnikova P.F. D-Decomposition in the Case of Polynomial Dependence of the Coefficients of a Polynomial on Two Parameters // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 3. P. 398–409.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 15.08.2021

После доработки 29.01.2022

Принята к публикации 31.03.2022