Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. **Е.М. СКАРЖИНСКАЯ, д-р экон. наук**
(yelena.skarzhinsky@gmail.com)
(Костромской государственный университет),
В.И. ЦУРИКОВ, д-р экон. наук, канд. физ.-мат. наук
(tsurikov@inbox.ru)
(Костромская государственная сельскохозяйственная академия)

КООРДИНАЦИЯ КОЛЛЕКТИВНЫХ ДЕЙСТВИЙ С ПОМОЩЬЮ СТРАТЕГИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Статья посвящена теоретическому исследованию координации действий членов самоуправляемого коллектива с помощью стратегии Штакельберга, направленной на повышение их индивидуальных выигрышей. Предполагается, что коллектив создает совокупный доход, возрастающий с ростом усилий, прилагаемых каждым агентом, и подчиняющийся закону убывающей отдачи. Существующее в условиях полной автономии всех агентов единственное равновесие по Нэшу является неэффективным по Парето. Показано, что для перехода к Парето-предпочтительному исходу достаточно образования в коллективе малой группы (коалиции), члены которой доверяют друг другу и не склонны к оппортунистическому поведению. Следуя коалиционной стратегии, направленной на достижение максимума коалиционного выигрыша, члены коалиции увеличивают размеры своих усилий, что приводит к росту совокупного дохода. Найдены условия, при которых коалиция может использовать стратегию лидера по Штакельбергу. Показано, что равновесный по Штакельбергу исход доминирует по Парето над равновесными исходами Нэша как в бескоалиционной игре, так и в коалиционной.

Ключевые слова: коллективные действия, координация, равновесие по Нэшу, равновесие по Штакельбергу, эффективность по Парето, коалиция.

DOI: 10.31857/S0005231022070066, **EDN:** AEMECW

1. Введение

В статье исследуется деятельность самоуправляемого коллектива, создающего общий доход в результате приложения его членами индивидуальных усилий. Цель каждого агента состоит в максимизации собственного индивидуального выигрыша.

Главный источник проблем коллективных действий коренится в эгоистических устремлениях агентов, которые в условиях действия закона убывающей отдачи приводят к несовпадению индивидуальных оптимумов с коллективным. Следствием независимого выбора агентами объемов прилагаемых ими усилий является равновесие Нэша, которое достигается в неэффективном по Парето исходе, что наглядно иллюстрируется моделью, известной под названием «Дилемма заключенных» [1, 2]. Те же факторы создают проблему морального риска, описанную в модели Бенгта Хольмстрёма [3], а также в моделях неполного контракта Гроссмана–Харта–Мура [4, 5] и Тироля–Фуруботна–Рихтера [6, т. 1, с. 50–54; 7, с. 293–301]. Отметим, что в моделях неполного контракта рассматривается, как правило, взаимодействие только двух агентов, и поэтому многие проблемы коллективных действий в них просто не отражаются.

Предполагаем, что в коллективе как в большой группе агентов может сформироваться малая группа — коалиция, способная координировать усилия ее участников. Цель статьи заключается в исследовании возможности образования коалиции, использующей стратегию лидера по Штакельбергу, для повышения эффективности коллективной деятельности.

Напомним, что первоначально модели Курно [8] и Штакельберга [9] были разработаны для описания дуополии, но впоследствии они получили распространение на произвольное количество фирм [10, 11] и на многопродуктовые рынки [12]. Как известно, модель Штакельберга основана на отказе от симметрии, положенной в основу модели Курно. В модели Штакельберга предполагается, что одна из конкурирующих фирм играет роль лидера (leader), который делает первый шаг, а другая — роль последователя (follower). Последователь выбирает свою стратегию с учетом известной ему стратегии лидера, считая ее заданной. Предварительно лидер инкорпорирует известную ему кривую реагирования конкурента в свою функцию прибыли, в результате чего его прибыль становится функцией только им выбираемой стратегии, и ему остается только найти ту стратегию, при которой его прибыль достигает максимума.

Следует отметить работы [13, 14], в которых анализируются возможности достижения олигополией равновесия по Штакельбергу в случаях, когда агенты не располагают достоверной информацией относительно размеров предельных издержек конкурентов или их выбора. В модели олигополии М.И. Гераськина [15] исследуется зависимость выигрышей агентов в равновесии Штакельберга от вида функций издержек. В работах Ю.Б. Гермейера [16], М.А. Горелова [17], М.В. Губко и Д.А. Новикова [18] стратегия Штакельберга анализируется в рамках моделей иерархической системы типа Центр-агент. Система представляется двумя игроками, один из которых играет роль Центра, ограничивающего своим первым ходом множество возможных действий второго (пассивного) игрока. Задача решается, как правило, в общем виде, и в качестве одного из возможных вариантов анализируется стратегия Штакельберга. При этом выигрыш пассивного агента явно зависит только от его собственного выбора.

При распространении разработанной для олигополистического рынка модели Штакельберга на коллективные действия следует учитывать принципиальное различие между коллективом, целью деятельности которого является производство общего блага, и олигополией. В частности, для коллективных действий характерны отношения сотрудничества, а для олигополии — отношения конкуренции. Соответственно, каждый член коллектива заинтересован в высокой активности своих партнеров, в то время как любой фирме в условиях олигополии, напротив, выгодна низкая активность конкурентов.

В работе Д.А. Новикова [19] рассматривается класс задач о минимизации издержек коллектива, выполняющего работы в заданном объеме, при различных предположениях относительно иерархии представлений агентов о типах друг друга, объемах выполняемых работ, наличия или отсутствия управляющего центра и др. Задача данной статьи наряду с определенным сходством с задачами этого класса имеет и существенные отличия. В частности, здесь ищется не то оптимальное распределение объемов работ между членами коллектива, при котором минимизируются суммарные издержки, а стимулы для каждого агента повысить уровень своих усилий (а значит, и издержек) относительно объемов усилий, отвечающих равновесному по Нэшу исходу.

В рассматриваемой модели предполагается отсутствие какой-либо асимметрии в распределении информации, причем функции совокупного дохода и индивидуальных выигрышей, как и состав коалиции и стремление ее членов к максимуму коалиционного выигрыша, а каждого некооперированного агента к максимуму своего индивидуального выигрыша, являются общим знанием. Технология влияния одних агентов на выбор других вполне конкретна, лишена всяких элементов директивного (административного) управления и основывается исключительно на свойстве комплементарности усилий и общем знании агентов. Выигрыш любого агента явным образом зависит от выбора каждого члена коллектива.

В ранее вышедших работах авторов данной статьи показано, что в случае образования в коллективе коалиции, которая реализует стратегию, направленную на максимизацию коалиционного выигрыша, *достигается исход, доминирующий по Парето неэффективное равновесие Нэша, достигаемое в бескоалиционной игре* [20, 21]. Если функция дохода обеспечивает комплементарность усилий членов коллектива, т.е. свойство предельного дохода по усилиям агента увеличиваться с ростом усилий, прилагаемых другим агентом, то данный положительный эффект образуется не только за счет повышения равновесных значений усилий членов коалиции, но и благодаря увеличению усилий остальных агентов, не входящих в коалицию.

Указанная возможность, порождаемая положительной зависимостью между усилиями членов коллектива, уже подвергалась теоретическому исследованию. Например, в модели команды, состоящей из двух агентов, которую предложили S. Huck и P. Rey-Biel [22], полезность последователя растет по мере сокращения разрыва между осуществляемыми им и лидером объемами усилий. В работе Жерве и Гольдштейна [23] улучшение по Парето связывается с неадекватной оценкой одним из агентов собственных усилий, т.е. фактически с нерациональным поведением. В этих работах равновесие по Штакельбергу не достигается. В полной мере стратегия Штакельберга реализуется в модели коллектива, которую предложил J. Kim [24]. В его работе, в отличие от модели данной статьи, лидера фактически назначает принципал, который условиями контракта способен оказывать влияние на стимулы агента.

Важно подчеркнуть, что члены коалиции могут оказывать стимулирующее воздействие на размеры усилий некооперированных агентов только размерами своих собственных усилий и только тогда, когда некооперированные агенты выбирают размеры своих усилий на основе достоверной информации о значениях усилий членов коалиции [25]. В последовательной двухпериодной игре некооперированные агенты осуществляют свои усилия только после членов коалиции, и поэтому получают эту информацию непосредственно, наблюдая усилия членов коалиции. Следует заметить, что описание коллективных действий в рамках последовательной игры не всегда может быть адекватным. Например, если деятельность коллектива связана с технологическим процессом, требующим одновременного приложения усилий со стороны всех членов коллектива.

В случае одновременной игры некооперированные агенты могут получить информацию об усилиях, которые приложат члены коалиции, только на основе сообщения от самой коалиции или определенных предварительных действий коалиции, не оставляющих места для сомнений в ее намерениях. Общее знание относительно размеров усилий, которые члены коалиции осуществят в одновременной игре, является необходимым и достаточным для рациональных агентов условием успешной координации усилий [26]. При его выполнении коалиция может оптимизировать значения усилий своих членов, определяя их методом обратной индукции, т.е. применяя стратегию Штакельберга, с доведением до начала игры этой информации до некооперированных агентов.

Однако для достижения в одновременной игре того же исхода, который отвечает в двухпериодной игре равновесию по Штакельбергу, простой декларации коалиции о своих намерениях может оказаться недостаточно. Дело в том, что в одновременной игре, как будет показано дальше, коалиционный выигрыш достигает свой максимум при более низком значении усилий членов коалиции, чем в двухпериодной игре при одном и том же уровне усилий некооперированных агентов. Поэтому если хотя бы один из некооперированных агентов усомнится в намерении членов коалиции осуществить свои усилия в обещанном размере, то он осуществит свои усилия в размере, недостаточном для достижения равновесия по Штакельбергу. В результате не будет достигнут максимум не только коалиционного выигрыша, но и тех некооперированных агентов, которые поверят обещаниям коалиции и осуществят свои усилия в объемах, отвечающих равновесию по Штакельбергу. Так как этим знанием обладает каждый член коллектива, то тот исход, который отвечает в двухпериодной игре равновесию по Штакельбергу, в одновременной игре может оказаться недостижимым.

Избежать такого рода неопределенности коалиция может путем внесения залога или заключения соответствующего контракта, или же инвестирования в соответствующий специфический ресурс, лучшее альтернативное использование которого менее выгодно, чем осуществление усилий в обещанных объемах. В одновременной игре именно в этом действии фактически и состоит первый шаг коалиции, который необходим для надежного достижения исхода, совпадающего с равновесием по Штакельбергу в двухпериодной игре. Этот первый шаг в виде выполнения одного из перечисленных действий равносилен непосредственному наблюдению усилий членов коалиции.

В настоящей работе рассматривается общий случай несепарабельной функции дохода и линейной функции издержек. Будет показано, что положительная зависимость оптимальной стратегии каждого автономного агента от вкладов членов коалиции создает предпосылки для использования коалицией стратегии лидера по Штакельбергу. Для успешного осуществления этой стратегии члены коалиции должны быть уверены в том, что все остальные агенты следуют стратегии последователей, т.е. определяют свои оптимальные усилия как функции усилий членов коалиции. Результатом является равновесие Штакельберга, достигаемое в исходе, который доминирует не только над неэффективным равновесием Нэша в бескоалиционной игре, но и над равновесным исходом в игре, в которой коалиция выступает единым игроком, но не использует стратегию Штакельберга, а следует стратегии Курно.

2. Базовая модель

Обозначим через n число индивидов, составляющих коллектив, в котором путем осуществления индивидуальных усилий, где $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — их денежные эквиваленты, создается совокупный доход $D = D(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Считаем, что при всех $\sigma_i \in (0, \infty)$, где $i = 1, \dots, n$, выполняются следующие условия.

1. Величина дохода возрастает с ростом прилагаемых усилий:

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} > 0. \tag{1}$$

2. Для того чтобы функции выигрышей имели единственный максимум, функция дохода строго выпукла вверх. Из этого условия следует, что функция дохода удовлетворяет закону убывающей отдачи:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i^2} < 0. \tag{2}$$

3. Чтобы решение не уходило в нуль или бесконечность, выполняются условия:

$$\lim_{\sigma_i \to 0} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \infty, \quad \lim_{\sigma_i \to \infty} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 0. \tag{3}$$

4. Усилия каждого агента оказывают положительное влияние на величину предельного дохода по усилиям любого другого члена коллектива:

$$\frac{\partial^2 D}{\partial \sigma_i \partial \sigma_k} > 0 \quad \text{при} \quad i \neq k. \tag{4}$$

Будем считать, что функции дохода и выигрышей являются общим знанием для всех членов коллектива, а размеры приложенных усилий являются наблюдаемыми для них после их полного осуществления. На этапе ex ante в коллективе устанавливается правило распределения будущего ожидаемого совокупного дохода D, согласно которому агенту i принадлежит относительная доля α_i: $0 < \alpha_i < 1$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. В неструктурированном коллективе каждый индивид автономно выбирает объем прилагаемых им усилий, преследуя цель максимизации своего выигрыша

$$U_k = \alpha_k D(\sigma_k, \sigma_{-k}) - \sigma_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где σ_{-k} — значения усилий всех членов коллектива за исключением индивида k.

В [27] доказано, что в бескоалиционной игре, где выигрыши агентов задаются формулами (5), для любого набора α_k существует и притом единственное равновесие Нэша N, определяемое из условий максимума первого порядка для функций U_k, т.е. системой уравнений

$$\alpha_k \frac{\partial D}{\partial \sigma_k} = 1, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Используем следующие обозначения: σ_k^N с $k = 1, \ldots, n$ — решение системы (6); D^N — величина совокупного дохода; U^N — суммарный выигрыш всех членов коллектива, U_k^N — индивидуальный выигрыш агента k. В [27] показано, что этот равновесный исход не является эффективным по Парето, так как справа от него, т.е. при $\sigma_i > \sigma_i^N$ (если доинвестирование осуществляют не менее двух агентов), находятся Парето-предпочтительные состояния.

Каждому агенту выгодно, чтобы все остальные члены коллектива увеличили прилагаемые ими усилия сверх равновесного уровня, определяемого системой (6), но при этом *ему самому невыгодно* (в силу закона убывающей отдачи) подобное повышение объема собственных усилий. Поэтому рациональный агент увеличит свои усилия только в случае, когда он уверен, что хотя бы один из его партнеров поступит так же. Иными словами, для достижения любого Парето-предпочтительного исхода необходима координация усилий хотя бы двух членов коллектива. Следовательно, при условии автономности всех членов коллектива переход от равновесия Нэша к любому доминирующему над ним исходу противоречит принципу индивидуальной рациональности. Таким образом, неструктурированный коллектив, состоящий из автономных эгоистических агентов, обречен находиться в ловушке неэффективного равновесия Нэша[1].

---

[1] Этот вывод полностью совпадает с выводом, полученным в работе Хольмстрема [3], в модели «дилемма заключенных», в моделях неполного контракта [4–7].

Важной характеристикой коллективных действий является существование исхода, соответствующего общественному оптимуму. Здесь, как и в экономической теории контрактов, общественный оптимум определяется как исход, в котором максимальное значение достигается совокупным выигрышем всего коллектива, равным разности общего дохода и суммы издержек всех членов коллектива:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = D - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i. \tag{7}$$

Условия максимума первого порядка для функции U имеют вид системы уравнений

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = 1, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Используем следующие обозначения: σ_k^P с $k = 1, \dots, n$ — решение системы (8); D^P — величина соответствующего совокупного дохода; U^P — величина суммарного выигрыша всех членов коллектива; U_k^P — величина индивидуального выигрыша агента k.

Данный исход игры, который обозначим через P, будет Парето-оптимальным[2] при осуществлении в коллективе распределения совокупного дохода, отвечающего следующим условиям:

$$U_k^P \geq U_k^N, \quad \text{где} \quad k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Так как согласно условиям (1)–(2) $U^P = \sum_{k=1}^{n} U_k^P > \sum_{k=1}^{n} U_k^N = U^N$, то существует такое распределение дохода между членами коллектива, при котором общественно оптимальный исход будет Парето-оптимальным.

3. Стимулирующее воздействие коалиционной стратегии

Теперь покажем, что образование в коллективе коалиции и осуществление коалиционной стратегии, дает возможность для преодоления равновесия Нэша. Предположим, что в коллективе образовалась коалиция, члены которой способны координировать значения своих усилий в целях достижения максимума коалиционного выигрыша. Вопросы образования и устойчивости коалиции представляют отдельную проблему, частично рассмотренную авторами в [28], и поэтому здесь не затрагиваются. Здесь будем предполагать, что координация между членами коалиции основана на отношениях доверия, так как именно в этом случае минимальны трансакционные издержки

[2] Чтобы убедиться, что в исходе P суммарный выигрыш U выше, чем в исходе N, достаточно обратиться к градиенту функции U. В точке равновесия Нэша N каждая координата $\mathrm{grad} U$ больше нуля, откуда следует, что функция U достигает более высоких значений при уровнях усилий, превышающих равновесные.

координации. Кроме того, полагаем, что стремление коалиции к максимуму коалиционного выигрыша является общим знанием.

Обозначим коалицию через C. Некооперированные агенты (не вошедшие в коалицию) образуют множество NC. Используем следующие обозначения: $[\sigma_i]$ с $i \in C$ — кортеж значений усилий членов коалиции; $[\sigma_j]$ с $j \in NC$ — кортеж значений усилий некооперированных агентов; $\alpha_C = \sum_{i \in C} \alpha_i$ — относительная доля коалиции в общем доходе D. Выражение для коалиционного выигрыша запишем в виде

$$U_C = \alpha_C D([\sigma_i], [\sigma_j]) - \sum_{i \in C} \sigma_i, \quad i \in C, \quad j \in NC. \tag{10}$$

Значения усилий членов коалиции, при которых их совокупный выигрыш достигает максимума, определяется системой уравнений

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{\alpha_C}, \quad i \in C. \tag{11}$$

Некооперированные агенты выбирают объемы своих усилий из условий максимума собственных индивидуальных выигрышей, т.е. из уравнений, аналогичных (6):

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{\alpha_j}, \quad j \in NC. \tag{12}$$

Игра, сложившаяся в результате образования коалиции C, отличается от первоначальной бескоалиционной игры тем, что в ней наряду с автономными (некооперированными) игроками $j \in NC$ участвует один агрегированный игрок в лице коалиции C. Совокупность систем уравнений (11) и (12) имеет единственное решение и, соответственно, новая игра имеет единственный равновесный исход, который обозначим через $\hat{C}$. Значения усилий агентов в этом исходе обозначим как $\sigma_i^{\hat{C}}$ и $\sigma_j^{\hat{C}}$, $i \in C$, $j \in NC$, величину совокупного дохода — как $D^{\hat{C}}$, значения выигрыша коалиции — как $U_C^{\hat{C}}$, агентов — как $U_i^{\hat{C}}$ и $U_j^{\hat{C}}$.

Покажем, что исход $\hat{C}$ доминирует по Парето над исходом N и в нем справедливы следующие неравенства:

$$\sigma_i^{\hat{C}} > \sigma_i^N, \quad i \in C; \quad \sigma_j^{\hat{C}} > \sigma_j^N, \quad j \in NC; \tag{13}$$

$$U_j^{\hat{C}} > U_j^N, \quad j \in NC; \quad U_C^{\hat{C}} > U_C^N = \sum_{i \in C} U_i^N. \tag{14}$$

Сравним совместное решение систем (11) и (12), определяющее исход $\hat{C}$, с решением системы (6), определяющим исход N. Можно считать, что система (11)–(12) образована из системы (6) путем замены в правых частях уравнений с $i \in C$ величин α_i на превышающую их величину $\alpha_C = \sum_{i \in C} \alpha_i$. Так как решение системы (6) согласно (2) положительно зависит от значений α_k, то эта замена приводит к более высоким значениям σ_i, отвечающим решению систем (11)–(12)[3].

Левые части уравнений (12) являются функциями усилий σ_j некооперированных агентов и усилий σ_i членов коалиции. При любых фиксированных значениях σ_i система (12) имеет единственное решение относительно переменных σ_j с $j \in NC$, определяющее значения этих величин в виде функций переменных σ_i с $i \in C$. Обозначим эти решения как

$$\sigma_j = R_j([\sigma_i]), \quad i \in C, \quad j \in NC. \tag{15}$$

Функции (15) представляют собой *функции реагирования* некооперированных агентов на известные им значения усилий членов коалиции. В силу неравенств (4) левые части уравнений (12) являются возрастающими функциями переменных σ_i с $i \in C$. Следовательно, решения этих уравнений, т.е. функции реагирования $\sigma_j = R_j([\sigma_i])$, также возрастают по всем переменным σ_i с $i \in C$.

Из неравенств (13) согласно условию (1) следует, что $D^{\hat{C}} > D^N$. Так как каждая функция выигрыша (и U_j, и U_C) имеет единственный максимум, то их максимумы в исходе $\hat{C}$ превышают соответствующие максимумы, достигаемые в исходе N, т.е. неравенства (14) справедливы. Можно полагать, что отношения взаимного доверия, связывающие членов коалиции, способны обеспечить бесконфликтное распределение между ними коалиционного выигрыша в целях обеспечения условий индивидуальной рациональности для всех членов коалиции, и поэтому неравенство $U_C^{\hat{C}} > U_C^N$ совместимо с неравенствами

$$U_i^{\hat{C}} > U_i^N, \quad i \in C. \tag{16}$$

Таким образом, *реализация коалиционной стратегии приводит к исходу, доминирующему по Парето над равновесием Нэша, достигаемому в бескоалиционной игре.*

4. Стратегия Штакельберга

В модели олигополистического рынка Штакельберга предполагается, что лидер осуществляет первый ход: он либо первым осуществляет свою стратегию (например, выпускает продукцию в определенном объеме), либо демонстративно производит безвозвратные инвестиции, убеждающие конкурентов в том, что лидер выбрал определенную стратегию. Только при этом условии конкуренты поверят в его выбор и будут учитывать его при выборе своих оптимальных стратегий.

[3] Строгое доказательство теоремы о возрастании всех переменных, образующих решение системы (6), при уменьшении значения хотя бы одного из параметров, представляющих собой ее правые части, приводится в [25].

В модели данной статьи предполагается, что коалиция, как уже было сказано выше, своим первым ходом убедила некооперированных агентов в том, что члены коалиции произведут усилия в объемах $[\sigma_i]$, $i \in C$. До начала игры коалиция находит из уравнений (12) функции реагирования $\sigma_j = R_j([\sigma_i])$. Совокупность этих функций определяет в пространстве значений σ_k $(k = 1, \ldots, n)$ поверхность реагирования, в каждой точке которой выполняются условия максимума выигрышей некооперированных агентов (12). На поверхности реагирования величина совокупного дохода является функцией соответствующих усилий членов коалиции:

$$D\left([\sigma_i], R_j([\sigma_i])\right), \quad i \in C, \quad j \in NC. \tag{17}$$

Таким образом, коалиция как лидер по Штакельбергу инкорпорирует функции реагирования некооперированных агентов в свою функцию чистого дохода, которая принимает следующий вид:

$$U_C = \alpha_C D\left([\sigma_i], R_j([\sigma_i])\right) - \sum_{i \in C} \sigma_i \tag{18}$$

с условиями максимума в виде

$$\alpha_C D'_{\sigma_i} - 1 = 0, \quad i \in C, \tag{19}$$

где D'_{σ_i} — полная производная по σ_i от функции (18), взятая на поверхности реагирования:

$$D'_{\sigma_i} = \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{j \in NC} \frac{\partial D}{\partial \sigma_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i}, \quad i \in C. \tag{20}$$

С учетом (12) выражения для производных (20) принимают вид

$$D'_{\sigma_i} = \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{j \in NC} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i}. \tag{21}$$

С учетом (21) уравнения (19) преобразуются к виду

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{j \in NC} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i} = \frac{1}{\alpha_C}, \quad i \in C. \tag{22}$$

Обозначим исход игры, соответствующий решению Штакельберга, как $\hat{S}$, значения усилий членов коалиции в этом исходе как — $\sigma_i^{\hat{S}}$ с $i \in C$ и $\sigma_j^{\hat{S}}$ с $j \in NC$, величину совокупного дохода — как $D^{\hat{S}}$, значения выигрышей коалиции — как $U_C^{\hat{S}}$, агентов — как $U_i^{\hat{S}}$ и $U_j^{\hat{S}}$. Сравним результаты исходов $\hat{S}$ и $\hat{C}$.

В силу уравнений (12) исход $\hat{C}$ так же, как исход $\hat{S}$, соответствует точке на поверхности реагирования. Следовательно, и доход D, и предельные доходы $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}$ являются функциями переменных σ_i, $i \in C$. Обозначим значение предельного дохода $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}$ в точке $[\sigma_i^{\hat{S}}]$ как $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{S})$, а в точке $[\sigma_i^{\hat{C}}]$ как $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{C})$. Тогда согласно уравнениям (11) уравнения (22) можно записать в виде

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{S}) + \sum_{j \in NC} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{C}), \quad i \in C. \tag{23}$$

Так как функции $R_j([\sigma_i])$ возрастают по всем переменным, то из (23) следуют неравенства

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{S}) < \frac{\partial D}{\partial \sigma_i}(\hat{C}), \quad i \in C, \tag{24}$$

откуда согласно условиям (2) вытекают неравенства

$$\sigma_i^{\hat{S}} > \sigma_i^{\hat{C}}. \tag{25}$$

Из (25) и возрастания $R_j([\sigma_i])$ следуют неравенства

$$\sigma_j^{\hat{S}} > \sigma_j^{\hat{C}}, \quad j \in NC. \tag{26}$$

Таким образом, можно сформулировать 1-й вывод. При переходе от исхода $\hat{C}$ — единственного равновесия Нэша в игре, в которой коалиция C и некооперированные агенты максимизируют свои чистые доходы исходя из симметричных ожиданий в отношении всех остальных игроков, к исходу $\hat{S}$, достигаемому в случае, когда коалиция C применяет стратегию лидера по Штакельбергу, возрастают значения усилий всех игроков — как членов коалиции, так и некооперированных агентов.

Сравним значения чистого дохода коалиции в исходах $\hat{S}$ и $\hat{C}$. Если коалиция применяет стратегию Штакельберга, то это означает, что она максимизирует свой выигрыш U_C на поверхности реагирования, заданной уравнениями (15). Значит, уравнения (22) определяют точку максимума чистого дохода коалиции на поверхности реагирования, соответствующую исходу $\hat{S}$. Точка, соответствующая исходу $\hat{C}$, также лежит на поверхности реагирования, но ее координаты согласно неравенствам (25) и (26) не совпадают с координатами максимума функции U_C на поверхности реагирования. Следовательно, в силу единственности максимума справедливо неравенство

$$U_C^{\hat{S}} > U_C^{\hat{C}}. \tag{27}$$

Так как согласно введенному ранее предположению члены коалиции способны произвести между собой пропорциональный дележ общего выигрыша коалиции, то из (27) следуют неравенства

$$U_i^{\hat{S}} > U_i^{\hat{C}}, \quad i \in C. \tag{28}$$

Сравним выигрыши некооперированных агентов в исходах $\hat{S}$ и $\hat{C}$. На поверхности реагирования функции чистого дохода некооперированных агентов имеют вид:

$$U_j = \alpha_j D\left([\sigma_i], R_j([\sigma_i])\right) - R_j([\sigma_i]), \quad i \in C, \quad j \in NC. \tag{29}$$

Обратимся к производной $(U_j)'_{\sigma_i} = \alpha_j D'_{\sigma_i} - (R_j)'_{\sigma_i}$, которая с учетом (21) принимает вид

$$(U_j)'_{\sigma_i} = \alpha_j \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} + \sum_{\substack{k \in NC, \\ k \neq j}} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \frac{\partial R_k}{\partial \sigma_i}, \quad i \in C, \quad j \in NC. \tag{30}$$

Все слагаемые в правой части (30) положительны для любого $j \in NC$, следовательно, $(U_j)'_{\sigma_i} > 0$.

Таким образом, приходим ко 2-му выводу. Если коалиция C занимает позицию лидера по Штакельбергу, а все некооперированные агенты занимают позиции последователей, то выигрыши всех некооперированных агентов возрастают на поверхности реагирования по всем независимым переменным σ_i. Соответственно, из (25) следует

$$U_j^{\hat{S}} > U_j^{\hat{C}}, \quad j \in NC. \tag{31}$$

Неравенства (28) и (31) позволяют сделать 3-й вывод. Исход $\hat{S}$ — равновесие в игре, в которой коалиция C занимает позицию лидера по Штакельбергу, а все некооперированные агенты занимают позиции последователей, доминирует по Парето над исходом $\hat{C}$ — равновесием Нэша в игре, в которой коалиция C и некооперированные агенты максимизируют свои выигрыши исходя из симметричных ожиданий в отношении всех остальных игроков.

Теперь обратимся к рассмотрению причины, в силу которой коалиции в одновременной игре необходимо послать предварительный информационный сигнал, способный полностью убедить некооперированных агентов в том, что все члены коалиции осуществят свои усилия в объемах $\sigma_i^{\hat{S}}$, $i \in C$. Если коллективу предстоит последовательная игра, в которой некооперированные агенты прилагают свои усилия только после членов коалиции, то коалиция находит объемы усилий своих членов в результате решения задачи на отыскание *условного максимума* своей функции выигрыша (18) при условии (19). Соответствующая система уравнений принимает вид (22) с решением: $\sigma_i = \sigma_i^{\hat{S}}$ и $\sigma_j = \sigma_j^{\hat{S}}$, $i \in C$, $j \in NC$. И в этом случае никому из агентов невыгодно отклоняться в своем выборе от этого решения.

В одновременной игре коалиция выбирает уровень усилий своих членов исходя из предположения, что все некооперированные агенты непременно осуществят свои усилия в объемах $\sigma_j^{\hat{S}}$. В этом случае она решает задачу отыскания *безусловного максимума* и находит уровень усилий своих членов из уравнений (11) при $\sigma_j = \sigma_j^{\hat{S}}$, $j \in NC$. Из сравнения (22) и (11) видно, что значения частных производных $\frac{\partial D}{\partial \sigma_i}$ в уравнениях (22) ниже, чем в уравнениях (11). Это означает, что значения $\sigma_i^{\hat{S}}$, являющиеся решениями уравнений (22), превышают значения σ_i, являющиеся решениями уравнений (11), хотя в решениях обеих систем размеры усилий некооперированных агентов совпадают. Именно поэтому в одновременной игре всем членам коалиции, если они уверены в том, что все некооперированные агенты непременно осуществят свои усилия в размере $\sigma_j = \sigma_j^{\hat{S}}$, выгодно осуществить свои усилия в объемах ниже, чем в первом периоде последовательной игры. Соответственно, для достижения в одновременной игре того же исхода, который достигается в последовательной игре в результате стратегии Штакельберга, коалиция и вынуждена сделать соответствующий первый шаг, убеждающий всех некооперированных агентов, что ее члены осуществят усилия в объемах $\sigma_i^{\hat{S}}$.

5. Заключение

На основе представленных выше моделей приходим к следующим выводам.

1. Если в коллективе образуется малая группа (коалиция), члены которой стремятся к увеличению коалиционного выигрыша, то коллектив способен выбраться из ловушки неэффективного равновесия Нэша, в которую попадает неструктурированный коллектив. Следствием коалиционной стратегии является повышение индивидуальных выигрышей всех членов коллектива относительно их значений в равновесии Нэша, достигаемого в бескоалиционной игре.

2. Если размеры предельных доходов некооперированных членов коллектива возрастают с увеличением усилий членов коалиции, то коалиционная стратегия оказывает стимулирующее воздействие на некооперированных агентов, в результате которого объем прилагаемых ими усилий также увеличивается. Существование такой зависимости составляет необходимую предпосылку для реализации стратегии, разработанной Штакельбергом в модели дуополии.

3. Инкорпорирование коалицией функций реагирования некооперированных агентов в свою функцию чистого дохода создает возможность для достижения коллективом нового равновесия $\hat{S}$, доминирующего по Парето над равновесием $\hat{C}$, достигаемым в той коалиционной игре, в которой коалиция и некооперативные агенты независимо друг от друга максимизируют свои выигрыши.

4. Достижение равновесного по Штакельбергу исхода $\hat{S}$ возможно только при условии существования определенных взаимных ожиданий со стороны как членов коалиции, так и некооперированных агентов. Эти ожидания должны исходить из общего знания о функциях выигрыша, наличии коалиции, ее составе и объемах усилий, которые обязуются осуществить ее члены.

5. При выполнении принятых в данной модели предположений иерархическая структура коллектива, в которой коалиция занимает положение лидера

по Штакельбергу, оказывается более эффективной, чем неиерархическая коалиционная структура.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим демонстрационный пример полученных выше результатов. Пусть функция совокупного дохода имеет вид

$$D = \lambda \prod_{i=1}^{n} \sigma_i^a, \tag{П.1}$$

где $\lambda > 0$, $0 < a < 1/n$. Функция (П.1) удовлетворяет всем условиям (1)–(4). Считаем, что все члены коллектива имеют равные доли в доходе: $\alpha_i = 1/n$.

1. Сначала рассмотрим бескоалиционную игру, в которой каждый член коллектива стремится к максимуму своего индивидуального выигрыша:

$$U_i = \lambda/n \prod_{j=1}^{n} \sigma_j^a - \sigma_i \to \max_{\sigma_i > 0}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{П.2}$$

Так как функция дохода (П.1) удовлетворяет условиям постоянной эластичности

$$\frac{\sigma_i}{D} \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = a, \tag{П.3}$$

то условия максимума (8) индивидуального выигрыша (П.2) можно записать в виде:

$$\sigma_i = \frac{aD}{n}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{П.4}$$

Подставив выражения для усилий (П.4) в (П.1), получим уравнение относительно D, из которого найдем величину совокупного дохода в равновесии Нэша:

$$D^N = \left(\lambda \left(a/n\right)^{an}\right)^{1/(1-an)}. \tag{П.5}$$

Используя (П.5), (П.4) и (П.2), найдем значения усилий и выигрышей:

$$\sigma_i^N = aD^N/n; \quad U_i^N = D^N(1-a)/n; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{П.6}$$

Для $\lambda = 12 \cdot 10^3$, $n = 100$, $a = 1/120$ получим:

$$\begin{gathered} D^N = \left(12 \cdot 10^3 \left(\frac{0{,}01}{120}\right)^{5/6}\right)^6 = 12 \cdot 10^3; \\ \sigma_i^N = 1{,}0; \quad U_i^N = 119; \quad i = 1, \ldots, 100. \end{gathered} \tag{П.7}$$

2. Обратимся к рассмотрению коалиционной игры. Пусть коалиция состоит из первых m членов коллектива. Уравнение (10) для усилий члена коалиции можно записать в виде

$$\sigma_i = \frac{am}{n} D, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{П.8}$$

а уравнение (11) для усилий некооперированных агентов — в виде

$$\sigma_j = \frac{aD}{n}, \quad j = m+1, \ldots, n. \tag{П.9}$$

Подставив выражения для усилий из (П.8) и (П.9) в функцию дохода $D = \lambda \prod_{i=1}^{m} \sigma_i^a \prod_{j=m+1}^{n} \sigma_j^a$, получим уравнение относительно D:

$$D = \lambda (a/n)^{an} m^{am} (D)^{an},$$

из которого найдем выражение для значения совокупного дохода в равновесном исходе $\hat{C}$:

$$D^{\hat{C}} = \left(\lambda (a/n)^{an} m^{am}\right)^{\frac{1}{1-an}}. \tag{П.10}$$

Используя (П.8), (П.9) и (П.10), получим выражения для размеров усилий:

$$\begin{aligned} \sigma_i^{\hat{C}} &= (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-an}} m^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}}, \quad i \in 1, \ldots, m; \\ \sigma_j^{\hat{C}} &= (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-an}} m^{\frac{am}{1-an}}, \quad j = m+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{П.11}$$

Используя (П.2), (П.10) и (П.11), получим выражения для значений индивидуальных выигрышей:

$$U_i^{\hat{C}} = D^{\hat{C}} (1 - am)/n; \quad U_j^{\hat{C}} = D^{\hat{C}} (1-a)/n. \tag{П.12}$$

Для $n = 100$, $a = 1/120$, $m = 10$ найдем отношения значений параметров в исходах $\hat{C}$ и N.

$$\begin{aligned} \frac{D^{\hat{C}}}{D^N} &= m^{\frac{am}{1-an}} = \sqrt{10}; \\ \frac{\sigma_i^{\hat{C}}}{\sigma_i^N} &= m^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}} = 10 \cdot \sqrt{10}; \\ \frac{\sigma_j^{\hat{C}}}{\sigma_j^N} &= m^{\frac{am}{1-an}} = \sqrt{10}; \end{aligned} \tag{П.13}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{\hat{C}}}{U_i^N} &= \frac{D^{\hat{C}}(1-am)}{D^N(1-a)} = \sqrt{10} \cdot \frac{110}{119} \approx 2{,}9; \\ \frac{U_j^{\hat{C}}}{U_j^N} &= \frac{D^{\hat{C}}}{D^N} = \sqrt{10} \approx 3{,}2; \qquad i \in 1, \ldots, m, \quad j = m+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{П.14}$$

Как видим, переход от равновесия N к равновесию $\hat{C}$ приводит к возрастанию индивидуальных выигрышей всех членов коллектива.

3. Предположим, что коалиция C заняла позицию лидера по Штакельбергу, а некооперированные агенты — позиции последователей. Из (П.9) следует $aD = n\sigma_j$ с $j \in NC$. Подставив в (П.1) вытекающее отсюда выражение для D, получим уравнение относительно σ_j, решив которое найдем значения усилий некооперированных агентов как функции усилий членов коалиции, т.е. получим функции реагирования

$$\text{(П.15)} \qquad \sigma_j = R_j([\sigma_i]) = (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} \prod_{k=1}^{m} \sigma_k^{\frac{a}{1-a(n-m)}}, \quad j \in NC.$$

Частные производные от этих функций с учетом идентичности агентов можно записать в виде

$$\text{(П.16)} \qquad \frac{\partial R_j}{\partial \sigma_i} = \frac{a}{1-a(n-m)} (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} \sigma_k^{\frac{an-1}{1-a(n-m)}}, \quad j \in NC, \quad k, i \in C.$$

Частные производные от функции дохода по переменным σ_i найдем из уравнений (П.3) и (П.1):

$$\text{(П.17)} \qquad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = \frac{aD}{\sigma_i} = a\lambda \sigma_i^{am-1} \sigma_j^{a(n-m)}, \quad j \in NC, \quad i \in C.$$

Подставив в (П.17) выражения для σ_j из (П.15), с учетом идентичности агентов получим

$$\text{(П.18)} \qquad \frac{\partial D}{\partial \sigma_i} = (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} n \sigma_i^{\frac{an-1}{1-a(n-m)}}, \quad i \in C.$$

Выражения для производных из (П.16) и (П.18) подставим в уравнения (22). В результате преобразования соответствующего уравнения получим

$$\text{(П.19)} \qquad \frac{1}{\alpha_C} = \frac{1}{1-a(n-m)} \cdot (\lambda a/n)^{\frac{1}{1-a(n-m)}} \cdot n \cdot \sigma_i^{\frac{an-1}{1-a(n-m)}}, \quad i \in C.$$

Разрешив уравнение (П.19) относительно σ_i, найдем выражения для объемов усилий членов коалиции в исходе $\hat{S}$:

$$\text{(П.20)} \qquad \sigma_i^{\hat{S}} = \left(\frac{\lambda a}{n}\right)^{\frac{1}{1-an}} \left(\frac{m}{1-a(n-m)}\right)^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}}.$$

Используя (П.20) и (П.11), получим выражение для отношения размеров усилий членов коалиции в исходах $\hat{S}$ и $\hat{C}$:

$$\text{(П.21)} \qquad \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_i^{\hat{C}}} = \left(\frac{1}{1-a(n-m)}\right)^{\frac{1-a(n-m)}{1-an}}, \quad i \in C.$$

Из уравнения (12), свойства (П.3) и вида функции (П.1) следует:

$$\text{(П.22)} \qquad \sigma_j^{\hat{S}} = \frac{aD^S}{n} = \frac{\lambda a}{n}\left(\sigma_i^{\hat{S}}\right)^{am}\left(\sigma_j^{\hat{S}}\right)^{a(n-m)}, \quad j \in NC.$$

Подставив в правую часть (П.22) выражение для $\sigma_i^{\hat{S}}$ из (П.20), получим уравнение относительно $\sigma_j^{\hat{S}}$, решив которое найдем:

$$\text{(П.23)} \qquad \sigma_j^{\hat{S}} = \left(\frac{\lambda a}{n}\right)^{\frac{1}{1-an}}\left(\frac{m}{1-a(n-m)}\right)^{\frac{am}{1-an}}.$$

Из (П.20) и (П.23) следует выражение для отношения усилий члена коалиции и некооперированного агента:

$$\text{(П.24)} \qquad \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{S}}} = \frac{m}{1-a(n-m)}, \quad i \in C, \quad j \in NC.$$

Для случая, когда $n = 100$, $a = 1/120$, $m = 10$, из (П.21) и (П.24) следует: $\sigma_i^{\hat{S}}/\sigma_i^{\hat{C}} = 4^{1,5} = 8$, $\sigma_i^{\hat{S}}/\sigma_j^{\hat{S}} = 40$. Так как $U_j = \frac{1}{n}D - \sigma_j = \frac{\sigma_j}{a} - \sigma_j = \sigma_j\frac{1-a}{a}$, то с учетом (П.9) и (П.22) получим:

$$\frac{D^{\hat{S}}}{D^{\hat{C}}} = \frac{U_j^{\hat{S}}}{U_j^{\hat{C}}} = \frac{\sigma_j^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{C}}} = \left(\frac{1}{1-a(n-m)}\right)^{\frac{am}{1-an}} = \left(\frac{120}{30}\right)^{\frac{1}{2}} = 2, \quad j \in NC.$$

Так как $U_i^{\hat{S}} = U_j^{\hat{S}} + \sigma_j^{\hat{S}} - \sigma_i^{\hat{S}} = \sigma_j^{\hat{S}}\left(\frac{1-a}{a} + 1\right) - \sigma_i^{\hat{S}} = \sigma_j^{\hat{S}}\left(\frac{1}{a} - \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{S}}}\right)$, то с учетом (П.12) и (П.9), получим $\frac{U_i^{\hat{S}}}{U_i^{\hat{C}}} = \frac{a\sigma_j^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{C}}(1-am)}\left(\frac{1}{a} - \frac{\sigma_i^{\hat{S}}}{\sigma_j^{\hat{S}}}\right) = \frac{16}{11} \approx 1{,}45$.

Таким образом, в результате перехода от исхода $\hat{C}$ к равновесному по Штакельбергу исходу $\hat{S}$ некооперированные агенты увеличивают свои усилия в 2 раза, члены коалиции — в 8 раз. Выигрыши некооперированных агентов увеличиваются в 2 раза, а выигрыши членов коалиции возрастает на 45%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Остром Э.* Управляя общим: эволюция институтов коллективной деятельности. М.: ИРИСЭН, 2011.
2. *Капелюшников Р.И.* Множественность институциональных миров: Нобелевская премия по экономике-2009: Препринт WP3/2010/02 (Часть 1). М.: ГУ-ВШЭ, 2010.
3. *Holmstrom B.* Moral Hazard in Teams // The Bell J. Econom. 1982. V. 13. No. 2. P. 324–340.
4. *Grossman S., Hart O.* The Cost and Benefits of Ownership: A Theory of Vertical and Lateral Integration // J. Polit. Econom. 1986. V. 94. No. 4. P. 691–719.

5. *Hart O.D., Moore J.* Incomplete Contracts and Renegotiation // Econometrica. 1988. V. 56. No. 4. P. 755–785.
6. *Тироль Ж.* Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности. В 2-х т, т. 1. СПб.: Экономическая школа, 2000.
7. *Фуруботн Э.Г., Рихтер Р.* Институты и экономическая теория: Достижения новой институциональной экономической теории. СПб.: Издательский Дом СПбГУ, 2005.
8. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
9. *Stackelberg H.* Marktform und Gleichgewicht. 1934. Wien; placeStateBerlin: J. Springer.
10. *Anderson S., Engers M.* Stacelberg Versus Cournot Oligopoly Equilibrium // Int. J. Indust. Organizat. 1992. V. 10. No. 1. P. 127–135.
11. *Julien L.* Stakcelberg Games. In Handbook of Game Theory and Industial Organisation. 2018. V. 1. Chap. 10. P. 261–311.
12. *Nocke V., Shutz N.* (2018). Multiproduct-Firm Oligopoly: An Aggregative Games Approach // Econometrica. V. 86. No. 2. P. 523–557.
13. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 7. С. 91–105.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.
15. *Герасъкин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // АиТ. 2020. № 9. С. 120–143.

    Geraskin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: a Linearization Based Approach // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1659–1678.
16. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
17. *Горелов М.А.* Модель управления ограничениями деятельности // Проблемы управления. 2019. № 4. С. 43–49.
18. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2005.
19. *Новиков Д.А.* Математические модели формирования и функционирования команд. М.: Издательство физико-математической литературы, 2008.
20. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Модель коллективных действий. Часть 1. Равновесие, справедливость, эффективность // Экономика и математические методы. 2017. № 2. С. 118–133.
21. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Модель коллективных действий. Часть 2. Лидирующая коалиция // Экономика и математические методы. 2017. № 4. С. 89–104.
22. *Huck S., Rey-Biel P.* Endogenous Leadership in Teams // J. Institut. Theoret. Econom. 2006. V. 162. No. 2. P. 253–261.

23. *Gervais S., Goldstein I.* The Positive Effects of Biased Self-Perceptions in Firms // Review of Finance. 2007. V. 11. No. 3. P. 453–496.
24. *Kim J.* Endogenous Leadership in incentive Contracts // J. Econom. Behavior Organizat. 2012. V. 82. No. 1. P. 256–266.
25. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // Экономика и математические методы. 2020. № 4. С. 103–115.
26. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Эндогенное формирование в команде лидерства по Штакельбергу. Эффект образования коалиции // Журн. Новой экономической ассоциации. 2021. № 1 (49). С. 53–79.
27. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Экономико-математический анализ эффективности принципа «От каждого – по способностям, каждому – по труду» // Журн. экономической теории. 2017. № 2. С. 110–122.
28. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* Моделирование коллективных действий: значимость кооперативных соглашений // Российский журнал менеджмента. 2019. № 3. С. 337–366.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 14.11.2021

После доработки 04.03.2022

Принята к публикации 31.03.2022