Автоматика и телемеханика, № 7, 2022

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. **А.П. НЕЛЮБИН**, канд. физ.-мат. наук (nelubin@gmail.com)
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва),
В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р техн. наук (podinovski@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва)

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ПО ВАЖНОСТИ ГРУППАМИ КРИТЕРИЕВ[1]

Разработана постановка задачи принятия решений при наличии информации о важности групп критериев: введены определения отношения важности групп критериев и коэффициентов важности, введены отношения предпочтения на основе такой информации. Указаны способы проверки непротиворечивости информации о важности, указаны пути построения введенных отношений предпочтения. Раскрыта взаимосвязь качественной важности и качественной вероятности.

Ключевые слова: многокритериальные задачи принятия решений, упорядочение критериев по важности, теория важности критериев.

DOI: 10.31857/S0005231022070078, **EDN:** AETZTG

1. Введение

Принципиальным недостатком известных методов анализа многокритериальных задач принятия решений, использующих оценки важности критериев, является то, что само понятие важности критериев формально не определяется и полагается, что человек будет исходить из своего интуитивного понимания, что такое важность [1, 2]. Поэтому для оценивания коэффициентов важности человеку предлагается отвечать на "лобовые" вопросы типа "Во сколько раз один из критериев важнее другого?" или "Какая доля общей важности всех критериев приходится на рассматриваемый критерий?". Проблема состоит в том, что невозможно установить точный смысл, вкладываемый конкретным человеком в ответы на указанные вопросы [3], а потому и нельзя корректно использовать такую информацию о важности для анализа решений и выработки обоснованных рекомендаций.

В России была создана и продолжает активно развиваться математическая теория важности критериев — ТВК (историю и библиографию см. в [4]). Она

[1] Исследования финансировались в рамках Государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

опирается на строгие определения понятий равенства критериев в важности и превосходства в важности одного критерия над другим (качественная важность) и превосходства в важности одного критерия над другим в h раз (количественная важность). В этой теории созданы корректные методы получения информации о важности критериев и разработаны решающие правила, задающие отношения предпочтения на основе качественной или же количественной информации о важности критериев с учетом информации об изменении предпочтений вдоль их шкалы.

Хотя определения равенства и превосходства в важности для групп, или (под)множеств критериев, были даны еще в [5], почти во всех работах по ТВК рассматривались только такие многокритериальные задачи, в которых информация о важности касалась лишь отдельных критериев. Исключение составляют несколько публикаций, однако в них изучались только отдельные частные случаи специфических групп критериев. Так, в [6] рассматривались задачи с несколькими упорядоченными по важности, но попарно непересекающимися группами критериев. В [7] рассматривались равноважные группы, состоящие из равноважных критериев. В публикации [8], продолжающей [7], введено определение понятия степени превосходства в важности одной из групп критериев над другой. Публикации [9, 10] посвящены задачам с иерархической критериальной структурой, в которой в роли групп критериев выступают критерии более высоких уровней иерархии по отношению к критериям нижнего уровня. Другие работы, помимо перечисленных выше, которые выполнены в рамках теории важности критериев, авторам неизвестны. Сложившееся состояние ТВК можно объяснить сложностью анализа задач, в которых имеются упорядоченные по важности группы критериев, хотя актуальность исследований таких задач, часто встречающихся на практике, несомненна.

В настоящей статье рассмотрены вопросы анализа непротиворечивости качественной информации о важности групп критериев, получения и обработки такой информации и построения на ее основе решающих правил, позволяющих сравнивать варианты решений по предпочтительности. При этом используется аналогия с качественной вероятностью.

2. Математическая модель и сведения из теории важности критериев

Дальнейшее изложение опирается на следующую математическую модель ситуации принятия индивидуального решения в условиях определенности, принятую в ТВК: $\langle X, \tau, f, Z_0, R\rangle$, где X — множество вариантов (альтернатив, планов, стратегий, ...); τ — тип постановки задачи (выбрать один наилучший или несколько лучших вариантов, упорядочить все варианты по предпочтительности и т.д.); $f = (f_1, \dots, f_m)$ — векторный критерий, состоящий из $m \geq 2$ частных критериев f_i; $Z_0 \subseteq \mathrm{Re} = (-\infty, +\infty)$ — область значений критериев, или множество шкальных оценок (шкала критериев), $q \geq 2$; R — отношение нестрогого предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Под *крите-*

рием f_i понимается функция, определенная на X и принимающая значения из Z_0. Каждый вариант x из множества X характеризуется своей *векторной*, или *критериальной*, *оценкой* $y(x) = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Поэтому сравнение вариантов по предпочтительности сводится к сопоставлению их критериальных оценок. Множество всех критериальных оценок есть $Z = Z_0^m$. Далее полагается, что шкала критериев порядковая и известно лишь, что предпочтения вдоль их шкалы возрастают: чем больше оценка $z \in Z_0$, тем она предпочтительнее.

Предпочтения ЛПР моделируются на Z при помощи *отношения нестрогого предпочтения* R, так что yRz означает, что векторная оценка y не менее предпочтительна, чем z. Отношение R является (*частичным*) *квазипорядком*, т.е. оно рефлексивно и транзитивно, и порождает *отношение безразличия* I и (строгого) *предпочтения* P следующим образом: $yIz \Leftrightarrow yRz \wedge zRy$; $yPz \Leftrightarrow yRz \wedge \neg zRy$ (т.е. zRy неверно). Отношение R неизвестно и подлежит восстановлению на основе информации о предпочтениях ЛПР, состоящей из сведений об относительной важности критериев и характере изменения предпочтений на Z_0. При отсутствии такой информации на множестве векторных оценок Z можно задать лишь отношение строгого предпочтения $P^{\varnothing}$ (отношение Парето): $yP^{\varnothing}z \Leftrightarrow (y_i \geq z_i, i = 1, \ldots, m, y \neq z)$. Пусть $R^{\varnothing}$ есть объединение $P^{\varnothing}$ и отношения равенства векторов.

Для расширения отношения $P^{\varnothing}$ требуется дополнительная информация Ω о предпочтениях ЛПР, в роли которой будут выступать сведения о важности критериев, например сообщение типа "Одна группа критериев важнее другой". Приведем базовые определения равенства и превосходства в важности для непересекающихся групп критериев. Далее для простоты записи критерии f_i будем обозначать также и их номерами i, так что, например, под i будем понимать критерий f_i, а под $A = \{i_1, \ldots, i_q\}$ будем понимать группу (множество) критериев с номерами $i_1, \ldots, i_q$.

Пусть A и B — непересекающиеся непустые множества номеров, или группы критериев, в векторной оценке y все компоненты y_i с номерами из A равны между собой и все компоненты y_i с номерами из B равны между собой (т.е. $y_i = y_j$ при $i, j \in A$ и при $i, j \in B$). Векторные оценки такой структуры будем обозначать y^{AB}. Обозначим через $y^{A \leftrightarrow B}$ векторную оценку, полученную из векторной оценки y с указанной структурой путем замены каждой компоненты y_j, $j \in B$, на (любую) компоненту y_i, $i \in A$, и замены каждой компоненты y_i, $i \in A$, на (любую) компоненту y_j, $j \in B$.

Определение 1. *Группы критериев A и B равноважны, или одинаково важны (такое сообщение обозначается $A \sim B$), когда всякая векторная оценка y^{AB} и векторная оценка $y^{A \leftrightarrow B}$ одинаковы по предпочтительности (безразличны).*

Определение 2. *Группа критериев A важнее группы критериев B (такое сообщение обозначается $A \succ B$), когда всякая векторная оценка y^{AB}, в которой $y_i > y_j$ при $i \in A$ и $j \in B$, предпочтительнее векторной оценки $y^{A \leftrightarrow B}$.*

Согласно этим определениям сообщения $A \sim B$ и $A \succ B$ задают на множестве Z соответственно отношения безразличия $I^{A\sim B}$ и предпочтения $P^{A\succ B}$:

$$
\begin{aligned}
&yI^{A\sim B}z \Leftrightarrow y = y^{AB}, \quad z = y^{A\leftrightarrow B};\\
&yP^{A\succ B}z \Leftrightarrow y = y^{AB}, \quad z = y^{A\leftrightarrow B}, \quad y_i > y_j, \quad i \in A, \quad j \in B.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Каждое сообщение ω из накопленной информации Ω о важности задает на множестве векторных оценок Z согласно (1) соответствующее отношение R^{ω}, а именно: отношение предпочтения P^{ω} или безразличия I^{ω}. В соответствии с фрагментарным подходом, разработанным в ТВК (см. также [11]), на основе этой информации на множестве векторных оценок Z определяется отношение нестрогого предпочтения R^{Ω} (рефлексивное и транзитивное отношение) как транзитивное замыкание объединения всех отношений R^{ω} и отношения $R^{\varnothing}$:

$$
R^{\Omega} = \mathrm{T}\left[\left(\bigcup_{\omega\in\Omega} R^{\omega}\right)\bigcup R^{\varnothing}\right], \tag{2}
$$

где T — символ операции транзитивного замыкания бинарного отношения. Согласно (2) соотношение $yR^{\Omega}z$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида

$$
yR^{\omega_1}u^1, u^1R^{\omega_2}u^2, \ldots, u^{r-1}R^{\omega_r}z, \tag{3}
$$

где u^k — векторные оценки, а ω_k — сообщения из Ω (так что R^{ω_k} есть P^{ω_k} или I^{ω_k} в зависимости от смысла ω_k) или же символ $\varnothing$. Отношение нестрогого предпочтения R^{Ω} порождает указанным выше образом отношения предпочтения P^{Ω} и безразличия I^{Ω}.

Отношение R^{Ω} индуцирует аналогичное по смыслу отношение R_{Ω} на множестве вариантов: $x'R_{\Omega}x'' \Leftrightarrow f(x')R^{\Omega}f(x'')$. Отношение R_{Ω} непосредственно используется для формирования решения поставленной задачи требуемого типа.

3. Отношения важности критериев

Информация Ω задает на множестве 2^M подмножеств множества (номеров) критериев $M = \{1, \ldots, m\}$ (бинарные) отношения *равноважности*, или одинаковой важности $\sim^{\Omega}$ и *превосходства в важности*, или большей важности $\succ^{\Omega}$: $A \sim^{\Omega} B$, когда $A \sim B \in \Omega$ или $B \sim A \in \Omega$; $A \succ^{\Omega} B$, когда $A \succ B \in \Omega$.

Определение 3. Информация Ω слабо непротиворечива, если соответствующие отношения $\sim^{\Omega}$ и $\succ^{\Omega}$ не пересекаются, а отношение $\succ^{\Omega}$ иррефлексивно и асимметрично.

Далее полагаем, что Ω слабо непротиворечива, так что не может быть одновременно $A \sim^{\Omega} B$ и $A \succ^{\Omega} B$, а также $A \succ^{\Omega} A$ и одновременно $A \succ^{\Omega} B$ и $B \succ^{\Omega} A$. Для случая сравнения по важности только отдельных критериев расширение отношения $\sim^{\Omega}$ по транзитивности не расширяет отношения R^{Ω}, так как когда $i \sim j \in \Omega$ и $j \sim k \in \Omega$, то, как легко проверить, если $yI^{i\sim j}z$ и $zI^{j\sim k}u$, то и $yI^{i\sim k}u$. Для групп критериев аналогичное утверждение неверно.

Однако для случая сравнения по важности только отдельных критериев расширение отношения $\succ^{\Omega}$ по транзитивности расширяет отношение R^{Ω}, что было отмечено еще в [12].

Пусть $\succsim^{\Omega}$ — объединение отношений $\sim^{\Omega}$ и $\succ^{\Omega}$. Если принять естественное допущение, что отношения важности должны быть транзитивными, то тогда целесообразно ввести в рассмотрение транзитивное замыкание объединения отношений $\succsim^{\Omega}$ и отношения равенства множеств $=$. Однако для эффективного использования качественной информации о важности этого недостаточно. Сначала обобщим определения 1 и 2 на случай пересекающихся групп критериев. Пусть группы критериев A и B непусты ($A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$) и находятся в общем положении: $C = A\backslash B \neq \varnothing$ и $D = B\backslash A \neq \varnothing$. Тогда будем полагать, что $A \sim B$ или же что $A \succ B$, если выполнены условия из определения 1 или же 2 соответственно, т.е. (см. (1)):

$$\begin{aligned} &yI^{A\sim B}z \Leftrightarrow y = y^{CD}, \quad z = y^{C\leftrightarrow D}; \\ &yP^{A\succ B}z \Leftrightarrow y = y^{CD}, \quad z = y^{C\leftrightarrow D}, \quad y_i > y_j, \quad i \in C, \quad j \in D, \end{aligned} \tag{4}$$

где $C = A\backslash B$ и $D = B\backslash A$.

Пусть группы критериев A, B и C непусты, причем A и B не пересекаются с C, т.е. $A \cap C = \varnothing$ и $B \cap C = \varnothing$. Естественно полагать, что если $A \sim B$ или же $A \succ B$, то и в соответствии с расширенными определениями 1 и 2 верно также $A \cup C \sim B \cup C$ или же $A \cup C \succ B \cup C$ соответственно; и наоборот: если верно $A \cup C \sim B \cup C$ или же $A \cup C \succ B \cup C$, то верно также и $A \sim B$ или же $A \succ B$ соответственно. Указанное свойство называется аддитивностью. Наконец, если $A \supset B$, то разумно принять, что $A \succ B$, причем и в том случае, когда $B = \varnothing$ (в частности, верно $M \succ \varnothing$). Отметим, что соотношению $A \succ \varnothing$ соответствует отношение $P^{A\succ\varnothing}$, определяемое для векторных оценок y^A и z^A, каждая из которых имеет равные компоненты с номерами из A, следующим образом: $y^A P^{A\succ\varnothing} z^A \Leftrightarrow y_i^A > z_i^A$, $i \in A$.

Расширим упомянутое выше отношение $\succsim^{\Omega}$ путем внесения всевозможных соотношений между группами критериев за счет использования свойств транзитивности и аддитивности, а также всех соотношений $i \succ \varnothing$ и отношения равенства множеств до отношения $\succsim^{\mathrm{at}\Omega}$, называемого его аддитивно-транзитивным замыканием. По построению отношение $\succsim^{\mathrm{at}\Omega}$ обладает следующими свойствами:

1. Рефлексивность: $A \succsim^{\mathrm{at}\Omega} A$ для любого $A \in M$;
2. Транзитивность: если $A \succsim^{\mathrm{at}\Omega} B$ и $B \succsim^{\mathrm{at}\Omega} C$, то $A \succsim^{\mathrm{at}\Omega} C$ для любых A, B, $C \in M$;
3. Аддитивность: если $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, то соотношения $A \succsim^{\mathrm{at}\Omega} B$ и $A \cup C \succsim^{\mathrm{at}\Omega} B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно для любых $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$;

4. Существенность: для любого $A \in M$ выполнено $A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$.

Отметим, что отношение, обладающее свойствами 1, 2 и 3, называется частичным аддитивным квазипорядком, который можно назвать *частичной качественной важностью*. Если для любых групп критериев A и B верно $A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} B$ или $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$, то имеем полный аддитивный квазипорядок, или *полную качественную важность*. Свойства 1–4 показывают, что качественная важность формально близка к качественной вероятности.

4. Качественная вероятность

В интересах дальнейшего изложения приведем сведения о качественной вероятности [13, 14]. Пусть $\Lambda = \{\lambda^1, \ldots, \lambda^n\}$ — конечное множество произвольной природы. Его элементы λ^j называются элементарными событиями, а его подмножества A, B, C — событиями.

Определение 4. Бинарное отношение $\succsim$ на множестве 2^Λ называется (полной) качественной вероятностью, если оно обладает следующими свойствами:

A1. *Сравнимость*: *для любых A и B выполнено по крайней мере одно из соотношений $A \succsim B$ или $B \succsim A$*;

A2. *Транзитивность*: *из соотношений $A \succsim B$ и $B \succsim C$ следует $A \succsim C$*;

A3. *Существенность*: *$\Lambda \succ \varnothing$ и для любого A выполнено $A \succsim \varnothing$*;

A4. *Аддитивность*: *если $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, то соотношения $A \succsim B$ и $A \cup C \succsim B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.*

Из аксиом A1 и A2 следует, что качественная вероятность рефлексивна и потому является связным квазипорядком. Поэтому его асимметричная часть $\succ$ есть (частичный) порядок, а симметричная часть $\sim$ есть эквивалентность.

Пусть задана количественная вероятность Pr рядом распределения: $\Pr(\lambda^1) = p_1, \ldots, \Pr(\lambda^n) = p_n$, так что вероятность события A равна: $\Pr A = \sum_{j:\lambda^j \in A} p_j$. Говорят, что количественная вероятность (*численно*) *представляет* (полную) качественную вероятность $\succsim$ или что количественная вероятность *согласована* с качественной, если выполнено условие:

$$A \succsim B \Leftrightarrow \Pr A \geq \Pr B \quad \text{для любых } A,\ B. \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$\text{для любых } A,\ B\text{:}\quad A \succ B \Leftrightarrow \Pr A > \Pr B, \quad A \sim B \Leftrightarrow \Pr A = \Pr B. \tag{6}$$

Если задана количественная вероятность Pr, то порождаемое ею согласно (5) отношение $\succsim$ удовлетворяет всем аксиомам A1–A4, т.е. является (полной) качественной вероятностью.

Еще де Финетти в 1949 г. предположил, что всякую качественную вероятность можно представить некоторой количественной. Однако в 1959 г.

был опубликован [15] контрпример для $n = 5$. В итоге оказалось, что лишь при $n \leq 4$ для всякой качественной вероятности существует согласованная с ней количественная вероятность. Далее приводится этот контрпример в иных обозначениях.

Пример 1. Для простоты будем представлять события с использованием мультипликативной записи из номеров составляющих их элементарных событий; например, вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\}$ будем писать 124 и вместо $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\} \succ \{\lambda^3\}$ — соответственно $124 \succ 3$. Пусть $n = 5$. Рассмотрим отношение $\succsim$, заданное в виде единой цепочки:

$$12345 \succ 2345 \succ 1345 \succ 1245 \succ 345 \succ 245 \succ 1235 \succ 235 \succ 145 \succ 1234 \succ 45 \succ$$
$$\succ 135 \succ 125 \succ 234 \succ 35 \succ 134 \succ 25 \succ 124 \succ 15 \succ 34 \succ 24 \succ 123 \succ 5 \succ$$
$$\succ 23 \succ 14 \succ 4 \succ 13 \succ 12 \succ 3 \succ 2 \succ 1.$$

Для этого отношения выполнены все аксиомы А1–А4, так что оно есть полная качественная вероятность. Но представить ее при помощи количественных вероятностей нельзя. Действительно, запишем, используя приведенную выше цепочку, соотношения: $4 \succ 13$, $23 \succ 14$, $15 \succ 34$, $134 \succ 25$. Несложно убедиться, что система строгих неравенств

$$p_4 > p_1 + p_3, \quad p_2 + p_3 > p_1 + p_4, \quad p_1 + p_5 > p_3 + p_4, \quad p_1 + p_3 + p_4 > p_2 + p_5$$

несовместна (для этого достаточно сложить их правые и левые части).

Определение 5. Бинарное отношение $\succsim$ на множестве 2^Λ называется частичной качественной вероятностью, если оно удовлетворяет аксиомам А2–А4 *и аксиоме*

А5. *Рефлексивность: для любого A выполнено $A \succsim A$.*

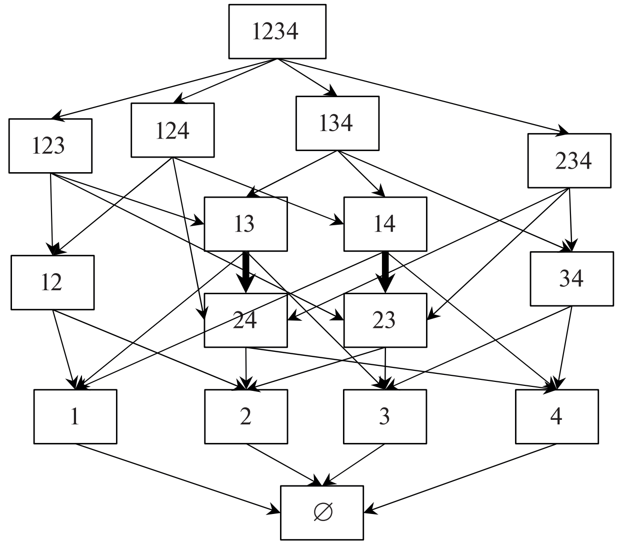
Отметим следующие свойства частичной качественной вероятности:

1. Если $A \cap C = B \cap C = \varnothing$, то оба соотношения $A \sim B$ и $A \cup C \sim B \cup C$, а также оба соотношения $A \succ B$ и $A \cup C \succ B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно;
2. Если $A \supset B$, то $A \succsim B$ и $A \succ B \Leftrightarrow A \backslash B \succ \varnothing$;
3. Если $A \succsim B \cup C$, то $A \succsim B$. Если при этом $A \succ B \cup C$, то $A \succ B$.

Оказывается, что частичная качественная вероятность обладает также рядом неочевидных и своеобразных свойств, в том числе таких:

1. При $n \geq 5$ не всякая частичная качественная вероятность может быть продолжена до полной [16, 17];

2. Если для частичной качественной вероятности события A и B не сравнимы, т.е. неверно ни $A \succsim B$, ни $B \succsim A$, и она может быть продолжена до полной неединственным образом, то не все из трех возможностей $A \succ B$, $B \succ A$, $A \sim B$ могут быть реализованы хотя бы для одного из продолжений, т.е., например, если A и B не сравнимы, то для одних продолжений может оказаться, что имеет место $A \succ B$, для других — что справедливо $A \sim B$, но ни для



Граф транзитивного остова частичной качественной вероятности из примера 2.

одного продолжения не будет верно $B \succ A$. Соответствующие контрпримеры были построены в [17]. Один из них подробно представлен далее.

Пример 2. Частичная качественная вероятность $\succsim$ для $n = 4$ в обозначениях из примера 2 представлена графом ее транзитивного остова на рисунке (отношение $\sim$ есть отношение равенства). Это отношение основано на двух базовых соотношениях: $13 \succ 24$ и $14 \succ 23$ (см. полужирные стрелки на рисунке). Выполнение аксиом частичной вероятности здесь несложно проверить непосредственно с использованием рисунка. Рассматриваемое отношение частичной вероятности может быть продолжено до полной, например, соответствующей количественным вероятностям $p_1 = \frac{8}{15}$, $p_2 = \frac{4}{15}$, $p_3 = \frac{2}{15}$, $p_4 = \frac{1}{15}$. Для этой полной вероятности верно $1 \succ 2$. Оказывается, что такое соотношение будет выполняться для любой полной качественной вероятности $\succsim'$, продолжающей заданную частичную. Действительно, допустим, что для некоторой полной качественной вероятности $\succsim'$ оказалось $2 \succsim' 1$. Тогда в силу аксиомы аддитивности A4 будет верно и $24 \succsim' 14$. Отсюда с учетом аксиомы транзитивности A2 и имеющихся соотношений $13 \succ 24$ и $14 \succ 23$, остающихся верными и для $\succsim'$, вытекает, что должно выполняться и $13' \succ 23$ и по аксиоме A4 получаем $1' \succ 2$. А это противоречит исходному допущению, что $2 \succsim' 1$.

5. Качественная важность и качественная вероятность

Одно из свойств качественной вероятности — существенность — состоит в требовании выполнения соотношения $A \succsim \varnothing$ для любого A, так что допускается $A \sim \varnothing$ при $A \neq \varnothing$, в частности $i \sim \varnothing$, что аналогично возможности рассмотрению событий с нулевой вероятностью.

Для качественной важности выполнение $i \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$ означает учет критерия, не имеющего вообще никакой важности. Но если набор критериев сформирован с выполнением известных требований к его формированию [18], то такой результат нужно рассматривать как следствие нарушения указанных требований. Если же дальнейший анализ покажет, что указанный результат следует признать верным, то это будет означать, что нужно скорректировать математическую модель проблемной ситуации, удалив соответствующий критерий из состава векторного критерия. Поэтому для качественной важности естественно принять требование, что $i \succ^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$ для каждого критерия.

6. Непротиворечивость информации о важности

Отметим сначала, что если $A \sim^{\Omega} B$, т.е. $A \sim B \in \Omega$, то $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$.

Определение 6. Информация Ω непротиворечива, если $\succ^{\Omega} \subseteq \succ^{\mathrm{at}\Omega}$ и для каждого критерия i верно $i \succ^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$. В противном случае она противоречива.

Согласно этому определению непротиворечивость информации Ω означает, в частности, что если $A \succ^{\Omega} B$, т.е. $A \succ B \in \Omega$, то должно быть верным и $A \succ^{\mathrm{at}\Omega} B$.

Теорема 1. Информация Ω непротиворечива тогда и только тогда, когда невозможно составить цикл вида $A \succ^{\Omega} B$, $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$ или $i \succ \varnothing$, $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} i$.

Доказательства теорем вынесены в Приложение. В теореме 1 вместо $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$ и $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} i$ можно записать соответственно $B \sim^{\mathrm{at}\Omega} A$ и $\varnothing \sim^{\mathrm{at}\Omega} i$.

Пример 3. В трехкритериальной задаче $\Omega = \{1 \succ 2, 23 \succ 13\}$. Имеем $1 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 2$ и $23 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 13$, так что верно $2 \sim^{\mathrm{at}\Omega} 1$, а не $1 \succ^{\mathrm{at}\Omega} 2$. Информация Ω противоречива. Имеем цикл: $1 \succ^{\Omega} 2$, $2 \sim^{\mathrm{at}\Omega} 1$.

Пример 4. В пятикритериальной задаче $\Omega = \{15 \succ 235, 23 \succ 134\}$. Здесь $15 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 235 \Rightarrow 15^{\mathrm{at}\Omega} 25 \Rightarrow 1 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 2$, а также $23 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 134 \Rightarrow 2 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 14 \Rightarrow 2 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 1$, так что $1 \sim^{\mathrm{at}\Omega} 2$. Далее $15 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 235 \Rightarrow 1 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 23$, откуда с учетом $23 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 134$ получаем $1 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 134$. Из $1 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 134$ по аддитивности $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 34$, $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 3$, $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 4$. В итоге имеем: $1 \sim^{\mathrm{at}\Omega} 2$, $3 \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$, $4 \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$ (критерий 5 не сравним по $\succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega}$ с первыми четырьмя критериями). Информация Ω противоречива. Имеется цикл: $15 \succ^{\Omega} 235$, $235 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 15$, так как $235 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} 25 \sim^{\mathrm{at}\Omega} 15$.

7. Коэффициенты важности критериев

Аналогом вероятностей элементарных событий p_i являются *коэффициенты важности* (отдельных) *критериев* α_i — положительные в сумме равные единице числа, обладающие для полной качественной важности $\succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega}$ следующим свойством:

(7) для любых групп критериев A и B:

$$A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} B \Leftrightarrow \sum_{i:i\in A} \alpha_i \geqslant \sum_{i:i\in B} \alpha_i.$$

Коэффициенты важности для полной качественной важности могут и не существовать (см. пример 1). Для частичной качественной важности $\succsim^{\mathrm{at}\Omega}$ *коэффициентами важности* называются положительные в сумме равные единице числа, обладающие свойством (7), в котором знак $\Leftrightarrow$ заменен на $\Rightarrow$, а также таким свойством: для любых групп критериев A и B:

$$A \succ^{\mathrm{at}\Omega} B \Rightarrow \sum_{i:i\in A} \alpha_i > \sum_{i:i\in B} \alpha_i.$$

Из (7) следует, что если для любых групп критериев A и B выполнено $A\sim^{\mathrm{at}\Omega}B$, то справедливо равенство

$$\sum_{i:i\in A} \alpha_i = \sum_{i:i\in B} \alpha_i.$$

Понятно, что коэффициенты важности для частичной качественной важности могут и не существовать.

Так, в примерах 3 и 4 коэффициенты важности не существуют и информация Ω противоречива. С другой стороны, существование коэффициентов важности для частичной качественной важности не гарантирует возможность ее продолжения до полной и тем более существование для нее коэффициентов важности.

8. Отношения предпочтения

При сравнении векторных оценок по предпочтительности нужно учитывать не только те соотношения из $\succsim^{\Omega}$, которые прямо следуют из Ω, но и те, которые получаются в результате аддитивно-транзитивного замыкания, т.е. учитывать отношение $\succsim^{\mathrm{at}\Omega}$.

Пример 5. Пусть в четырехкритериальной задаче $\Omega = \{1 \succ 2, 24 \succ 34\}$. Эта информация непротиворечива. При такой информации о важности $y = (2,1,1)$ и $z = (1,1,2)$, не сравнимыми по предпочтительности, даже если попытаться расширить Ω за счет транзитивного замыкания отношения $\succsim^{\varnothing} = \{(1,2), (24,34)\}$. Однако с учетом аддитивности верно $2 \succ^{\mathrm{at}\Omega} 3$, а по транзитивности с учетом $1 \succ^{\mathrm{at}\Omega} 2$ получаем $1 \succ^{\mathrm{at}\Omega} 3$. Следовательно, нужно считать, что y предпочтительнее, чем z.

Пополним множество Ω, добавив для него соответственно сообщение $A \succ B$, если $A \succ^{\mathrm{at}\Omega} B$, и $A \sim B$, если $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$. Обозначим его $\overline{\Omega}$. Это множество порождает на Z отношение $R^{\overline{\Omega}}$ согласно (2), где вместо Ω стоит $\overline{\Omega}$. По построению $R^{\Omega} \subseteq R^{\overline{\Omega}}$. Отметим, что $I^{\Omega} \subseteq I^{\overline{\Omega}}$.

Теорема 2. Информация Ω непротиворечива тогда и только тогда, когда $P^{\Omega} \subseteq P^{\overline{\Omega}}$.

Согласно теореме 1 информация Ω противоречива тогда и только тогда, когда можно построить цикл вида (3), где $z = y$ и каждое ω_k есть соотношение вида $A \succ B$ или $A \sim B$ из $\overline{\Omega}$ или же символ $\varnothing$, причем хотя бы раз встречается $P^{A \succ B}$ или $P^{\varnothing}$. Теорема 2 показывает, что определение непротиворечивости информации о важности полностью согласовано с определениями непротиворечивости, принятыми в теории важности критериев [4, 5, 11].

Теперь пополним множество Ω так: добавим в него соответственно сообщение $A \succ B$, если $A \succ^{\mathrm{at}\Omega} B$ и множества A и B непусты и не пересекаются, и $A \sim B$, если $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$ и множества A и B непусты и не пересекаются. Обозначим его через $\widehat{\Omega}$. Это множество порождает на Z отношение $R^{\widehat{\Omega}}$ согласно (2), где вместо Ω стоит $\widehat{\Omega}$.

Теорема 3. Справедливо равенство $R^{\overline{\Omega}} = R^{\widehat{\Omega}}$.

Построение отношений R^{Ω}, $\succsim^{\mathrm{at}\Omega}$, $R^{\overline{\Omega}}$ и $R^{\widehat{\Omega}}$ основано на операции транзитивного или аддитивно-транзитивного замыкания бинарных отношений. Если размерность задачи "не очень велика", то указанные отношения можно построить, если использовать матричное представление бинарных отношений.

Бинарное отношение ρ на конечном множестве $H = \left\{h^1, \ldots, h^q\right\}$ можно задать квадратной булевой матрицей смежности $B(\rho) = \|b_{ij}(\rho)\|$ порядка q, где

$$b_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 \text{ при } (h^i, h^j) \in \rho, \\ 0 \text{ при } (h^i, h^j) \notin \rho. \end{cases}$$

Для булевых матриц определены операции: транспонирование $^{\mathrm{T}}$, сложение $+$, поэлементное умножение $*$, умножение $\times$, образование асимметричной разности $\setminus$:

$$\|a_{ij}\| \setminus \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|, \text{ где } c_{ij}(\rho) = \begin{cases} 1 \text{ при } a_{ij} = 1 \text{ и } b_{ij} = 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Операциям над бинарными отношениями — взятия обратного отношения $^{-1}$, пересечения отношений $\cap$, объединения отношений $\cup$, разности отношений $\setminus$, умножения отношений $\circ$ и построения транзитивного замыкания $\widehat{\rho}$ соответствуют операции над их матрицами смежности [19]:

$$B\left(\rho^{-1}\right) = B\left(\rho\right)^{\mathrm{T}},\ B\left(\rho^1 \cap \rho^2\right) = B\left(\rho^1\right) \circ B\left(\rho^2\right),\ B\left(\rho^1 \cup \rho^2\right) = B\left(\rho^1\right) + B\left(\rho^2\right),$$
$$B\left(\rho^1 \setminus \rho^2\right) = B\left(\rho^1\right) \setminus B\left(\rho^2\right),\ B\left(\rho^1 \circ \rho^2\right) = B\left(\rho^1\right) \times B\left(\rho^2\right),$$
$$B\left(\widehat{\rho}\right) = B\left(\rho\right) + B^2\left(\rho\right) + \ldots + B^n(\rho).$$

Поэтому $B\left(\mathrm{Sym}\,\rho\right) = B\left(\rho\right) \circ B\left(\rho\right)^{\mathrm{T}}$, $B\left(\mathrm{As}\,\rho\right) = B\left(\rho\right) \setminus B\left(\mathrm{Sym}\,\rho\right)$, где Sym и As — символы операций выделения симметричной и асимметричной частей бинарного отношения ρ соответственно: $\mathrm{Sym}\,\rho = \rho \cap \rho^{-1}$, $\mathrm{As}\,\rho = \rho \setminus \mathrm{Sym}\,\rho$. Для построения транзитивного замыкания существуют эффективные алгоритмы [20]. Заметим еще, что

$$\rho^1 \subseteq \rho^2 \Leftrightarrow B\left(\rho^1\right) \leqq B\left(\rho^2\right), \quad \rho^1 \subset \rho^2 \Leftrightarrow B\left(\rho^1\right) \leq B\left(\rho^2\right),$$

где знак матричного неравенства $\leqq$ для двух матриц означает, что каждый элемент первой матрицы не больше соответствующего элемента второй матрицы, а знак $\leq$ показывает, что верно указанное условие, но матрицы не равны: в первой матрице найдется элемент, который меньше соответственного элемента второй матрицы.

Пример 6. Полную качественную вероятность $\succsim$ из примера 1 можно интерпретировать как отношение важности $\succcurlyeq^{\Omega}$ на множестве групп критериев, причем $\succcurlyeq^{\Omega} = \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega}$. Информация Ω непротиворечива. При помощи специальной компьютерной программы для этого отношения важности для случая, когда $Z_0 = \{1,2\}$, было построено отношение $R^{\overline{\Omega}}$. Оно оказалось полным (аддитивным) квазипорядком. Но уже для $Z_0 = \{1,2,3\}$ квазипорядок $R^{\overline{\Omega}}$ оказывается лишь частичным (см. пример 7).

Пример 7. Частичную качественную вероятность $\succcurlyeq$ из примера 2 можно интерпретировать как отношение важности, полученное путем аддитивно-транзитивного замыкания для информации $\Omega = \{13 \succ 24, 14 \succ 23\}$. Информация Ω непротиворечива. Здесь $\overline{\Omega} = \Omega$. При помощи специальной компьютерной программы для случая, когда $Z_0 = \{1,2\}$, было построено отношение $R^{\overline{\Omega}}$. Оно оказалось частичным (аддитивным) квазипорядком.

9. Об одном претенденте на аналитическое решающее правило

Пусть y и z — две произвольные векторные оценки. Пусть $W(y,z)$ — множество, состоящее из попарно различных компонент этих векторов, элементы которого перенумерованы в порядке возрастания:

$$W\left(y,z\right) = \{y_1\} \cup \cdots \cup \{y_m\} \cup \{z_1\} \cup \cdots \cup \{z_m\} = \{w_1, \ldots, w_q\},$$

где $q \leq m$ и зависит от y и z, $w_1 < \cdots < w_q$. Пусть далее

$$M_k\left(y\right) = \{i \in M | y_i \geq w_k\}, \quad k = 2,3,\ldots,q.$$

Под $\succcurlyeq^{\overline{\Omega}}$ будем понимать $\succ$ или $\sim$ из соотношений между группами критериев в $\overline{\Omega}$.

Теорема 4. Справедливо утверждение: $yR^{\overline{\Omega}}z \Rightarrow M_k\left(y\right) \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} M_k\left(z\right)$, $k = 2,3,\ldots,q$.

Отметим, что если множество Z_0 конечно: $Z_0 = \{1,\ldots,q\}$, где $q \geq 2$, то его можно использовать в качестве $W\left(y,z\right)$.

Утверждение в теореме 4 напоминает решающее правило для количественной важности, когда имеются коэффициенты важности для всех отдельных критериев [4]). Однако в отличие от случая отдельных критериев при $q > 2$

теорема 4 дает только лишь необходимые, но не достаточные условия для справедливости соотношения $yR^{\overline{\Omega}}z$. (При $q = 2$ векторная оценка z получается перестановкой $y^{A\leftrightarrow B}$, где $A = M_2(y)$ и $B = M_2(z)$. Из условия $A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} B$ следует $A^{\overline{\Omega}}B$ или $A\sim^{\overline{\Omega}}B$. И тогда согласно (1) верно $yR^{\overline{\Omega}}z$.) Это доказывает следующий контрпример.

Пример 8. Пусть в четырехкритериальной задаче $Z_0 = \{1, 2, 3\}$ и $\Omega = \{1 \succ 3, 12 \succ 34\}$. Эта информация непротиворечива. Так как в сообщениях из Ω критерии 1 и 2 находятся слева, а 3 и 4 — справа, то с помощью аддитивно-транзитивного замыкания в $\overline{\Omega}$ не удается ввести никаких новых сообщений вида $A \succ B$ с непересекающимися A и B. Сравним векторные оценки $y = (3, 2, 1, 1)$ и $z = (1, 1, 3, 2)$. Все соотношения между $M_k(y)$ и $M_k(z)$ из теоремы 4 выполняются:

$$\text{при } k = 2:\ \ M_2(y) = \{1, 2\},\ \ M_2(z) = \{3, 4\},\ \ 12 \succ^{\overline{\Omega}} 34;$$

$$\text{при } k = 3:\ \ M_3(y) = \{1\},\ \ M_3(z) = \{3\},\ \ 1 \succ^{\overline{\Omega}} 3.$$

Однако, как показали расчеты, выполненные при помощи компьютерной программы с использованием матричного представления бинарных отношений, векторные оценки y и z несравнимы по $R^{\overline{\Omega}}$.

10. Заключение

В статье в рамках ТВК проведен анализ многокритериальных моделей принятия решений при наличии информации о важности групп критериев, основанный на ранее введенных определениях равенства и превосходства в важности одних групп критериев над другими: введены определения отношений важности групп критериев и порождаемых этими отношениями коэффициентов важности критериев, введены отношения предпочтения на основе такой информации. Указаны способы проверки непротиворечивости информации о важности, указаны пути построения введенных отношений предпочтения. Раскрыта взаимосвязь качественной важности и качественной вероятности.

Представленные в статье результаты позволяют анализировать прикладные многокритериальные задачи, когда имеется информация об относительной важности не только отдельных критериев, но и групп критериев с порядковой шкалой. Результаты являются базой для дальнейшего развития теории важности критериев для задач с упорядоченными по важности группами критериев, имеющих более совершенные шкалы, чем порядковая.

Актуальной остается проблема разработки достаточно простого аналитического правила, которое позволило бы эффективно сравнивать по предпочтительности варианты с учетом информации о важности в задачах с большим числом критериев и вариантов.

Авторы благодарны рецензентам за полезные конструктивные замечания.

Доказательство теоремы 1. Удобнее доказывать равносильное утверждение:

Информация Ω *противоречива тогда и только тогда, когда существует цикл вида* $A \succ^{\Omega} B$, $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$ *или* $i \succ \varnothing$, $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} i$.

Необходимость. Пусть информация Ω противоречива. Тогда по определению 6 возможны две ситуации:

1. Не выполняется $\succ^{\Omega} \subseteq \succ^{\mathrm{at}\Omega}$, т.е. существует $A \succ B \in \Omega$ и при этом не верно $A \succ^{\mathrm{at}\Omega} B$. Но поскольку из $A \succ B \in \Omega$ следует $A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} B$, то должно выполняться $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$, т.е. $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$. Получаем цикл $A \succ^{\Omega} B$, $B \sim^{\mathrm{at}\Omega} A$;

2. Существует критерий i, для которого не верно $i \succ^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$. Но поскольку $i \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$, то должно выполняться $i \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$. Получаем цикл $i \succ \varnothing$, $\varnothing \sim^{\mathrm{at}\Omega} i$.

Достаточность. Пусть существует цикл $A \succ^{\Omega} B$, $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$. Так как из $A \succ B \in \Omega$ следует $A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} B$, то должно выполняться $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$. Так как одновременно выполняется $A \succ^{\Omega} B$ и $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$, то $\succ^{\Omega} \subseteq \succ^{\mathrm{at}\Omega}$ не верно, и по определению 6 информация Ω противоречива.

Пусть существует цикл $i \succ \varnothing$, $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} i$. Поскольку $i \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$, то должно выполняться $i \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$. Тогда по определению 6 информация Ω противоречива. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Удобнее доказывать равносильное утверждение: *информация* Ω *противоречива тогда и только тогда, когда неверно* $P^{\Omega} \subseteq P^{\overline{\Omega}}$.

Необходимость. Пусть информация Ω противоречива, тогда по теореме 1 существует цикл $A \succ^{\Omega} B$, $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$ или $i \succ \varnothing$, $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} i$.

Рассмотрим случай цикла $A \succ^{\Omega} B$, $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$. Будем использовать две оценки из Z_0; для простоты обозначим их 1 и 2. Построим векторную оценку y следующим образом: $y_i = 2,\ i \in A,\ y_j = 1,\ j \notin A$, а векторную оценку z так: $z_i = 2,\ i \in B,\ z_j = 1,\ j \notin B$. Получаем $y = y^{CD}$, $z = y^{C \leftrightarrow D}$, где $C = A \backslash B$ и $D = B \backslash A$. Так как $A \succ B \in \Omega$, то по правилам (4) на основе информации Ω должно выполняться $yP^{A \succ B} z$, т.е. $yP^{\Omega} z$.

С другой стороны, в цикл входит также $B \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} A$. При доказательстве теоремы 1 было выяснено, что в данном случае верно $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$. Поэтому множество сообщений $\overline{\Omega}$, получаемое пополнением множества Ω, должно содержать сообщение $A \sim B$. Тогда по правилам (4) на основе информации $\overline{\Omega}$ должно выполняться $yI^{A \sim B} z$, поэтому $yP^{\overline{\Omega}} z$ неверно. Это доказывает, что включение $P^{\Omega} \subseteq P^{\overline{\Omega}}$ неверно.

Рассмотрим теперь случай цикла $i \succ \varnothing$, $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} i$. Построим векторную оценку y следующим образом: $y_i = 2$, $y_j = 1$, $j \neq i$. А в векторной оценке z пусть все компоненты равны единице. Получаем $yP^{\varnothing} z$, а значит, и $yP^{\Omega} z$.

С другой стороны, в цикл входит также $\varnothing \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} i$. При доказательстве теоремы 1 было выяснено, что в данном случае верно $i \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$. Поэтому на основе информации $\overline{\Omega}$ должно выполняться $yI^{i\sim\varnothing}z$, поэтому $yP^{\overline{\Omega}}z$ неверно. Следовательно, включение $P^{\Omega} \subseteq P^{\overline{\Omega}}$ неверно.

Достаточность. Пусть для каких-то векторных оценок y и z выполняется $yP^{\Omega}z$, но не выполняется $yP^{\overline{\Omega}}z$. Поскольку $R^{\Omega} \subseteq R^{\overline{\Omega}}$, то из $yP^{\Omega}z$ следует $yR^{\overline{\Omega}}z$. Тогда для того чтобы $yP^{\overline{\Omega}}z$ было неверно, необходимо $zR^{\overline{\Omega}}y$, а значит, $zI^{\overline{\Omega}}y$.

Отношению безразличия $zI^{\overline{\Omega}}y$ соответствует цепочка (3), состоящая только из отношений безразличия $I^{A\sim B}$. Отношению строгого предпочтения $yP^{\Omega}z$ соответствует цепочка (3), в которой хотя бы раз встречается $P^{A\succ B}$ или $P^{\varnothing}$. Обе эти цепочки (3) образуют цикл

$$yR^{\omega_1}u^2, u^2R^{\omega_2}u^3, \ldots, u^rR^{\omega_r}y, \tag{П.1}$$

где u^k — векторные оценки, а ω_k — сообщения из $\overline{\Omega}$ (помним, что $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$) или же символ $\varnothing$, причем хотя бы раз встречается $P^{A\succ B}$ или $P^{\varnothing}$. Далее для удобства будем считать $y = u^1$.

Поскольку все строгие отношения $P^{A\succ B}$ или $P^{\varnothing}$, встречающиеся в цикле (П.1), могут принадлежать только цепочке $yP^{\Omega}z$, но не $zI^{\overline{\Omega}}y$, то для каждого отношения $P^{A\succ B}$ в цикле (П.1) должно выполняться $A \succ B \in \Omega$.

Из множества Z_0 значений компонент векторных оценок выберем максимальное значение g, для которого в цикле (П.1) найдется звено $u^kR^{\omega_k}u^{k+1}$ со строгим отношением $P^{A\succ B}$ или $P^{\varnothing}$, в котором при переходе от u^k к u^{k+1} меняется состав компонент, равных g. В (П.1) существует хотя бы одно звено со строгим отношением и в нем $u^k \neq u^{k+1}$. Поэтому значение g, удовлетворяющее описанным условиям, существует. Обозначим через G^k множество номеров компонент векторной оценки u^k, равных g.

Из всего цикла (П.1) рассмотрим только $s \le r$ звеньев, в которых $G^k \neq$ $\neq G^{k+1}$:

$$u^{i_1}P^{\omega_{i_1}}u^{i_1+1}, u^{i_2}R^{\omega_{i_2}}u^{i_2+1}, \ldots, u^{i_s}R^{\omega_{i_s}}u^{i_s+1}. \tag{П.2}$$

Поскольку состав компонент, равных g, меняется только в звеньях (П.2) цикла (П.1), то для смежных векторных оценок u^{i_k+1} и $u^{i_{k+1}}$ из соседних звеньев (П.2) с номерами k и $k+1$ должно выполняться $G^{i_k+1} = G^{i_{k+1}}$. В частности, $G^{i_s+1} = G^{i_1} = G^1$. Опираясь на (П.2), построим цикл

$$C^1 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} C^2, C^2 \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} C^3, \ldots, C^s \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} C^1. \tag{П.3}$$

В цикле (П.3) положим каждое C^k равным группе критериев с номерами из G^{i_k}. Поскольку $G^{i_{s+1}} = G^{i_1} = G^1$, то, очевидно, $C^{s+1} = C^1$. Покажем, что для построенных таким образом групп критериев должно выполняться $C^k \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$, $k = 1, \ldots, s$. Для этого рассмотрим все возможные варианты отношения $R^{\omega_{i_k}}$ в k-м звене (П.3), а именно $P^{A\succ B}$, $I^{A\sim B}$ и $P^{\varnothing}$:

1. Если выполняется $u^{i_k}P^{A\succ B}u^{i_k+1}$, то по определению (4) в этом звене осуществляется перестановка значений компонент векторной оценки u^{i_k} с

номерами из C и D, где $C = A \backslash B$ и $D = B \backslash A$. Причем в векторной оценке u^{i_k} значения компонент с номерами из C должны быть больше значений компонент с номерами из D. Кроме того, одно из переставляемых значений должно быть равно g, а второе должно быть меньше g, иначе это противоречило бы условиям выбора значения g. Следовательно, в векторной оценке u^{i_k} равными g являются компоненты с номерами из C и, возможно, еще из F, такого что $C \cap F = \varnothing$. А в векторной оценке u^{i_k+1} (а также и в $u^{i_{k+1}}$) равными g являются компоненты с номерами из D и, возможно, еще из F, такого что $D \cap F = \varnothing$. Поэтому $G^{i_k} = C \cup F$, а $G^{i_{k+1}} = D \cup F$. Тогда по построению групп критериев C^k в (П.3) $C^k = C \cup F$, а $C^{k+1} = D \cup F$. Из $A \succ^{\Omega} B$ следует $A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} B$. По аддитивности из $A \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} B$ следует $C \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} D$, а из $C \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} D$ следует $C^k \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$;

2. Если выполняется $u^{i_k} I^{A \sim B} u^{i_k+1}$, то по определению (4) в этом звене осуществляется перестановка значений компонент векторной оценки u^{i_k} с номерами из C и D, где $C = A \backslash B$ и $D = B \backslash A$. Причем одно из этих значений должно быть g, а второе может быть любым, не равным g, в том числе и бóльшим g. Поскольку в этом звене не используется строгое отношение, то это не противоречит условиям выбора g. Возможны две ситуации:

2a. В векторной оценке u^{i_k} равными g являются компоненты с номерами из C и, возможно, еще из F, такого что $C \cap F = \varnothing$. А в векторной оценке u^{i_k+1} (а также и в $u^{i_{k+1}}$) равными g являются компоненты с номерами из D и, возможно, еще из F, такого что $D \cap F = \varnothing$. Поэтому $G^{i_k} = C \cup F$, а $G^{i_{k+1}} = D \cup F$. Тогда $C^k = C \cup F$, а $C^{k+1} = D \cup F$. Из $A \sim^{\overline{\Omega}} B$ следует $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$. По аддитивности из $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$ следует $C \sim^{\mathrm{at}\Omega} D$, а $C \sim^{\mathrm{at}\Omega} D$ влечет $C^k \sim^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$;

2b. В векторной оценке u^{i_k} равными g являются компоненты с номерами из D и, возможно, еще из F, такого что $D \cap F = \varnothing$. А в векторной оценке u^{i_k+1} (а также и в $u^{i_{k+1}}$) равными g являются компоненты с номерами из C и, возможно, еще из F, такого что $C \cap F = \varnothing$. Поэтому $G^{i_k} = D \cup F$, а $G^{i_{k+1}} = C \cup F$. Тогда $C^k = D \cup F$, а $C^{k+1} = C \cup F$. Из $A \sim^{\overline{\Omega}} B$ следует $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$. По аддитивности из $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$ следует $C \sim^{\mathrm{at}\Omega} D$, а $C \sim^{\mathrm{at}\Omega} D$ влечет $C^k \sim^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$.

3. Если выполняется $u^{i_k} P^{\varnothing} u^{i_k+1}$, то в этом звене возможно только уменьшение числа компонент, равных g, т.е. $G^{i_k} \supset G^{i_k+1}$. Иначе в этом звене уменьшалось бы число компонент со значением, бóльшим g. Но это невозможно по условиям выбора g. Следовательно, в этом случае $C^k \supset C^{k+1}$, т.е. $C^k \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$.

Таким образом, доказано, что в каждом звене цикла (П.3) выполняется $C^k \succcurlyeq^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$, $k = 1, \ldots, s$. Следовательно по транзитивности $C^1 \sim^{\mathrm{at}\Omega} C^2$, $C^2 \sim^{\mathrm{at}\Omega} C^3$, $\ldots$, $C^s \sim^{\mathrm{at}\Omega} C^1$.

Теперь вспомним, что в цикле (П.2) хотя бы раз встречается строгое отношение $P^{A \succ B}$ или $P^{\varnothing}$. Причем для каждого такого отношения $P^{A \succ B}$ должно выполняться $A \succ B \in \Omega$. Рассмотрим сначала случай, когда в цикле (П.2) есть строгое отношение $P^{A \succ B}$, такое что $A \succ B \in \Omega$. Как было показано выше, этому отношению в цикле (П.3) соответствуют группы критериев $C^k = C \cup F$ и

$C^{k+1} = D \cup F$, где $C = A \backslash B$, $D = B \backslash A$, $C \cap F = \varnothing$, $D \cap F = \varnothing$. Тогда по аддитивности из $C^k \sim^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$ следует $C \sim^{\mathrm{at}\Omega} D$, а из $C \sim^{\mathrm{at}\Omega} D$ следует $A \sim^{\mathrm{at}\Omega} B$. Получаем цикл $A \succ^{\Omega} B$, $B \sim^{\mathrm{at}\Omega} A$. Значит, по теореме 1 информация Ω противоречива.

Рассмотрим теперь случай, когда в цикле (П.2) есть строгое отношение $P^{\varnothing}$. Как было показано выше, этому отношению в цикле (П.3) соответствуют группы критериев $C^k \supset C^{k+1}$. Тогда по аддитивности, из $C^k \sim^{\mathrm{at}\Omega} C^{k+1}$ следует $C^k \backslash C^{k+1} \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$. Следовательно, для каждого критерия i из непустой группы $C^k \backslash C^{k+1}$ справедливо $i \sim^{\mathrm{at}\Omega} \varnothing$. Получаем цикл $i \succ^{\Omega} \varnothing$, $\varnothing \sim^{\mathrm{at}\Omega} i$. Значит, по теореме 1 информация Ω противоречива. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Поскольку $\overline{\Omega} \supseteq \widehat{\Omega}$, то с учетом (2), где вместо Ω стоит $\widehat{\Omega}$, имеем $R^{\overline{\Omega}} \supseteq R^{\widehat{\Omega}}$. Справедливость обратного включения $R^{\overline{\Omega}} \subseteq R^{\widehat{\Omega}}$ следует из того, что если для звена цепочки (3) верно $uR^{A \succsim^{\mathrm{at}\Omega} B}v$, то согласно определению (4) верно и $uR^{C \succsim^{\mathrm{at}\Omega} D}v$, где $C = A \backslash B$, $D = B \backslash A$, если $C \neq \varnothing$ и $D \neq \varnothing$, и $uR^{\varnothing}v$, если $D = \varnothing$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Для доказательства достаточно убедиться в том, что соответствующие соотношения между $M_k(y)$ и $M_k(z)$ выполняются для каждого звена цепочки (3), существующей при справедливости соотношения $uR^{\overline{\Omega}}v$. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Trends in multiple criteria decision analysis / M. Ehrgott, J. Figueira, S. Greco (Eds.). N.Y.: Springer, 2010.
2. Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys / J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (Eds.). V. 1. Second edition. N.Y.: Springer, 2016. P. 467–496.
3. *Roy B., Mousseau V.* A Theoretical Framework for Analyzing the Notion of Relative Importance of Criteria // J. of Multi-criteria Decision Analysis. 1996. V. 5. P. 145–159.
4. *Подиновский В.В.* Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. М.: Наука, 2019.
5. *Подиновский В.В.* Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979. С. 117–145.
6. *Яшина Н.П.* Упорядочение множества векторных оценок при наличии информации о сравнительной важности критериев // Депонированная рукопись № 2903-В86. М.: ВИНИТИ, 1986.
7. *Подиновская О.В., Подиновский В.В.* Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. I. Качественная информация. Равноважные группы критериев равной важности // Информационные технологии моделирования и управления. 2014. № 1 (85). С. 58–67.
8. *Подиновская О.В., Подиновский В.В.* Информация о важности групп критериев в многокритериальных задачах принятия решений. II. Количественная важность // Информационные технологии моделирования и управления. 2014. № 3 (87). С. 238–247.

9. *Подиновская О.В., Подиновский В.В.* Анализ иерархических многокритериальных задач принятия решений методами теории важности критериев // Проблемы управления. 2014. № 6. С. 2–8.
10. *Podinovskaya O.V., Podinovski V.V.* Criteria Importance Theory for Multicriterial Decision Making Problems with a Hierarchical Structure // Eur. J. Oper. Res. 2017. V. 258. P. 983–992.
11. *Гафт М.Г., Подиновский В.В.* О построении решающих правил в задачах принятия решений // АиТ. 1981. № 6. С. 128–138.

    Gaft M.G., Podinovskii V.V. On Design of Decision Rules in Decision Making Problems // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 6. P. 806–815.
12. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности однородными критериями // АиТ. 1976. № 11. С. 118–127.

    Podinovskii V.V. Multi-criterion Problems with Importance Ordered Homogeneous Criteria // Autom. Remote Control. 1976. V. 37. No. 11. P. 1728–1736.
13. Foundation of measurement / Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tverski A. V. 1. N.Y.: Academic Press, 1971.
14. *Наумов Г.Е., Подиновский В.В., Подиновский Вик.В.* Субъективная вероятность: способы представления и методы получения // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1991. № 1. С. 94–109.
15. *Kraft C.H., Pratt J.W., Seidenberg A.* Intuitive Probability on Finite Sets // Annals of Math. Statist. 1959. V. 30. P. 408–419.
16. *Fishburn P.C.* Linear Extensions of Additive Partial Orders // Order. 1997–1998. V. 14. P. 153–169.
17. *Подиновский Вик.В.* К вопросу о продолжении частичных бинарных отношений в моделях принятия решений // Вычислительные системы и вопросы принятия решений: сборник / под. ред. Л.Н. Королева, П.С. Краснощекова. М.: МГУ, 1991. С. 166–168.
18. *Кини Р., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1981.
19. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.
20. *Warshall S.* A Theorem on Boolean Matrices // J. Association for Computing Machinery. 1962. V. 9. P. 11–12.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 24.10.2021

После доработки 05.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022