

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2022 г. А.А. БОБЦОВ, д-р техн. наук (bobtsov@mail.ru)
(Ханчжоу Дзяньцзы университет, Ханчжоу, Китай;
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет ИТМО”,
Санкт-Петербург),
Н.А. НИКОЛАЕВ, канд. техн. наук (nikona@yandex.ru),
О.В. ОСЬКИНА (olga.oskina1996@gmail.com)
(Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет ИТМО”,
Санкт-Петербург),
С.И. НИЗОВЦЕВ (nizovtsev.si@gmail.com)
(ООО “ИСП “Геореконструкция”)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПАРАМЕТРА НЕЗАШУМЛЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО СИГНАЛА

Рассматривается новый алгоритм оценивания нестационарного параметра $\omega(t)$ незашумленного синусоидального сигнала $\alpha(t) \sin(\omega(t) + \varphi)$. Предполагается, что неизвестные параметры $\alpha(t)$ и $\omega(t)$ синусоидального сигнала представляют собой функции времени, являющиеся решениями линейных стационарных дифференциальных уравнений с известными коэффициентами, но не начальными условиями. Поставленная задача решается с использованием градиентных алгоритмов настройки на базе линейного регрессионного уравнения, полученного путем параметризации исходного нелинейного по параметрам синусоидального сигнала. Пример и результаты компьютерного моделирования иллюстрируют работоспособность предлагаемого алгоритма, а также поясняют процедуру его синтеза.

Ключевые слова: идентификация параметров, нестационарные системы, синусоидальные сигналы.

DOI: 10.31857/S000523102207008X, EDN: AFIWXK

1. Введение

В статье рассматривается задача идентификации неизвестного нестационарного параметра $\omega(t)$ незашумленного синусоидального сигнала вида

$$(1.1) \quad y(t) = \alpha(t) \sin(\omega(t) + \varphi),$$

где $y(t)$ — сигнал, доступный прямому измерению, $\alpha(t)$ — неизвестная амплитуда, $\omega(t)$ — неизвестный нестационарный параметр и φ — неизвестный постоянный фазовый сдвиг.

В случае стационарной амплитуды α и $\omega(t) = \omega_0 t$ (где ω_0 является константой) задача оценивания по измерению сигнала $y(t)$ хорошо изучена, и ей посвящено большое число публикаций (см., например, [1–9]). Однако такое допущение может не выполняться при решении реальных инженерных задач. Если источником возмущения является работа электрического привода, то частота пропорциональна скорости вращения электрической машины, а следовательно, изменяется при разгоне или торможении. Для парирования данного эффекта были предложены методы, опубликованные в [10–12], где функция $\omega(t)$ описывается полиномом времени произвольного порядка. Тем не менее в [10–12] допускалось, что амплитуда α является неизвестным числом. В [13–15] ограничения на стационарность амплитуды были сняты, но в качестве функции $\omega(t)$ было выбрано $\omega(t) = \omega_0 t$, где ω_0 является константой. Таким образом, на сколько известно авторам, тематика идентификации функции $\omega(t)$ при условии нестационарной амплитуды является открытой, что в свою очередь мотивирует проведение новых исследований.

2. Постановка задачи

По измерению сигнала (1.1) ставится задача синтеза алгоритма идентификации параметра ω при следующих предположениях.

Предположение 1. Функция $\omega(t)$ является выходом линейного генератора

$$(2.1) \quad \omega = h^T \xi,$$

$$(2.2) \quad \dot{\xi} = \Gamma \xi,$$

где параметры вектора h и матрицы Γ являются известными числами, но начальные условия вектора ξ неизвестны.

Предположение 2. Функция $\alpha(t)$ является выходом линейного генератора

$$(2.3) \quad \alpha = r^T \eta,$$

$$(2.4) \quad \dot{\eta} = G \eta,$$

где параметры вектора r и матрицы G являются известными числами, но начальные условия вектора η неизвестны.

3. Основной результат

Для синтеза алгоритма оценивания неизвестной нестационарной функции $\omega(t)$ синусоидального сигнала (1.1) будем использовать обобщенный подход

к синтезу наблюдателей, основанный на оценке параметров (GREBO — Generalized parameter estimation-based observers) [16]. Первым шагом является преобразование исходной нелинейной модели вида (1.1) к линейной регрессии, параметры которой могут быть оценены с использованием, например, стандартного градиентного подхода (см., например, [17]) или метода динамического расширения регрессора и смешивания (DREM — Dynamic regressor extension and mixing) [18].

Для преобразования исходной нелинейной по параметру ω модели (1.1) продифференцируем сигнал $y(t) = \alpha(t) \sin(\omega(t) + \varphi)$ два раза. Для первой производной (1.1) имеем

$$\dot{y} = \dot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + \alpha \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega}$$

или в более удобном виде

$$(3.1) \quad \dot{y} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} y + \alpha \dot{\omega} \cos(\omega + \varphi).$$

Для второй производной получаем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + \dot{\alpha} \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega} + \dot{\alpha} \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega} - \\ &\quad - \alpha \sin(\omega + \varphi) \dot{\omega}^2 + \alpha \cos(\omega + \varphi) \ddot{\omega} = \\ &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + 2\dot{\alpha} \cos(\omega + \varphi) \dot{\omega} - \underbrace{\alpha \sin(\omega + \varphi)}_y \dot{\omega}^2 + \alpha \cos(\omega + \varphi) \ddot{\omega} = \\ &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + 2\dot{\alpha} \dot{\omega} \cos(\omega + \varphi) - \dot{\omega}^2 y + \alpha \ddot{\omega} \cos(\omega + \varphi). \end{aligned}$$

Подставим в (3.2) выражение для $\cos(\omega + \varphi) = \frac{\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y}{\alpha^2 \dot{\omega}}$, которое можно получить из (3.1),

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{\alpha} \sin(\omega + \varphi) + 2\dot{\alpha} \phi \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha^2 \dot{\omega}} - \dot{\omega}^2 y + \dot{\omega} \ddot{\omega} \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha^2 \dot{\omega}} = \\ &= \ddot{\alpha} \underbrace{\sin(\omega + \varphi)}_{\frac{y}{\alpha}} + 2\dot{\alpha} \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha^2} - \dot{\omega}^2 y + \ddot{\omega} \frac{(\alpha \dot{y} - \dot{\alpha} y)}{\alpha \dot{\omega}} = \\ &= \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} y + \frac{2\dot{\alpha} \phi}{\alpha^2} \dot{y} - \frac{2\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} y - \dot{\omega}^2 y + \frac{\ddot{\omega} \phi}{\phi \dot{\omega}} \dot{y} - \frac{\ddot{\omega} \dot{\alpha}}{\alpha \dot{\omega}} y = \\ &= \left(\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{2\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - \dot{\omega}^2 - \frac{\dot{\alpha} \ddot{\omega}}{\alpha \dot{\omega}} \right) y + \left(\frac{2\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\ddot{\omega}}{\dot{\omega}} \right) \dot{y}. \end{aligned}$$

После выполнения простейших математических преобразований имеем

$$(3.4) \quad \alpha^2 \dot{\omega} \ddot{y} = (\alpha \ddot{\alpha} \dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2 \dot{\omega} - \alpha^2 \dot{\omega}^3 - \alpha \dot{\alpha} \ddot{\omega}) y + (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \dot{y}.$$

Для вывода линейной регрессионной модели дважды профильтруем левую и правую части выражения (3.4) с использованием аperiodического звена первого порядка $\frac{1}{(p+1)}$. При выполнении математических преобразований будем использовать лемму о перестановке (“swapping lemma” [17]).

Шаг 1. Пропустим левую часть (3.4) через фильтр $\frac{1}{(p+1)}$ и получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p+1} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \dot{y}] &= (\alpha^2 \dot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{y}] - \frac{1}{p+1} \left[p (\alpha^2 \dot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{y}] \right] = \\
&= (\alpha^2 \dot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [\dot{y}]}_{\dot{q}_1} - \frac{1}{p+1} \left[(2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [\dot{y}]}_{\dot{q}_1} \right] = \\
&= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \frac{1}{p+1} [(2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \dot{q}_1] = \\
&= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \left((2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{q}_1] - \frac{1}{p+1} \left[p (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{q}_1] \right] \right) = \\
&= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \left((2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [q_1]}_{q_2} - \frac{1}{p+1} \left[p (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{p+1} [q_1]}_{q_2} \right] \right) = \\
&= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - \left((2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2 - \frac{1}{p+1} [(p (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega}) + p (\alpha^2 \ddot{\omega})) q_2] \right) = \\
&= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2 + \frac{1}{p+1} [(2\dot{\alpha}^2 \dot{\omega} + 2\alpha \ddot{\alpha} \dot{\omega} + 4\alpha \dot{\alpha} \ddot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2],
\end{aligned}$$

где $p = d/dt$ — оператор дифференцирования, а функции q_1 и q_2 имеют вид

$$(3.5) \quad \begin{cases} q_1 = \frac{p}{p+1} y, \\ q_2 = \frac{p}{p+1} q_1. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{p+1} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \ddot{y}] &= \alpha^2 \dot{\omega} \dot{q}_1 - (2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2 + \\ &+ \frac{1}{p+1} [(2\dot{\alpha}^2 \dot{\omega} + 2\alpha \ddot{\alpha} \dot{\omega} + 4\alpha \dot{\alpha} \ddot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2]. \end{aligned}$$

Шаг 2. Пропустим (3.6) через фильтр $\frac{1}{(p+1)}$:

$$\frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \ddot{y}] = \frac{1}{(p+1)} [(\alpha^2 \dot{\omega}) \dot{q}_1] - \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha \dot{\alpha} \dot{\omega} + \alpha^2 \ddot{\omega}) q_2] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] = \\
& = (\alpha^2\dot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{(p+1)} [q_1]}_{q_2} - \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] - \\
& \quad - \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] = \\
& \quad = \alpha^2\dot{\omega}q_2 - \frac{2}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& \quad + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2].
\end{aligned}$$

Таким образом, для дважды профильтрованной левой части (3.4) имеем

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad & \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha^2\dot{\omega}) \dot{y}] = \alpha^2\dot{\omega}q_2 - \frac{2}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& \quad + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2].
\end{aligned}$$

Шаг 3. Пропустим дважды правую часть (3.4) через фильтр $\frac{1}{(p+1)}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y + (2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \dot{y}] = \\
& = \frac{1}{(p+1)} \left[\frac{1}{(p+1)} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y + (2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \dot{y}] \right] = \\
& \quad = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \frac{1}{(p+1)} [\dot{y}] - \frac{1}{(p+1)} \left[p(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \frac{1}{p+1} [\dot{y}] \right] \right] = \\
& \quad = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{(p+1)} [y]}_{q_1} - \frac{1}{(p+1)} \left[p(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \underbrace{\frac{p}{(p+1)} [y]}_{q_1} \right] \right] = \\
& \quad = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1 - \frac{1}{(p+1)} [p(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] \right] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} \left[(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1 - \frac{1}{(p+1)} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] \right] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] - \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1].
\end{aligned}$$

Таким образом, после выполнения преобразований, имеем

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad & \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y + (2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) \dot{y}] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] - \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1].
\end{aligned}$$

После объединения (3.7) и (3.8) для дважды профильтрованного уравнения (3.4) имеем

$$\begin{aligned}
(3.9) \quad & \alpha^2\dot{\omega}q_2 - \frac{2}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] + \\
& + \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_2] = \\
& = \frac{1}{(p+1)^2} [(\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} - 2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} - \alpha^2\dot{\omega}^3 - \alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega}) y] + \\
& + \frac{1}{(p+1)} [(2\alpha\dot{\alpha}\dot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1] - \frac{1}{(p+1)^2} [(2\dot{\alpha}^2\dot{\omega} + 2\alpha\ddot{\alpha}\dot{\omega} + 4\alpha\dot{\alpha}\ddot{\omega} + \alpha^2\ddot{\omega}) q_1].
\end{aligned}$$

Хорошо известно, что в силу предположений 1 и 2 функции $\alpha(t)$ и $\omega(t)$ могут быть записаны в виде

$$(3.10) \quad \omega = h^T e^{\Gamma t} \xi_0,$$

$$(3.11) \quad \alpha = r^T e^{Gt} \eta_0,$$

где ξ_0 и η_0 — векторы неизвестных постоянных параметров.

Из (3.10) и (3.11) легко получить

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= h^T \Gamma e^{\Gamma t} \xi_0, & \ddot{\omega} &= h^T \Gamma^2 e^{\Gamma t} \xi_0, & \dot{\omega} &= h^T \Gamma^3 e^{\Gamma t} \xi_0, \\
\dot{\alpha} &= r^T G e^{Gt} \eta_0 & \text{и} & & \ddot{\alpha} &= r^T G^2 e^{Gt} \eta_0,
\end{aligned}$$

откуда для уравнения (3.9) получаем линейную регрессионную модель относительно векторов неизвестных постоянных параметров ξ_0 и η_0 .

Для более наглядного понимания процедуры синтеза алгоритма оценивания функции $\omega(t)$ рассмотрим пример.

4. Пример

Прежде всего предположим, что α — неизвестный постоянный параметр. Также будем допускать, что функция $\omega(t)$ изменяется по гармоническому закону, т.е. формируется с помощью автономного генератора вида

$$(4.1) \quad \omega = h^T \xi,$$

$$(4.2) \quad \dot{\xi} = \Gamma \xi,$$

где $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}$, $h^T = [1 \ 0]$.

В соответствии с принятым предположением относительно неизвестных параметров выражение (3.9) можно упростить и записать в виде

$$(4.3) \quad \dot{\omega} q_2 = \frac{1}{(p+1)} [\ddot{\omega}(2q_2 + q_1)] - \frac{1}{(p+1)^2} [\ddot{\omega}(q_2 + q_1) + \dot{\omega}^3 y].$$

Введем вспомогательную систему вида (см. [16])

$$(4.4) \quad \hat{\omega} = h^T \xi_\omega,$$

$$(4.5) \quad \dot{\xi}_\omega = \Gamma \xi_\omega.$$

Рассмотрим уравнение ошибки вида

$$(4.6) \quad \varepsilon = \xi_\omega - \xi,$$

тогда для производной от (4.6) имеем

$$(4.7) \quad \dot{\varepsilon} = \Gamma \varepsilon.$$

Решение дифференциального уравнения (4.2) имеет вид (см., например, [19])

$$\varepsilon = e^{\Gamma t} \varepsilon(0) = \Phi \varepsilon(0) = \Phi \Theta,$$

где Φ — фундаментальная матрица, $\dot{\Phi} = \Gamma \Phi$, $\Phi = I_{2 \times 2}$, $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ — неизвестные постоянные параметры, которые необходимо найти.

Если начальные условия системы (4.4), (4.5) нулевые, то неизвестный вектор Θ является вектором начальных условий системы (4.1), (4.2):

$$\varepsilon(0) = \xi_\omega(0) - \xi_0 = -\xi_0.$$

Найдем производные сигнала (4.4)

$$(4.8) \quad \hat{\omega} = h^T \Phi \Theta,$$

$$(4.9) \quad \dot{\hat{\omega}} = h^T \dot{\Phi} \Theta = h^T \Gamma \Phi \Theta = \Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2,$$

$$(4.10) \quad \ddot{\hat{\omega}} = h^T \Gamma^2 \Phi \Theta = -\gamma h^T \Phi \Theta = \gamma(\Phi_{11} \theta_1 + \Phi_{12} \theta_2),$$

$$(4.11) \quad \dddot{\hat{\omega}} = h^T \Gamma^3 \Phi \Theta = -\gamma h^T \Gamma \Phi \Theta = \gamma(\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2).$$

Подставляя выражения (4.8)–(4.10) в (4.3), получаем

$$(4.12) \quad (\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2) q_2 = \frac{-\gamma}{(p+1)} [(\Phi_{11} \theta_1 + \Phi_{12} \theta_2)(2q_2 + q_1)] + \\ + \frac{1}{(p+1)^2} \left[\gamma(\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2)(q_2 + q_1) - (\Phi_{21} \theta_1 + \Phi_{22} \theta_2)^3 y \right].$$

Таким образом, регрессионная модель принимает вид

$$(4.13) \quad z = m^T \Theta,$$

$$\text{где } z = \Phi_{21} q_2 + \frac{\gamma}{(p+1)} \Phi_{11} (2q_2 + q_1) - \frac{1}{(p+1)^2} \gamma \Phi_{21} (q_2 + q_1),$$

$$m = \begin{bmatrix} -\Phi_{22} q_2 - \frac{1}{(p+1)} \gamma \Phi_{12} (2q_2 + q_1) + \frac{1}{(p+1)^2} \gamma \Phi_{22} (q_2 + q_1) \\ -\frac{1}{(p+1)^2} \Phi_{21}^3 y \\ -\frac{1}{(p+1)^2} 3\Phi_{21}^2 \Phi_{22} y \\ -\frac{1}{(p+1)^2} 3\Phi_{21} \Phi_{22}^2 y \\ -\frac{1}{(p+1)^2} \Phi_{22}^3 y \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\theta_2}{\theta_1} \\ \theta_1^2 \\ \theta_1 \theta_2 \\ \theta_2^2 \\ \frac{\theta_2^3}{\theta_1} \end{bmatrix}.$$

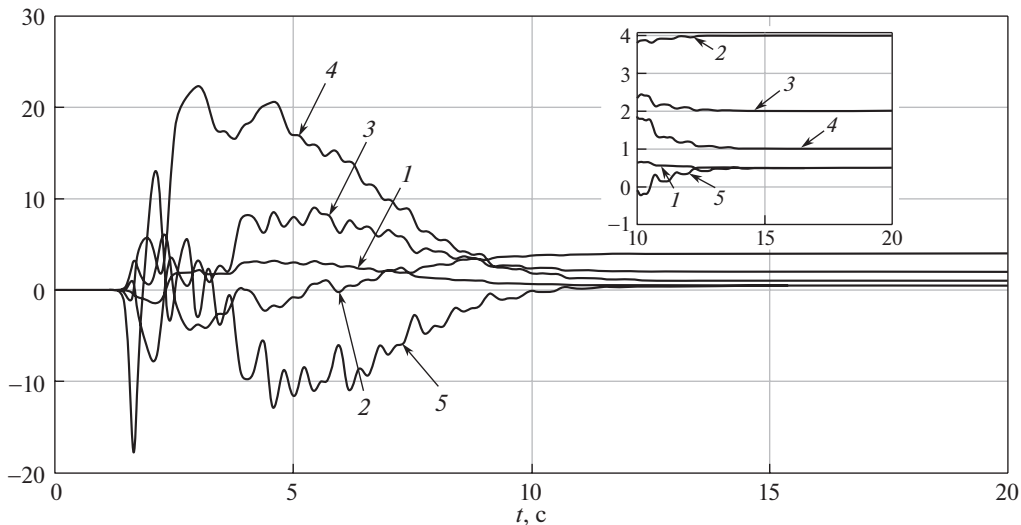


Рис. 1. Графики оценок неизвестных параметров регрессионной модели (4.13): 1 – параметр $\frac{\theta_2}{\theta_1}$, 2 – параметр θ_1^2 , 3 – параметр $\theta_1\theta_2$, 4 – параметр θ_2^2 , 5 – параметр $\frac{\theta_2^3}{\theta_1}$.

Для идентификации постоянных неизвестных параметром модели (4.13) применим метод DREM. Для этого умножим левую и правую части (4.13) слева на m :

$$(4.14) \quad mz = mm^T \Theta.$$

Применим к (4.14) вспомогательный линейный фильтр $\frac{\lambda}{p+\lambda}$, тогда регрессионная модель (4.14) в новом базисе примет вид

$$(4.15) \quad Y = \Omega \Theta,$$

где Y и Ω являются решением дифференциальных уравнений

$$(4.16) \quad \dot{Y} = -\lambda Y + \lambda mz,$$

$$(4.17) \quad \dot{\Omega} = -\lambda \Omega + \lambda mm^T.$$

Преобразуем регрессионную модель (4.15) к виду

$$(4.18) \quad \Upsilon = \Delta \Theta,$$

где $\Upsilon = adj \Omega Y$, $adj \Omega$ – присоединенная матрица для Ω , $\Delta = \det \Omega$.

Оценку параметров регрессионной модели (4.18) выполним с помощью стандартного градиентного алгоритма идентификации вида

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\beta \Delta (\Delta \hat{\Theta} - \Upsilon).$$

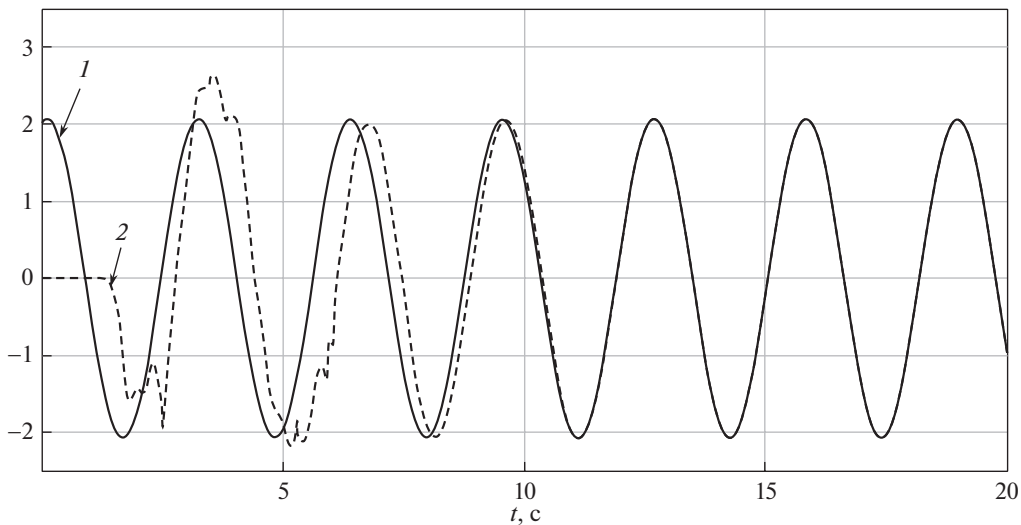


Рис. 2. Графики 1 – неизвестного параметра $\omega(t)$ и 2 – оценки неизвестного параметра $\hat{\omega}(t)$ для начальных условий $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \hat{\theta}_1 = 0, \hat{\theta}_2 = 0$.

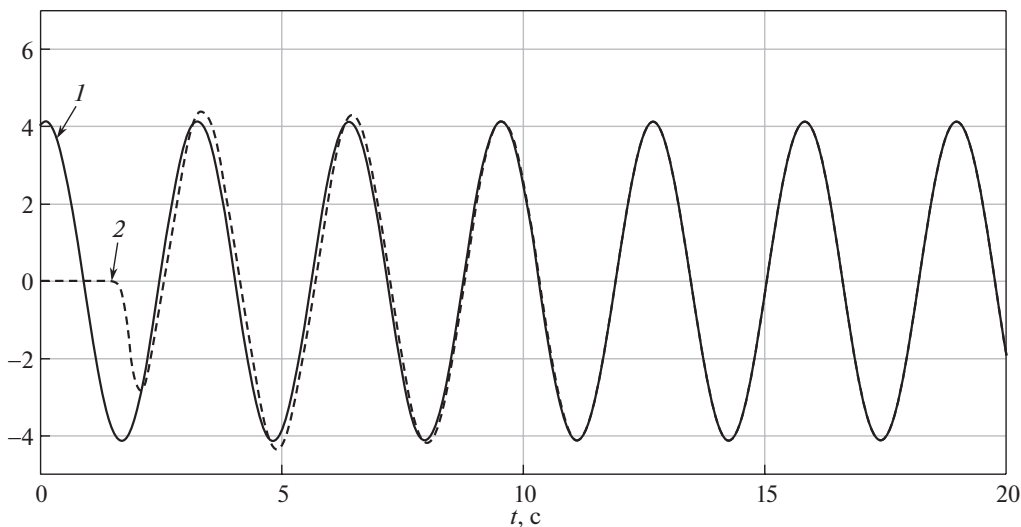


Рис. 3. Графики 1 – неизвестного параметра $\omega(t)$ и 2 – оценки неизвестного параметра $\hat{\omega}(t)$ для начальных условий $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2, \hat{\theta}_1 = 0, \hat{\theta}_2 = 0$.

Проведем компьютерное моделирование для разных начальных значений ξ_0 и γ . Моделирование проводилось для функции $\omega(t)$, являющейся выходом генератора вида (4.1) и (4.2) с начальными условиями θ_1 и θ_2 . Моделирование выполнено для разных значений неизвестной функции $\omega(t)$, а также при различных значениях начальных условий θ_1 и θ_2 . На рис. 1 приведены результаты моделирования для случая $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$. На рис. 2 приведены результаты моделирования $\omega(t)$ и $\hat{\omega}(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$,

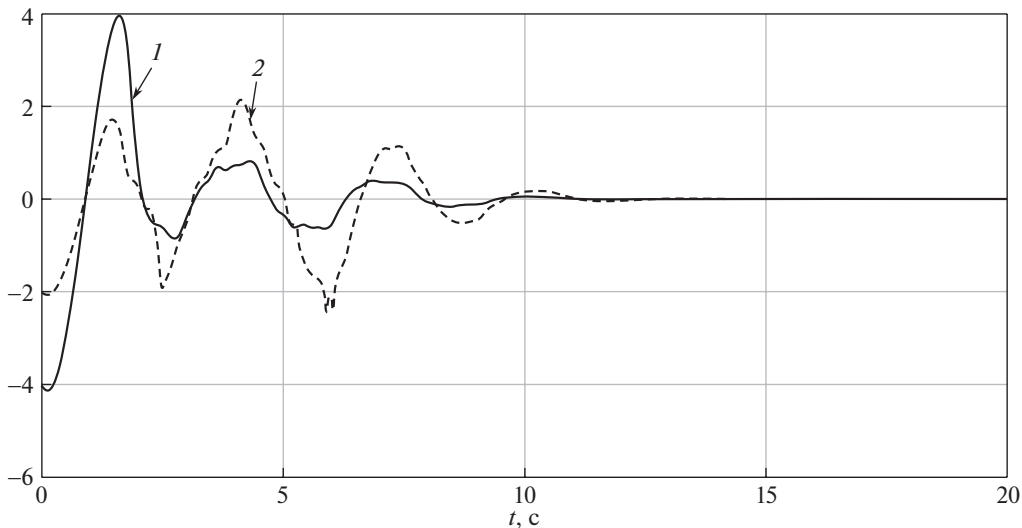


Рис. 4. Графики ошибки $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при различных начальных условиях: 1 – при $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2$, 2 – при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$.

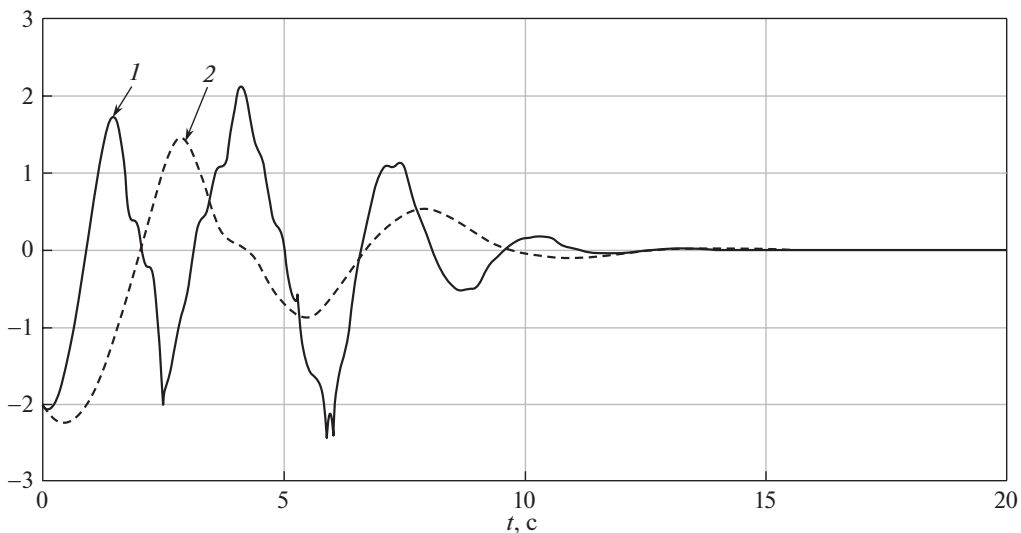


Рис. 5. Графики ошибки $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при различных частотах параметра γ : 1 – при $\gamma = 4$, 2 – при $\gamma = 1$.

$\lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$. На рис. 3 приведены результаты моделирования $\omega(t)$ и $\hat{\omega}(t)$ при $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2, \lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$. На рис. 4 приведены графики ошибок $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при $\lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$ для случаев $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$ и $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2$. На рис. 5 приведены графики ошибок $\hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при $\theta_1 = 4, \theta_2 = 2, \lambda = 1, \gamma = 4$ и $\beta = 10^{23}$ для случаев $\gamma = 1$ и $\gamma = 4$. На рис. 6 и 7 приведен график доступного прямым измерениям сигнала $y(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1$, для $\gamma = 1$ и $\gamma = 4$ соответственно.

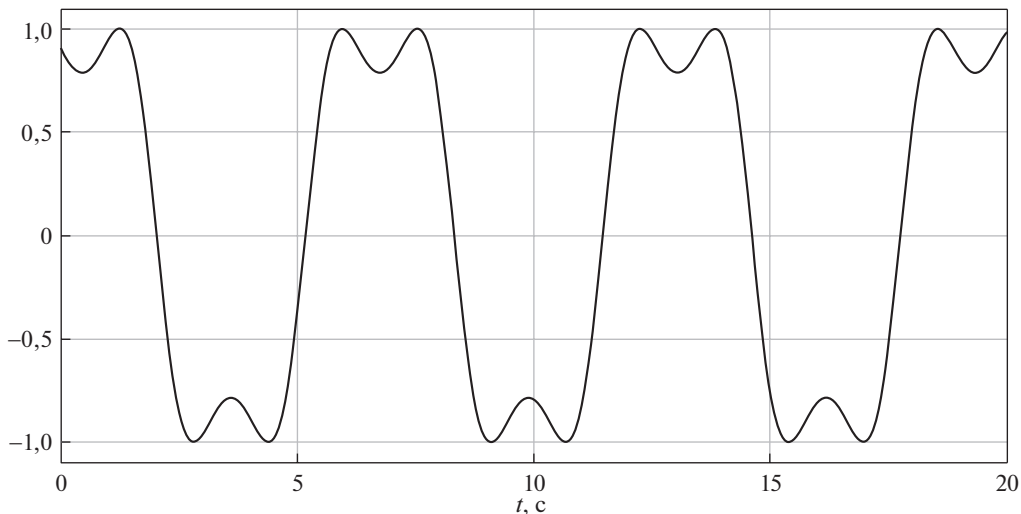


Рис. 6. График сигнала $y(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \gamma = 1$.

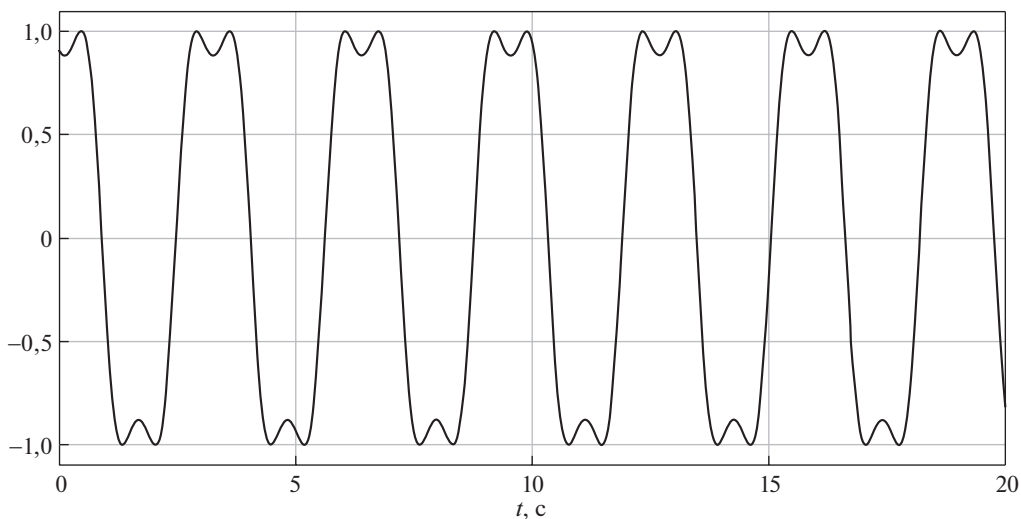


Рис. 7. График сигнала $y(t)$ при $\theta_1 = 2, \theta_2 = 1, \gamma = 4$.

Как видно из результатов моделирования, приведенных на рис. 1, оценки неизвестных параметров регрессионной модели сходятся к истинным значениям. Результаты моделирования, приведенные на рис. 2 и 3, демонстрируют сходимость оценки неизвестного сигнала $\hat{\omega}(t)$, полученного на основе оценки неизвестных параметров и истинной функции $\omega(t)$ при различных начальных условиях функции $\omega(t)$. Результаты моделирования, приведенные на рис. 4 и 5, иллюстрируют сходимость ошибки оценки неизвестной функции $e(t) = \hat{\omega}(t) - \omega(t)$ при различных начальных условиях на генераторе функции $\omega(t)$ (рис. 4) и различных значениях коэффициентов γ модели генерации

параметра $\omega(t)$ (рис. 5). Таким образом, можно сделать вывод, что алгоритм оценки, предложенный в статье, успешно решает поставленную задачу.

Из результатов компьютерного моделирования следует сходимость оценки $\hat{\omega}(t)$ к $\omega(t)$ для различных значений ξ_0 и γ .

Замечание. В рамках данного примера была наглядно продемонстрирована процедура синтеза алгоритма идентификации нестационарного параметра $\omega(t)$, которая может показаться сложной и достаточно громоздкой. В этом смысле представляется важным обсудить еще один возможный подход к идентификации $\omega(t)$, базирующийся на фиксации $2n + 1$ различных моментов времени t_k ($k = 1, 2, \dots, 2n + 1$) измеряемого сигнала $y(t)$ и, как следствие, генерации системы $2n + 1$ уравнений с $2n + 1$ неизвестными параметрами. Далее на базе системы $2n + 1$ уравнений с $2n + 1$ неизвестными можно составить квадратичную функцию и составить программу, ее минимизирующую. Действительно, такой подход имеет место быть, но остается открытым вопрос о выборе различных моментов времени t_k . На базе представленного примера покажем, что выбор t_k является не тривиальной задачей.

Для простоты примем $\alpha = \gamma = 1$. Тогда уравнение (1.1) с учетом динамики (2.1), (2.2) примет вид

$$(4.19) \quad y(t) = \sin(h^T e^{\Gamma t} \xi_0 + \varphi),$$

$$\text{где } e^{\Gamma t} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Тогда для (4.19) имеем

$$(4.20) \quad y(t) = \sin(\xi_{10} \cos(t) + \xi_{20} \sin(t) + \varphi),$$

где ξ_{10} и ξ_{20} неизвестные начальные условия вектора ξ_0 .

Подставляя в (4.20) значения t_k , получаем

$$(4.21) \quad y_k = \sin(\xi_{10} \cos(t_k) + \xi_{20} \sin(t_k) + \varphi) = \sin(\xi_{10} r_{1k} + \xi_{20} r_{2k} + \varphi),$$

где $r_{1k} = \cos(t_k)$ и $r_{2k} = \sin(t_k)$.

Из уравнения (4.21) видно, что в случае неизвестных чисел ξ_{10} , ξ_{20} и φ выбор $2n + 1$ значений y_k , обеспечивающий $2n + 1$ линейно независимых уравнений с $2n + 1$ неизвестными параметрами, является нетривиальной задачей. Остается открытым вопрос о выборе t_k так, чтобы сигнал y_k , например, не был равен нулю. Выберем для примера $t_k = \frac{k\pi}{2}$, тогда

$$y_k = \sin(h^T e^{\Gamma t_k} \xi + \varphi) = \sin\left(\xi_{10} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \xi_{20} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \varphi\right).$$

Предположим, что $\xi_{20} = -\varphi$, $\xi_{10} = \varphi$ и $\varphi = \pi$. Тогда для всех значений t_k сигнал y_k будет иметь нулевые значения и оценка ξ_{10} , ξ_{20} и φ не представляется возможной. Таким образом, данный подход представляет несомненный интерес, но основную сложность вызывает процедура выбора момента времени t_k .

5. Заключение

В статье предложен новый подход к решению задачи оценивания нестационарного параметра синусоидального сигнала (1.1) при условии, что амплитуда также является переменной функцией времени. Данная задача была решена при выполнении предположений вида (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4).

В статье представлен пример, разъясняющий на конкретном случае процедуру синтеза алгоритма оценивания, а также приведены результаты компьютерного моделирования, иллюстрирующие достижение заданной цели для различных параметров модели изменения параметра.

В качестве дальнейшего развития предложенного результата видится его расширение на случай неизвестных матриц уравнений (2.2) и (2.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобцов А.А., Колубин С.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // *АиТ.* 2010. № 11. С. 136–148.
Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Multi-harmonic Disturbances in Nonlinear Plants with Delayed Control // *Autom. Remote Control.* 2010. V. 71. No. 11. P. 2383–2394.
2. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *АиТ.* 2009. № 3. С. 114–122.
Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. Compensation of Unknown Sinusoidal Disturbances in Linear Plants of Arbitrary Relative Degree // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 449–456.
3. *Пыркин А.А., Бобцов А.А., Ведяков А.А., Колубин С.А.* Оценивание параметров полигармонического сигнала // *АиТ.* 2015. № 8. С. 94–114.
Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Vedyakov A.A., Kolyubin S.A. Estimation of Polyharmonic Signal Parameters // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 8. P. 1400–1416.
4. *Бобцов А.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А.* Компенсация гармонического возмущения для параметрически и функционально не определенного нелинейного объекта // *АиТ.* 2011. № 1. С. 121–129.
Bobtsov A.A., Kremlev A.S., Pyrkin A.A. Compensation of Harmonic Disturbances in Nonlinear Plants with Parametric and Functional Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 1. P. 111–118.
5. *Chen B., Pin G., Ng W.M., Lee C.K., Hui S.Y.R., Parisini T.* An Adaptive Observer-based Switched Methodology for the Identification of a Perturbed Sinusoidal Signal: Theory and Experiments // *IEEE Trans. Signal Process.* 2014. V. 62. P. 6355–6365.
6. *Fedele G., Ferrise A., D'Aquila G.* A Global Frequency Estimator Based on a Frequency-locked-loop Filter // *Proc. Amer. Control Conf., 2016–July.* 2016. art. no. 7526776. P. 7001–7006.
7. *Marino R., Tomei P.* Frequency Estimation of Periodic Signals // *Eur. Control Conf., ECC 2014.* 2014. art. no. 6862212. P. 7–12.

8. *Hsu L., Ortega R., Damm G.* A Globally Convergent Frequency Estimator // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44. No. 4. P. 698–713.
9. *Pin G., Chen B., Parisini T.* Robust Finite-time Estimation of Biased Sinusoidal Signals: A Volterra Operators Approach // Automatica. 2017. V. 77. P. 120–132.
10. *Низовцев С.И., Шаветов С.В., Пыркин А.А.* Алгоритм оценивания переменной частоты синусоидального сигнала // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64. № 9. С. 789–793.
11. *Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Идентификация линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала // Научн.-технич. вестн. информационных технологий, механики и оптики. 2012. Т. 77. № 1. С. 28–32.
12. *Коротина М.М., Арановский С.В., Бобцов А.А.* Оценивание параметров синусоидального сигнала со степенной функцией частоты // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63. № 6. С. 507–514.
13. *Liu D.-Y., Gibaru O., Perruquetti W.* Parameters Estimation of a Noisy Sinusoidal Signal with Time-varying Amplitude // 19th Mediterranean Conf. on Control and Automation, MED 2011. 2011. art. no. 5983186. P. 570–575.
14. *Kudoh N., Takeuchi Y., Tadokoro Y.* A New LMS Based Fourier Analyzer for Sinusoidal Signals with Time-varying Amplitude // IEEE Region 10 Annual Int. Conf. Proc./TENCON, 2. 2002. P. 913–916.
15. *Vedyakov A.A., VEDIKOVA A.O., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Aranovskiy S.V.* A Globally Convergent Frequency Estimator of a Sinusoidal Signal with a Time-varying Amplitude // Eur. J. of Control. 2017. V. 38. P. 32–38.
16. *Ortega R., Bobtsov A., Nikolaev N., Schiffer J., Dochain D.* Generalized Parameter Estimation-based Observers: Application to Power Systems and Chemical-Biological Reactors // Automatica. 2021. V. 129. P. 109635.
17. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive control: stability, convergence and robustness. Courier Dover Publications, 2011.
18. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Parameters Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing // Amer. Control Conf. 2016.
19. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.

Поступила в редакцию 12.10.2021

После доработки 09.03.2022

Принята к публикации 31.03.2022