

## Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2022 г. В.Е. КРИВОНОЖКО, д-р физ.-мат. наук  
(KrivonozhkoVE@mail.ru)  
(Национальный исследовательский технологический университет  
«МИСиС», Москва),  
А.П. АФАНАСЬЕВ, д-р физ.-мат. наук (apa@iitp.ru)  
(Институт проблем передачи информации  
имени А.А. Харкевича РАН, Москва,  
Российский университет дружбы народов, Москва),  
Ф.Р. ФОРСУНД, д-р экон. наук (Finn.Forsund@econ.uio.no)  
(Университет Осло, Норвегия),  
А.В. ЛЫЧЕВ, канд. физ.-мат. наук (Lychhev@misis.ru)  
(Национальный исследовательский технологический университет  
«МИСиС», Москва)

### СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ ЭФФЕКТА МАСШТАБА В НЕРАДИАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ АНАЛИЗА СРЕДЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ<sup>1</sup>

Подход анализа среды функционирования (АСФ) в последние годы активно развивается и используется для анализа деятельности сложных объектов (регионов, финансовых институтов, производственных объектов и т.д.). Важную роль при таком анализе играет вычисление различных показателей деятельности объектов: эффекта масштаба, меры эффективности, предельных коэффициентов замещения, трансформации и т.д. В явном виде зависимости между переменными в моделях АСФ не заданы, поэтому для вычисления этих показателей используют специальные оптимизационные модели. Большое внимание в научной литературе уделяется вычислению эффекта масштаба. В данной работе даются описание и сравнение нескольких наиболее известных методов для вычисления эффекта масштаба. Вычислительные эксперименты показывают, что подход, предложенный авторами, при определенных условиях имеет преимущества перед другими методами.

*Ключевые слова:* анализ среды функционирования, эффект масштаба, нерадиальная модель, мера эффективности.

DOI: 10.31857/S0005231022070091, EDN: AFMFXJ

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01353).

## 1. Введение

Подход анализа среды функционирования (АСФ) (на английском языке этот термин звучит как Data Envelopment Analysis — DEA) появился в семидесятых годах прошлого столетия [1, 2] для анализа эффективности сложных социально-экономических (производственных) объектов. На практике такой подход сводится к решению большого семейства оптимизационных задач, по крайней мере одной задачи для каждого наблюдаемого производственного объекта. В настоящее время данный подход активно развивается во всем мире, каждый год проводятся две-три международных конференции на данную тему. Ведущие международные журналы посвящают данной теме специальные выпуски. Модели АСФ дают возможность находить многие важные характеристики поведения производственных объектов. В частности, можно находить эталонные множества объектов и вычислять на их основе эффект масштаба. Эти величины определяются на основе функции трансформации (обобщение производственной функции), которая отображает множество входных (затратных) показателей во множество выходных показателей, причем такая функция предполагается дифференцируемой по всем переменным (см., например, [3–5]).

Рассмотрим производственную функцию  $y = f(x)$ , определяющую максимальный выпуск продукта  $y$  при заданных затратах  $x$ , причем в данном случае  $x$  и  $y$  считаются скалярными величинами.

На рис. 1 показан простейший вариант производственной функции для двумерного случая. В реальности вид этой функции гораздо сложнее. В частности, в подходе АСФ функция многомерна, вектор затрат отображается в вектор выпуска, функция многозначна, т.е. одному вектору соответствует целое множество возможных векторов выпуска. Граница множества производственных возможностей негладкая, поэтому потребуются специальные построения и алгоритмы для того, чтобы вычислять и использовать производственную функцию в подходе АСФ.

Предположим, что функция  $f(x)$  дифференцируема и монотонна, см. рис. 1.

Рассмотрим величину

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

которая называется эластичностью масштаба или просто эластичностью. Величина (1) позволяет определить, на каком участке своего развития находится производственный объект.

Если в некоторой точке выполняется соотношение  $\varepsilon > 1$  (точка  $A$  на рис. 1), то говорят, что в данной точке наблюдается увеличение эффекта масштаба. При этом в точке относительный прирост выпуска продукции больше относительного прироста затрат ресурсов на этот выпуск, т.е. производство развивается интенсивно.

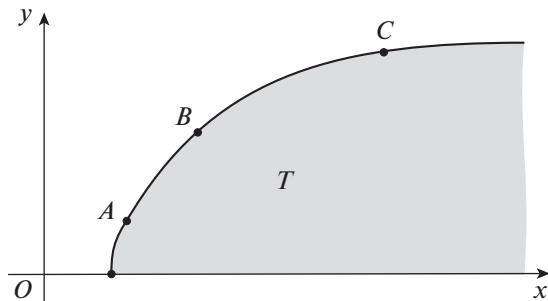


Рис. 1. Производственная функция.

Если  $\varepsilon < 1$  (точка  $C$  на рис. 1), то говорят, что в данной точке наблюдается убывание эффекта масштаба, или относительный прирост выпуска продукции меньше относительного прироста затрат на этот выпуск, другими словами, производство находится на экстенсивном участке своего развития.

Наконец, если выполняется условие  $\varepsilon = 1$  (точка  $B$  на рис. 1), то говорят, что наблюдается постоянный эффект масштаба. При этом относительный прирост выпуска продукта равняется относительному увеличению затрат на этот выпуск.

В экономике понятие эффект масштаба распространяется естественным образом на модели со многими затратными (входными) параметрами и одним выходным параметром. В данном случае рассматривается зависимость выпуска продукции от пропорционального изменения всех затратных параметров

$$(2) \quad y = f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_m).$$

Тогда эластичность находится, как в двумерной модели:

$$(3) \quad \varepsilon(\alpha) = \frac{\alpha}{y} \cdot \frac{dy}{d\alpha}.$$

Отсюда определяется эффект масштаба. Говорят, что наблюдается увеличение эффекта масштаба, если  $\varepsilon(\alpha) > 1$ , убывание эффекта масштаба, если  $\varepsilon(\alpha) < 1$ , и постоянный эффект масштаба, если  $\varepsilon(\alpha) = 1$ .

Подход АСФ расширяет понятие производственной функции на модели со многими входными и выходными показателями [3, 5]. Таким образом, производственная функция трансформируется в производственную гиперповерхность, в этом случае принято говорить о производственном соответствии [6]. С целью изучения и анализа этой гиперповерхности строятся различные сечения [7].

Формально зависимость между входными и выходными показателями можно записать как

$$(4) \quad F(X, Y) = 0,$$

здесь  $X \in E^m$ ,  $Y \in E^r$ , функция  $F(X, Y)$  предполагается дифференцируемой по всем своим переменным. Соотношение (4) описывает в многомерном пространстве  $E^{m+r}$  гиперповерхность, на которой находятся эффективные точки.

В таких моделях эластичность масштаба определяется как маргинальный коэффициент, показывающий относительное пропорциональное изменение всех выходных параметров при малых относительных пропорциональных изменениях входных параметров в силу соотношения (4). Пропорциональное изменение входных и выходных параметров в окрестности точки  $(X, Y)$  запишется как

$$(5) \quad F(\alpha X, \beta(\alpha)Y) = 0.$$

Тогда эластичность масштаба определяется как

$$(6) \quad \varepsilon(X, Y) = \frac{\partial \beta(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отметим, что величина  $\beta$  в соотношениях (5) и (6) зависит также от точки  $(X, Y)$ , но чтобы не загромождать обозначения, писать этого не будем.

Продифференцируем по  $\alpha$  соотношение (5):

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial F(\alpha X, \beta(\alpha)Y)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(\alpha X, \beta(\alpha)Y)}{\partial \alpha x_i} x_i + \\ &+ \sum_{j=1}^r \frac{\partial F(\alpha X, \beta(\alpha)Y)}{\partial \beta y_j} y_j \frac{\partial \beta(\alpha)}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая без ограничения общности  $\alpha = 1$  и  $\beta = 1$ , получим эластичность масштаба в точке  $(X, Y)$

$$(8) \quad \varepsilon(X, Y) = \frac{\partial \beta(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = - \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\partial F(X, Y)}{\partial x_i} x_i}{\sum_{j=1}^r \frac{\partial F(X, Y)}{\partial y_j} y_j}.$$

В подходе АСФ множество производственных возможностей строится по реальным наблюдаемым данным в соответствии с определенными постулатами, при этом эффективная гиперповерхность этого множества будет непрерывна, но не везде дифференцируема. Более того, эта зависимость в явном виде не задается. В силу указанных причин эффект масштаба и эластичность вычисляются в АСФ косвенным образом. Для этого был предложен ряд методов на основе свойств модели АСФ [8, 9].

Далее, в теории АСФ была сделана попытка [10, 11] определять эффект масштаба сразу на целой грани на основе информации об эффекте масштаба

в вершинах грани. Дело в том, что современный оптимизатор выдает решение для моделей АСФ для неэффективного объекта в виде некоторого набора (базисных) эффективных объектов. Поэтому такой подход казался вполне обоснованным, тем более что грань определяется своими вершинами.

Однако, как оказывается, такой подход не всегда дает верный результат, так как используемое для решения задач оптимизации программное обеспечение может генерировать различные эталонные множества для одного объекта. В [12] был предложен двухэтапный метод для нахождения эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ. Тем не менее существуют модели, для которых этот метод может выдавать некорректные результаты. В [13, 14] был предложен метод для вычисления эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ, основанный на использовании сильных условий дополняющей нежесткости (СУДН) из теории оптимизации. Этот метод является вполне корректным с теоретической точки зрения, однако он может выдавать противоречивые результаты на практических задачах. Размер модели [13, 14] значительно увеличивается по сравнению со стандартной нерадиальной моделью АСФ из-за добавления ограничений в форме СУДН. Кроме того, некоторые ограничения в СУДН-моделях не имеют смысла с экономической точки зрения, так как в этих моделях складываются величины, измеренные в разных единицах. Все это негативно сказывается на вычислительных возможностях метода и приводит к появлению плохо обусловленных матриц в процессе решения.

В [15] был предложен метод, который преодолевает эти трудности. В этом методе решается несколько вспомогательных задач для того, чтобы найти все вершины минимальной грани, содержащей множество решений.

Нахождение минимальной грани играет важную роль в анализе поведения производственных объектов, в частности для измерения эффекта масштаба. В [16] был предложен другой метод для нахождения экстремальных точек минимальной грани. Этот метод основан на интересном результате из теории оптимизации, который дает возможность находить максимальное число положительных переменных в оптимальном решении задачи линейного программирования. В [16] утверждается, что их метод более эффективный, чем другие существующие методы по нахождению объектов, формирующих минимальную грань. Этот метод действительно представляет большой интерес, однако в [16] работа алгоритма иллюстрируется на примере с небольшим числом объектов, что не дает возможности судить о его эффективности. Поэтому авторы данной статьи ставят целью провести сравнение различных методов вычисления эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим множество из  $n$  наблюдаемых производственных объектов (ПО), деятельность которых необходимо оценить. Каждый ПО потребляет  $m$  входных продуктов и производит  $r$  выходных продуктов. Таким образом,  $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \geq 0$  является вектором входных параметров (затрат),

а  $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{rj}) \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , — вектором выходных параметров (выпуска). Предполагается, что каждый ПО имеет, по крайней мере, один положительный вход и один положительный выход.

Множество производственных возможностей  $T$  определяется как множество таких векторов  $(X, Y)$ , что вектор выпуска  $Y$  может быть произведен при векторе затрат  $X$ , т.е.  $T = \{(X, Y) \mid \text{выходной вектор } Y \geq 0 \text{ может быть получен при входном векторе } X \geq 0\}$ .

На основе наблюдаемых векторов  $(X_j, Y_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , множество производственных возможностей  $T$  эмпирически задается следующими постулатами.

*Постулат 1* (выпуклость). Если  $(X, Y) \in T$  и  $(X', Y') \in T$ , то  $(\lambda X + (1 - \lambda)X', \lambda Y + (1 - \lambda)Y') \in T$  для всех  $\lambda \in [0, 1]$ .

*Постулат 2* (монотонность). Если  $(X, Y) \in T$  и  $X' \geq X, Y' \leq Y$ , то  $(X', Y') \in T$ .

*Постулат 3* (минимальная экстраполяция). Множество  $T$  является пересечением всех множеств  $T'$ , удовлетворяющих постулатам 1 и 2, при условии, что  $(X_j, Y_j) \in T'$  для всех  $j = 1, \dots, n$ .

Таким образом, множество  $T$  строится как расширение по наблюдаемым производственным векторам  $(X_j, Y_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и определяет возможные, экономически допустимые векторы выпуска  $Y$  по векторам затрат  $X$ .

В алгебраическом виде множество производственных возможностей  $T$  запишется так:

$$(9) \quad T = \left\{ (X, Y) \mid X \geq \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j, Y \leq \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Нерадиальная модель АСФ может быть записана в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} \max h &= C^{+T} S^+ + C^{-T} S^-, \\ \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j + S^- &= X_o, \\ \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j - S^+ &= Y_o, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ S^- &= (s_1^-, \dots, s_m^-)^T \geq 0, \\ S^+ &= (s_1^+, \dots, s_r^+)^T \geq 0, \end{aligned}$$

где векторы  $S^- = (s_1^-, \dots, s_m^-)^T$  и  $S^+ = (s_1^+, \dots, s_r^+)^T$  являются векторами дополнительных переменных. Компоненты векторов целевой функции  $C^+$  и  $C^-$  определяются следующим образом:

$$c_i^- = \frac{1}{(m+r)R_i^-}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$c_k^+ = \frac{1}{(m+r)R_k^+}, \quad k = 1, \dots, r.$$

$$R_i^- = \max_{1 \leq j \leq n} x_{ij} - \min_{1 \leq j \leq n} x_{ij}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$R_k^+ = \max_{1 \leq j \leq n} y_{kj} - \min_{1 \leq j \leq n} y_{kj}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Коэффициенты определены таким образом, чтобы оптимальное решение было безразмерной величиной.

В модели (10) объект  $(X_o, Y_o)$  является любым объектом из множества  $(X_j, Y_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Мера эффективности определяется с помощью оптимального решения задачи (10) по следующей формуле [12]:

$$\Gamma = 1 - h^* = 1 - (C^{+T} S^{+*} + C^{-T} S^{-*}).$$

Если оптимальное значение  $h^*$  в модели (10) равняется нулю, то объект  $(X_o, Y_o)$  считается эффективным, если  $h^* > 0$ , тогда объект неэффективный.

Задача, двойственная к (10), записывается следующим образом:

$$(11) \quad \begin{aligned} \min \{ & v^T X_o - u^T Y_o + u_0 \}, \\ & v^T X_j - u^T Y_j + u_0 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ & v \geq C^-, \quad u \geq C^+, \end{aligned}$$

где  $v = (v_1, \dots, v_m)^T$  и  $u = (u_1, \dots, u_r)^T$  представляют собой векторы двойственных переменных, соответствующих первой и второй группе ограничений в модели (10),  $u_0$  является свободной переменной, соответствующей ограничению выпуклости.

В [12] был предложен метод для определения эффекта масштаба в нерадиальной модели (10). Сначала определяются решения  $(\lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$  и  $(v^*, u^*, u_0^*)$  пары взаимно двойственных задач (10) и (11) соответственно. Здесь  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)^T$ . Далее, если  $u_0^* < 0$ , то решается следующая задача:

$$(12) \quad \begin{aligned} \max u_0, \\ & v^T X_j - u^T Y_j - u_0 \geq 0, \quad j \neq o, \\ & v^T (X_o - S^{-*}) - u^T (Y_o + S^{+*}) - u_0 = 0, \\ & v \geq C^-, \\ & u \geq C^+, \\ & u_0 \leq 0. \end{aligned}$$

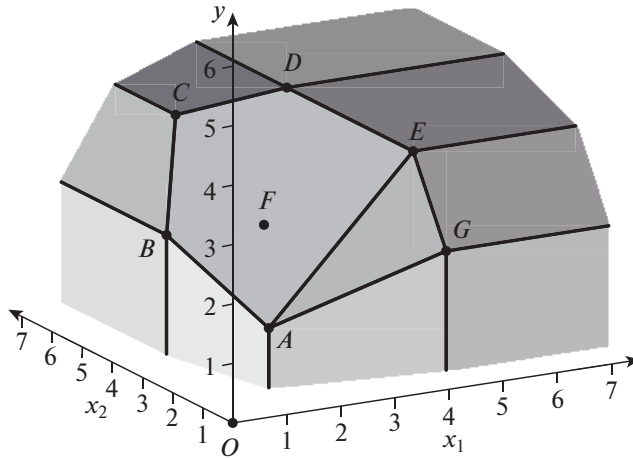


Рис. 2. Внутренняя точка  $F$  может быть представлена несколькими эталонными множествами.

Если в оптимальном решении двойственной задачи (11) переменная  $u_0^* > 0$ , тогда необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}
 & \min u_0, \\
 & v^T X_j - u^T Y_j + u_0 \geq 0, \quad j \neq o, \\
 & v^T (X_o - S^{-*}) - u^T (Y_o + S^{+*}) + u_0 = 0, \\
 & v \geq C^-, \\
 & u \geq C^+, \\
 & u_0 \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

В этих задачах оптимальные дополнительные переменные  $S^{-*}$ ,  $S^{+*}$  берутся из решения задачи (10).

Пусть  $(\hat{v}^*, \hat{u}^*, \hat{u}_0^*)$  является оптимальным решением задачи (12) или (13). Тогда эффект масштаба в точке  $(X_o - S^{-*}, Y_o + S^{+*})$  определяется исходя из следующих условий:

- а) если  $\hat{u}_0^* = 0$ , тогда наблюдается постоянный эффект масштаба;
- б) если  $u_0^* < 0$  и  $\hat{u}_0^* < 0$ , тогда наблюдается возрастающий эффект масштаба;
- в) если  $u_0^* > 0$  и  $\hat{u}_0^* > 0$ , тогда наблюдается убывающий эффект масштаба.

В [13, 14] было показано, что этот подход может генерировать некорректные результаты в некоторых случаях. Дело в том, что нерадиальные модели АСФ имеют ряд специфических свойств: а) для одного объекта может существовать несколько эталонных множеств; б) для эффективного объекта может существовать несколько опорных гиперплоскостей; в) для неэффективного объекта может существовать несколько проекций на эффективный



фронт. Все эти причины могут вызвать определенные трудности при измерении эффекта масштаба производственных объектов.

Напомним, что эталонным множеством объекта  $(X_o, Y_o)$  называется множество [10]

$$(14) \quad E_o = \{j \mid \lambda_j^* > 0, j = 1, \dots, n\},$$

где  $\lambda_j^*$  — оптимальные переменные задачи (10).

На рис. 2 показано, что внутренняя точка  $F$  грани может определяться несколькими вершинами грани и принадлежит нескольким эталонным множествам. Например, точка  $F$  на рис. 2 может принадлежать эталонному множеству или  $(A, E, C)$ , или  $(A, B, D)$ , или  $(A, B, E)$ .

### 3. Методы решения

В [15] был предложен двухэтапный подход для измерения эффекта масштаба в нерадиальных моделях. На первом этапе находится относительно внутренняя точка на оптимальной грани. Для этого используется специально разработанный метод. В [17] было доказано, что любая относительная внутренняя точка грани имеет такой же эффект масштаба, как и любая другая внутренняя точка этой же грани. На втором этапе предлагается находить эффект масштаба в относительно внутренней точке грани, найденной на первом этапе, используя при этом прямой метод [18, 19].

Множество оптимальных точек  $\Lambda^*$  в модели (10) (т.е. множество проекций объекта  $(X_o, Y_o)$  на эффективный фронт) расположено на границе множества производственных возможностей  $T$ . Множество  $\Lambda^*$  для модели (10) может быть записано в виде

$$(15) \quad \Lambda^* = \{(X, Y) \mid X = X_o - S^{-*}, Y = Y_o + S^{+*}\},$$

где  $(\lambda^*, S^{-*}, S^{+*})$  — оптимальное решение задачи (10).

Множество оптимальных решений  $\Lambda^*$  может принадлежать только пересечению некоторых граней множества  $T$ . Можно доказать, что существует единственная минимальная грань  $\Gamma_{\min}$ , которая содержит множество  $\Lambda^*$  [15].

Пусть задачи (10) и (11) решены симплекс методом и получены оптимальные переменные прямой  $\{\lambda_j^*, j = 1, \dots, n; S_i^{-*}, i = 1, \dots, m; S_k^{+*}, k = 1, \dots, r\}$  и двойственной задачи  $\{v_i^*, i = 1, \dots, m; u_k^*, k = 1, \dots, r; u_o^*\}$ .

Определим индексные множества, соответствующие двойственным переменным:

$$(16) \quad \begin{aligned} J^* &= \{j \mid v^{*T} X_j - u^{*T} Y_j + u_o^* = 0, j = 1, \dots, n\}, \\ J_v &= \{i \mid v_i^* = C_i^-, i = 1, \dots, m\}, \\ J_u &= \{k \mid u_k^* = C_k^+, k = 1, \dots, r\}. \end{aligned}$$

Введем индексное множество для прямого решения

$$(17) \quad I^* = \{j \mid \lambda_j^* > 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Переменные  $\lambda_j^*$ ,  $j \in I^*$  определяют только одну точку минимальной грани. Для нахождения всех точек, принадлежащих грани  $\Gamma_{\min}$ , необходимо решить дополнительные задачи  $l \in J^*$ :

$$(18) \quad \begin{aligned} \max f_l &= \lambda_l, \\ \sum_{j \in J^*} X_j \lambda_j + \sum_{i \in I_x^- \cup J_v} e_i s_i^- &= X_o, \\ \sum_{j \in J^*} Y_j \lambda_j - \sum_{k \in I_y^+ \cup J_u} e_k s_k^+ &= Y_o, \\ \sum_{j \in J^*} \lambda_j &= 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in J^*, \\ s_i^- &\geq 0, \quad i \in I_x^- \cup J_v, \\ s_k^+ &\geq 0, \quad k \in I_y^+ \cup J_u, \end{aligned}$$

где  $e_k^- \in E^m$  и  $e_i^+ \in E^r$  являются единичными векторами, связанными с переменными  $s_k^-$  и  $s_i^+$  соответственно.

Согласно теоремам двойственности линейного программирования оптимальные переменные задачи (18) будут оптимальными переменными задачи (10).

Опишем теперь процедуру для нахождения всех производственных объектов, принадлежащих грани  $\Gamma_{\min}$  и множеству  $\Lambda^*$ .

Пусть  $JH = J^*$ ,  $J_0 = \emptyset$ ,  $J_1 = \emptyset$ . Пока число объектов в  $JH$  больше 0: выбираем произвольный индекс  $l$  из множества  $JH$ ; решаем задачу (18); если  $f_l^* > 0$ , тогда  $J_0 = J_0 \cup l$ ; если  $f_l^* = 1$ , тогда  $J_1 = J_1 \cup l$ ; удаляем индекс  $l$  из множества  $JH$ .

Множество  $J_0$  в результате выполнения алгоритма определяет множество объектов, принадлежащих минимальной грани  $\Gamma_{\min}$ . Множество  $J_1$  содержит объекты из множества  $\Lambda^*$ .

После выполнения вышеописанной процедуры минимальная грань  $\Gamma_{\min}$  записывается в виде

$$(19) \quad \Gamma_{\min} = \left\{ (X, Y) \left| \begin{aligned} X &= \sum_{j \in J_o} X_j \lambda_j, \quad Y = \sum_{j \in J_o} Y_j \lambda_j, \\ \sum_{j \in J_o} \lambda_j &= 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in J_o \end{aligned} \right. \right\}.$$

В [17] было доказано, что внутренние точки грани (19) имеют одинаковый эффект масштаба, таким образом, достаточно определить эффект масштаба в любой внутренней точке грани. Внутренняя точка  $(\bar{X}, \bar{Y})$  грани  $\Gamma_{\min}$  может быть выбрана как строгая выпуклая комбинация объектов из множества  $J_0$ , т.е.

$$\bar{X} = \sum_{j \in J_0} X_j \lambda_j, \quad \bar{Y} = \sum_{j \in J_0} Y_j \lambda_j, \quad \sum_{j \in J_0} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j > 0, \quad j \in J_0.$$

В прямом методе [20] строится пересечение множества  $T$  и двумерной плоскости, затем в любой точке полученного двумерного графика определяется эффект масштаба с использованием производных.

Вычисление эффекта масштаба и масштабной эластичности может быть выполнено также для любой внутренней точки множества  $\Gamma_{\min}$  или  $\Lambda^*$  для любого объекта  $(X_j, Y_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

В методе [15], описанном в этой статье, достаточно решить несколько задач вида (18), назовем это алгоритмом 1, однако такие задачи имеют значительно меньше переменных, чем задача (10).

В [16] было предложено решать задачу вида

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j \in J_E} \mu_j + \mu_{j_{t+1}}, \\ & \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} + s_i^- - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) x_{i0} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) y_{kj} - s_k^+ - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) y_{k0} = 0, \quad k = 1, \dots, r, \\ (20) \quad & \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) = 0, \\ & \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{k=1}^r \frac{s_k^+}{R_k^+} - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) (m+r) (1-\rho_0) = 0, \\ & 0 \leq \mu_{j_k} \leq 1, \quad \lambda_{j_k} \geq 0, \quad k = 1, \dots, t+1, \\ & s_i^- \geq 0, \quad s_k^+ \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

где  $J_E = \{j_1, \dots, j_t\}$  — множество эффективных объектов в модели (10), а  $\rho_0$  — оптимальное значение целевой функции задачи (10).

Задача (20) получена в результате применения интересного результата из линейного программирования [21, с. 136]: как найти допустимое решение однородной системы уравнений такое, что число положительных компонент достигает максимума.

Более того, в [16] утверждается, что их метод, назовем его алгоритм 2, более эффективен с вычислительной точки зрения, чем другие существующие методы. Проверим это утверждение.

#### 4. Вычислительные эксперименты

Для проведения расчетов несколько наборов данных были сгенерированы случайным образом. Каждый набор данных содержит около 30% эффективных объектов. Для всех производственных объектов максимальные значения каждого входного и выходного показателя больше, чем минимальное значение этого показателя, не более чем в 10 раз.

Для того чтобы измерить зависимость времени вычислений каждого алгоритма от числа производственных объектов, было необходимо сгенерировать наборы данных с различным числом производственных объектов. Эти наборы данных формируются из набора данных большого размера с помощью выбора заданного числа объектов случайным образом, затем выполняются расчеты и определяется время вычислений. Для того чтобы увеличить надежность измерений, подобные операции проводятся 10 раз и время вычислений усредняется.

На рис. 3 показаны зависимости времени вычислений от числа производственных объектов в моделях 2, 3, 4, соответственно, где цифра соответствует числу входных показателей, причем число выходных показателей равняется числу входных. Из этих рисунков можно видеть, что кривые почти совпадают в модели 2 вплоть до числа 140 объектов, в модели 3 вплоть до числа 100 объектов, в модели 4 вплоть до числа 60 объектов. После этих точек кривые монотонно расходятся. Однако время вычислений алгоритма 1 растет медленно: в модели 2 от 2,2 мс до 44,4 мс, в модели 3 от 4,2 мс до 76,2 мс, в модели 4 от 5,3 мс до 103,6 мс. Ситуация совсем другая для алгоритма 2. Время вычислений алгоритма 2 растет очень быстро: в модели 2 от 1,2 мс до 482,2 мс, в модели 3 от 2,0 мс до 590,4 мс, в модели 4 от 2,9 мс до 978,5 мс. Таким образом, можно видеть, что время вычислений алгоритма 2 увеличивается значительно с ростом числа производственных объектов.

Для того чтобы выявить причины расхождения времени вычисления алгоритмов 1 и 2, вычислим коэффициенты обусловленности для этих алгоритмов. На рис. 4 показаны графики значений коэффициентов обусловленности для моделей 2 и 3. Интересно отметить, что коэффициенты обусловленности алгоритма 2 всегда больше, чем для алгоритма 1. Подобные результаты наблюдаются для других моделей. Это значит, что преобразование нерадиальной модели (10) в модель (20) ухудшает обусловленность этой модели. В результате время вычислений алгоритма 2 значительно увеличивается. Подобный результат наблюдается и для нерадиальной СУДН модели.

Подход АСФ в последние годы активно развивается и используется для анализа деятельности сложных объектов (регионов, финансовых институтов, производственных объектов и т.д.). Важную роль при таком анализе игра-

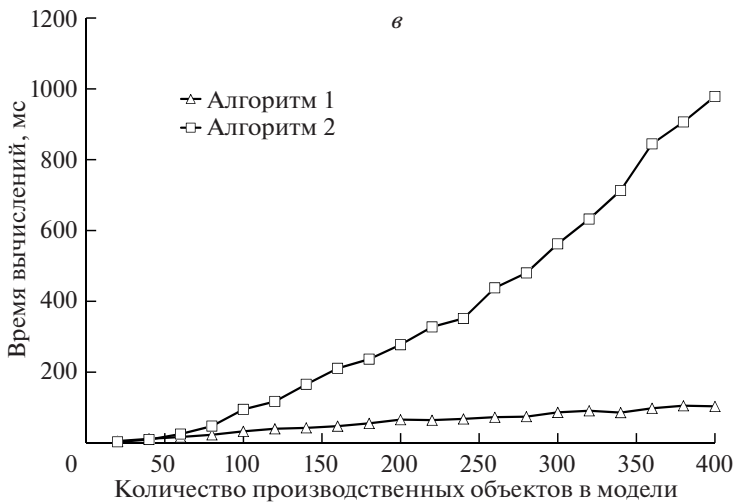
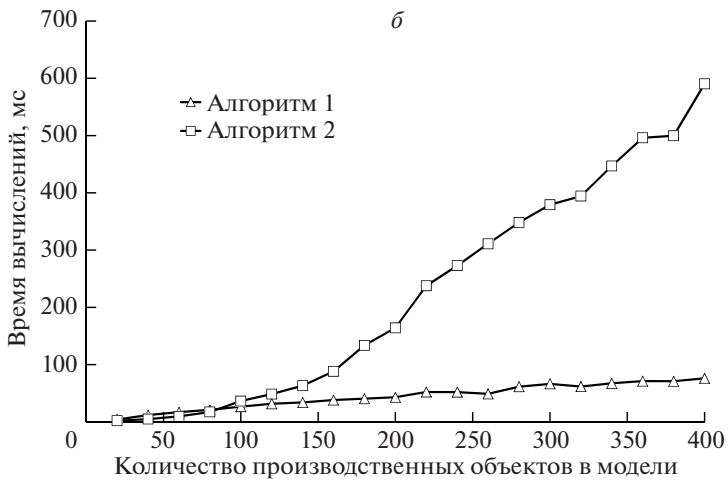
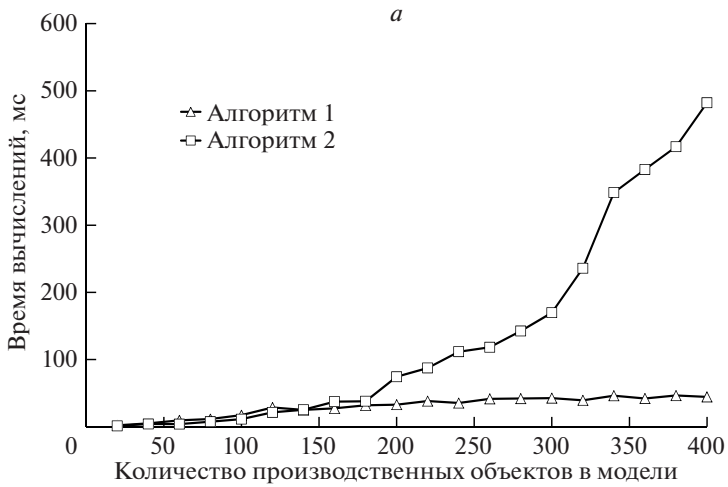


Рис. 3. Зависимость времени вычислений от числа производственных объектов: *a* — для модели 2; *б* — для модели 3; *в* — для модели 4.

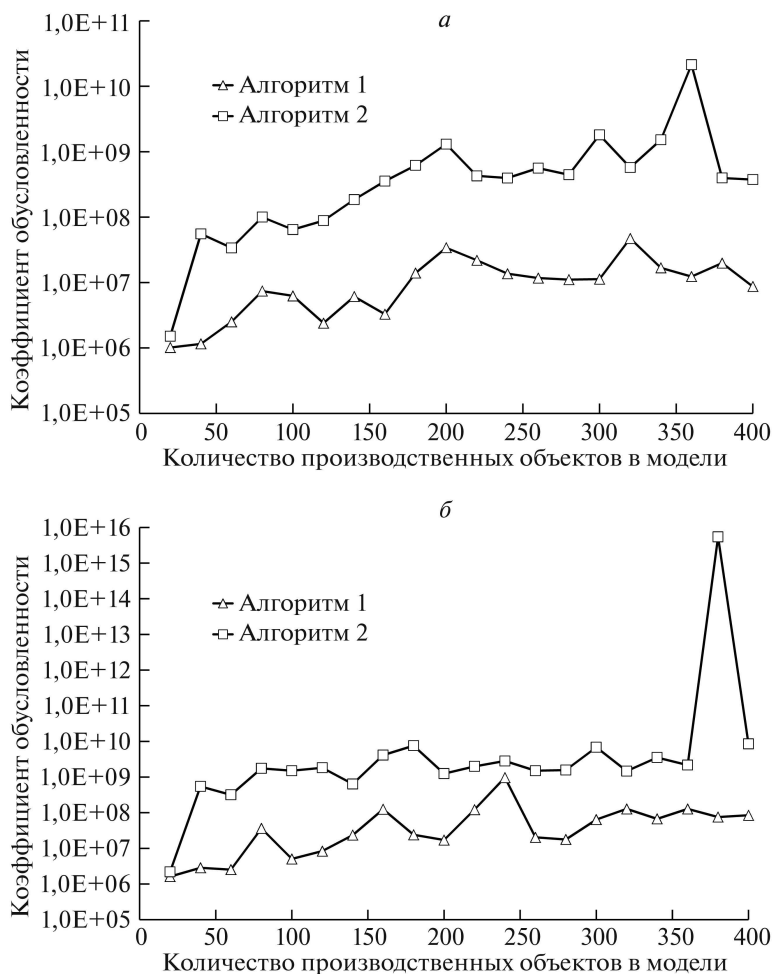


Рис. 4. Максимальный коэффициент обусловленности: *а* — для модели 2; *б* — для модели 3.

ет вычисление различных показателей: эффекта масштаба, меры эффективности, предельных коэффициентов замещения, предельных коэффициентов трансформации и др. Так как в явном виде зависимости между переменными не заданы, то для вычисления этих показателей используют различные оптимизационные модели [22, 23].

Следует отметить, что в развитии оптимизационных методов и соответствующего программного обеспечения за последние шестьдесят лет достигнут большой прогресс. Поэтому их стали широко использовать в различных прикладных задачах. Но проблема состоит в том, что ограничения оптимизационной задачи можно записать в двух эквивалентных форматах: в виде пересечения полупространств и как выпуклую сумму вершин и направляющих векторов неограниченных ребер множества ограничений. Оптимизационные методы развивались в основном для первого вида ограничений, моде-

ли АСФ записываются с помощью второго представления. С теоретической точки зрения здесь никакого противоречия не существует. Но при решении больших задач могут появляться существенные расхождения. В принципе, можно было бы перейти от одной формы представления к другой, но это требует большого количества вычислительных операций, так как даже для средних моделей число ограничивающих гиперплоскостей значительно больше, чем число вершин в модели. Поэтому имеет смысл разрабатывать методы решения сразу для второго вида ограничений, это было проверено на многих задачах.

## 5. Заключение

Большое внимание в научной литературе уделяется вычислению эффекта масштаба. В данной работе проведено описание и сравнение нескольких наиболее известных методов для вычисления эффекта масштаба. Вычислительные эксперименты показывают, что подход [15] имеет определенные преимущества перед другими методами. Предложенный авторами подход для вычисления эффекта масштаба в нерадиальных моделях АСФ позволяет использовать параллельные вычисления. Действительно, исходная большая задача разбивается на ряд подзадач меньшей размерности, эти подзадачи решаются независимо, а затем эти решения объединяются для получения решения всей исходной задачи. При этом существенным образом используется подход, предложенный в [7]. Предложенный авторами подход представляет собой новое направление в решении задач большой размерности, он позволяет существенным образом повысить скорость вычислений и устойчивость решений в нерадиальных моделях АСФ. Более того, подход, изложенный в данной работе, позволяет активно использовать декомпозицию и распределенную вычислительную среду, что существенно сокращает память и увеличивает скорость вычислений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.* Measuring the efficiency of decision making units // *Eur. J. Operat. Res.* 1978. V. 2. No. 6. P. 429–444.  
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
2. *Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.* Some models for estimating technical and scale efficiency in data envelopment analysis // *Management Science.* 1984. V. 30. No. 9. P. 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
3. *Hanoch G.* Homotheticity in joint production // *J. Econom. Theor.* 1970. V. 2. No. 4. P. 432–426. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(70\)90024-4](https://doi.org/10.1016/0022-0531(70)90024-4)
4. *Panzar J.C., Willig R.D.* Economies of scale in multi-output production // *Quart. J. Econom.* 1977. V. 91. No. 3. P. 481–493. <https://doi.org/10.2307/1885979>
5. *Starrett D.A.* Measuring returns to scale in the aggregate, and scale effect of public goods // *Econometrica.* 1977. V. 45. No. 6. P. 1439–1455.  
<https://doi.org/10.2307/1912310>

6. *Shepard R.W.* Theory of cost and production functions. New Jersey: Princeton University Press, 1970.
7. *Afanasiev A.P., Krivonozhko V.E., Lychev A.V., Sukhoroslov O.V.* Multidimensional frontier visualization based on optimization methods using parallel computations // *J. Global. Optim.* 2020. V. 76. P. 563–574.  
<https://doi.org/10.1007/s10898-019-00812-y>
8. *Banker R.D., Thrall R.M.* Estimation of returns to scale using Data Envelopment Analysis // *Eur. J. Operat. Res.* 1992. V. 62. No. 1. P. 74–84.  
[https://doi.org/10.1016/0377-2217\(92\)90178-C](https://doi.org/10.1016/0377-2217(92)90178-C)
9. *Førsund F.R.* On the calculation of the scale elasticity in DEA models // *J. Product. Anal.* 1996. V. 7. No. 2-3. P. 283–302. <https://doi.org/10.1007/BF00157045>
10. *Cooper W.W., Seiford L.M., Tone K.* Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 2nd Ed. New York: Springer Science and Business Media, 2007.  
<https://doi.org/10.1007/978-0-387-45283-8>
11. *Tone K.* A simple characterization of returns to scale in DEA // *J. Oper. Res. Soc. Japan.* 1996. V. 39. No. 4. P. 604–613.
12. *Banker R.D., Cooper W.W., Seiford L.M. et al.* Returns to scale in different DEA models // *Eur. J. Operat. Res.* 2004. V. 154. P. 345–362.  
[https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(03\)00174-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00174-7)
13. *Sueyoshi T., Sekitani K.* Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach // *Eur. J. Operat. Res.* 2007. V. 176. P. 1918–1946. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.043>
14. *Sueyoshi T., Sekitani K.* An occurrence of multiple projections in DEA-based measurement of technical efficiency: theoretical comparison among DEA models from desirable properties // *Eur. J. Operat. Res.* 2009. V. 196. P. 764–794.  
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.01.045>
15. *Krivonozhko V.E., Førsund F.R., Lychev A.V.* Measurement of returns to scale using non-radial DEA models // *Eur. J. Operat. Res.* 2014. V. 232. No. 3. P. 664–670. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.06.046>
16. *Mehdiloozad M., Mirdehghan S.M., Sahoo B.K. et al.* On the identification of the global reference set in data envelopment analysis // *Eur. J. Operat. Res.* 2015. V. 245. No. 3. P. 779–788. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.03.029>
17. *Krivonozhko V.E., Førsund F.R., Lychev A.V.* Returns-to-scale properties in DEA models: the fundamental role of interior points // *J. Product. Anal.* 2012. V. 38. P. 121–130. <https://doi.org/10.1007/s11123-011-0253-z>
18. *Кривонозжко В.Е., Форсунд Ф.Р., Лычев А.В.* Методы нахождения всех решений для эталонного множества в методологии АСФ // *ДАН.* 2012. Т. 442. № 1. С. 28–32.
19. *Кривонозжко В.Е., Лычев А.В., Форсунд Ф.Р.* Измерение эффекта масштаба в радиальных моделях методологии анализа среды функционирования // *ЖВМиМФ.* 2017. Т. 51. № 1. С. 69–80.
20. *Førsund F.R., Hjalmarsson L., Krivonozhko V.E. et al.* Calculation of scale elasticities in DEA models: direct and indirect approaches // *J. Product. Anal.* 2007. V. 28. P. 45–56. <https://doi.org/10.1007/s11123-007-0047-5>



21. *Bertsimas D., Tsitsiklis J.N.* Introduction to linear optimization. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1997.
22. *Mehdiloozad M., Sahoo B.K.* Identifying the Global Reference Set in DEA: An Application to the Determination of Returns to Scale. In: S.-N. Hwang, H.-S. Lee, J. Zhu (Eds.), Handbook of Operations Analytics Using Data Envelopment Analysis, Springer US, Boston, MA, 2016. P. 299–330.  
[https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7705-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7705-2_12)
23. *Mehdiloozad M.* Identifying the global reference set in DEA: a mixed 0-1 LP formulation with an equivalent LP relaxation // Oper. Res. Int. J. 2017. V. 17. P. 205–211.  
<https://doi.org/10.1007/s12351-015-0222-9>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*

Поступила в редакцию 19.07.2021

После доработки 22.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022