

## Стохастические системы

© 2022 г. А.М. ГОРЦЕВ, д-р техн. наук (dekanat@fpmk.tsu.ru),  
Л.А. НЕЖЕЛЬСКАЯ, д-р физ.-мат. наук (ludne@mail.ru)  
(Национальный исследовательский Томский  
государственный университет)

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СМО С ВХОДЯЩИМ АСИНХРОННЫМ ПОТОКОМ СОБЫТИЙ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с входящим асинхронным дважды стохастическим потоком запросов (ММРР-поток — Markovian Modulated Poisson Process) с двумя состояниями. Приводятся явные аналитические формулы для стационарного распределения вероятностей состояний системы, а также явные аналитические выражения для числовых характеристик системы: средней длины очереди, среднего числа запросов в системе, вероятности простоя системы. Приводятся численные результаты, представленные в виде таблиц, характеристик системы. Рассматривается частный случай входящего потока запросов — асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями (SPP-поток — Switched Poisson Process).

*Ключевые слова:* асинхронный поток (ММРР-поток) запросов, однолинейная система массового обслуживания (СМО), стационарное распределение вероятностей состояний системы, числовые характеристики.

**DOI:** 10.31857/S0005231022080049, **EDN:** AGTWDG

#### 1. Введение

Системы и сети массового обслуживания (СМО и СеМО) широко применяются в качестве математических моделей различных технических, физических, экономических и других систем. Случайные потоки событий, являющиеся основными элементами СМО и СеМО, применяются в качестве математических моделей различных реальных процессов, протекающих в таких системах. В частности, случайные потоки событий служили и служат математическими моделями информационных потоков запросов в телекоммуникационных сетях.

Современными математическими моделями информационных потоков в телекоммуникационных сетях являются коррелированные потоки. Систематизированное изложение СМО и СеМО с коррелированными потоками приведено в монографии [1], в своем роде единственной в мировой литературе.

Здесь отметим, что в подавляющем большинстве работ по исследованию СМО и СеМО до 80-х гг. прошлого века в качестве входящих потоков собы-

тий рассматривались стационарные пуассоновские потоки событий. Однако в связи с интенсивным развитием вычислительной техники, спутниковых, компьютерных, беспроводных и мобильных сетей связи модель простейшего потока перестала быть адекватной реальным информационным потокам сообщений. Поэтому в это же время была предпринята успешная попытка создания адекватных математических моделей информационных потоков в телекоммуникационных системах и сетях — так называемых дважды стохастических потоков. Дважды стохастические потоки можно разделить на два класса: первый класс составляют потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайный процесс [2, 3]; второй — потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Первые результаты исследований потоков второго класса были опубликованы практически одновременно в 1979 г. в [4–6]. В [4, 5] указанные потоки получили название МС(Markov chain)-потоки, в [6] — MVP(Markov versatile processes)-потоки. В [7, 8] описанные выше потоки названы МАР(Markovian Arrival Process)-потоками событий.

Зарубежными и отечественными авторами при описании подобных входящих коррелированных потоков событий в СМО и СеМО используются термины: дважды стохастические потоки событий, МАР-потоки, МС-потоки и др. В зависимости от того, каким образом происходит переход интенсивности из состояния в состояние, МС-потоки можно разделить на три типа: синхронные потоки (у которых состояние интенсивности меняется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий) [9]; асинхронные потоки (с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий) [10]; полусинхронные потоки (у которых одна часть состояний интенсивности меняется в моменты наступления событий потока, другая часть — в произвольные моменты времени, не связанные с моментами наступления событий потока) [11]. Аналитическое исследование СМО и СеМО с коррелированными потоками — достаточно затруднительный процесс [1], тем более нахождение, скажем, характеристик СМО и СеМО в явном виде представляет собой сложную задачу, порой неразрешимую.

В настоящей статье проводится аналитическое исследование однолинейной СМО с входящим асинхронным потоком событий с двумя состояниями [10, 12–14] (ММРР-поток с двумя состояниями [1]), являющимся частным случаем МАР-потока, с бесконечным числом мест для ожидания и экспоненциальным обслуживанием.

Для стационарного режима функционирования СМО выводятся явные аналитические выражения средней длины очереди, среднего числа сообщений в системе и вероятности простоя системы.

Подчеркнем, что исследования, связанные с анализом СМО и СеМО с входящими ММРР-потоками запросов либо их модификациями, проводят-

ся с 80-х гг. прошлого века до настоящего времени. Кроме [10, 12–14] отметим статьи [15, 16], где рассматриваются СеМО с собственно входящими ММРР-потоками запросов. Начиная с 2010 г. по настоящее время рассматриваются в основном СМО и СеМО с входящими МАР-потоками запросов [17] либо с разновидностями ММРР-потоков [18]. Общим для работ [15–18] является проводимый в них численный анализ СМО и СеМО.

## 2. Математическая модель системы. Постановка задачи

Рассматривается однолинейная СМО с ожиданием и длительностью обслуживания, распределенной по экспоненциальному закону  $F(\tau) = 1 - \exp\{-\mu\tau\}$ ,  $\tau \geq 0$ , с параметром  $\mu$  ( $\mu \geq 0$ ). На вход обслуживающего прибора поступает асинхронный поток событий (сообщений, запросов и т.д.), сопровождающий процесс (интенсивность)  $\lambda(t)$  которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с двумя состояниями:  $\lambda(t) = \lambda_1$  (первое состояние) либо  $\lambda(t) = \lambda_2$  (второе состояние) ( $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ). Будем говорить, что имеет место  $j$ -е состояние процесса  $\lambda(t)$ , если  $\lambda(t) = \lambda_j$ ,  $j = 1, 2$ . Если имеет место  $j$ -е состояние процесса  $\lambda(t)$ , то в течение временного интервала, когда  $\lambda(t) = \lambda_j$ , имеет место пуассоновский поток событий с параметром (интенсивностью)  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2$ . Длительность пребывания процесса  $\lambda(t)$  (потока) в  $j$ -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ . Таким образом, переход из состояния в состояние процесса  $\lambda(t)$  осуществляется в произвольный момент времени, не связанный с моментом наступления события пуассоновского потока с параметром  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2$  (свойство асинхронных потоков). Описанное выше поведение входящего асинхронного потока определяет его как ММРР-поток событий со скачкообразно изменяющейся интенсивностью  $\lambda(t)$  [1].

Рассматривается стационарный режим функционирования СМО. В сделанных предположениях  $\lambda(t)$  — сопровождающий стационарный кусочно-постоянный скрытый (принципиально ненаблюдаемый) транзитивный марковский процесс с двумя состояниями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Обозначим:  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , — значение длительности  $k$ -го интервала между соседними событиями потока ( $\tau_k \geq 0$ ). Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности  $k$ -го интервала равна  $p(\tau_k) = p(\tau)$ ,  $\tau \geq 0$ , для любого  $k \geq 1$ . В силу этого момент времени  $t_k$  без потери общности можно положить равным нулю или, что то же самое, момент наступления события есть  $\tau = 0$ . В [19] получено явное выражение для плотности вероятности  $p(\tau)$ :

$$(1) \quad p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau},$$

$$\tau \geq 0, \quad \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1} \left( z_2 - \frac{\lambda_1^2 \alpha_2 + \lambda_2^2 \alpha_1}{\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1} \right),$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2} \right].$$

В (1)  $z_1, z_2$  — корни характеристического уравнения  $z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)z + (\lambda_1 + \alpha_1)(\lambda_2 + \alpha_2) - \alpha_1\alpha_2 = 0$ , при этом из вида  $z_1, z_2$  следует, что  $0 < z_1 < z_2$ ,  $\gamma$  — некоторый коэффициент.

Пусть  $(t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2})$  — два смежных интервала, значения длительностей которых есть  $\tau_k = t_{k+1} - t_k, \tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$  соответственно; их расположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая  $k = 1$ , будем рассматривать два соседних интервала  $(t_1, t_2), (t_2, t_3)$  с соответствующими значениями длительностей  $\tau_1 = t_2 - t_1, \tau_2 = t_3 - t_2$ ;  $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0$ . При этом  $\tau_1 = 0$  соответствует моменту  $t_1$  наступления события потока;  $\tau_2 = 0$  соответствует моменту  $t_2$  наступления следующего события потока. Соответствующая совместная плотность вероятности при этом есть [19]

$$(2) \quad p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \frac{\lambda_1\lambda_2\alpha_1\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(z_2 - z_1)^2(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\alpha_1)^2} (z_1e^{-z_1\tau_1} - z_2e^{-z_2\tau_1}) \times \\ \times (z_1e^{-z_1\tau_2} - z_2e^{-z_2\tau_2}), \quad \tau_1 \geq 0, \quad \tau_2 \geq 0,$$

где  $z_1, z_2, p(\tau_k)$  определены в (1) для  $\tau = \tau_k, k = 1, 2$ .

Подчеркнем, что из (2) следует, что в общем случае асинхронный поток является коррелированным потоком. Только в частных случаях он становится рекуррентным либо вырождается в простейший.

Частный случай 1:  $\lambda_2 = 0$  — асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями [20] (SPP-поток [21]). Тогда  $p(\tau)$  определяется формулой (1), где

$$\gamma = 1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{z_2 - z_1}, \\ z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2} \right]; \quad 0 < z_1 < z_2.$$

Из (2) получаем  $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$ . Так как моменты наступления событий в потоке  $t_1, \dots, t_k$  порождают вложенную цепь Маркова  $\{\lambda(t_k)\}$ , то нетрудно показать, что  $p(\tau_1, \dots, \tau_k) = p(\tau_1) \dots p(\tau_k), k \geq 2$ . Таким образом, асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями всегда является рекуррентным.

Частный случай 2:  $\lambda_1 = \lambda_2$  — простейший поток с параметром  $\lambda_1$ . Из (1) находим  $z_1 = \lambda_1, z_2 = \lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2, \gamma = 1; p(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}, \tau \geq 0$ .

Частный случай 3:  $\alpha_1 = 0$  — простейший поток с параметром  $\lambda_1$ . Из (1) получаем  $z_1 = \lambda_2 + \alpha_2, z_2 = \lambda_1, \gamma = 0; p(\tau) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau}, \tau \geq 0$ .

Частный случай 4:  $\alpha_2 = 0$  — простейший поток с параметром  $\lambda_2$ . Из (1) находим  $z_1 = \lambda_2, z_2 = \lambda_1 + \alpha_1, \gamma = 1; p(\tau) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau}, \tau \geq 0$ .

Задача анализа рассматриваемой СМО заключается в нахождении явного аналитического вида числовых характеристик системы: а) среднего числа сообщений в очереди, б) среднего числа сообщений в системе, в) вероятности простоя обслуживающего прибора.

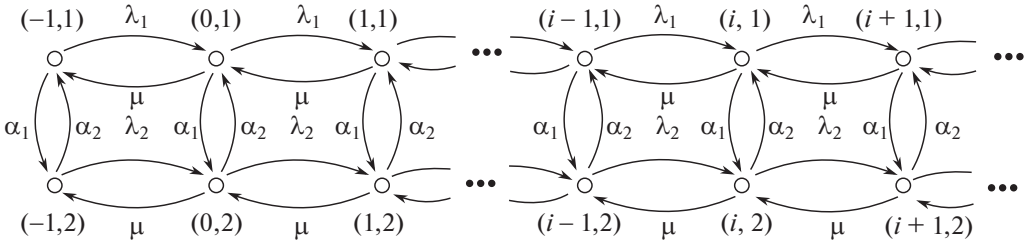


Рис. 1. Стохастический граф переходов процесса  $\lambda(t)$  из состояния в состояние.

Обозначим через  $i(t)$  число сообщений в очереди в произвольный момент времени  $t$  ( $i(t) = 0, 1, \dots$ ). Случайный процесс  $i(t)$  не является марковским, так как входящий асинхронный поток обладает последствием. Для того чтобы построить марковский процесс, необходимо учесть состояние входящего потока.

Введем дополнительную переменную  $j(t)$  — состояние входящего асинхронного потока (состояние сопровождающего процесса  $\lambda(t)$  в произвольный момент времени  $t$ ),  $j(t) = 1, 2$ . Если  $j(t) = 1$ , то  $\lambda(t) = \lambda_1$ ; если  $j(t) = 2$ , то  $\lambda(t) = \lambda_2$ . Тогда двумерный процесс  $(i(t), j(t))$  становится марковским. Так как рассматривается стационарный режим, то состояние системы будем обозначать как  $(i, j)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ ,  $j = 1, 2$ . Отметим, что возможны еще два состояния:  $(-1, 1)$ ,  $(-1, 2)$ , при которых в системе находится ноль сообщений (длина очереди равна нулю и прибор не обслуживает — прибор простаивает).

Сделанные предпосылки позволяют представить математическую модель исследуемой СМО в виде связанного стохастического графа [22], представленного на рис. 1.

Здесь вершинам графа соответствуют состояния СМО; каждой дуге графа поставлены в соответствие интенсивности переходов из состояния в состояние (инфинитезимальные характеристики), причем петли в каждом состоянии опущены; каждая вершина графа (каждое состояние) достижима и возвратна.

### 3. Вывод числовых характеристик системы

Обозначим через  $P(i, 1)$ ,  $P(i, 2)$  стационарные (финальные) вероятности состояний системы ( $i = -1, 0, \dots$ ). Тогда для сечений стохастического графа  $F_{i1} = \{(i-1, 1; i, 1), (i, 1; i-1, 1), (i, 1; i+1, 1), (i+1, 1; i, 1), (i, 1; i, 2), (i, 2; i, 1)\}$ ,  $F_{i2} = \{(i-1, 2; i, 2), (i, 2; i-1, 2), (i, 2; i+1, 2), (i+1, 2; i, 2), (i, 2; i, 1), (i, 1; i, 2)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , имеет место бесконечная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu P(i+1, 1) - (\lambda_1 + \alpha_1 + \mu)P(i, 1) + \lambda_1 P(i-1, 1) + \alpha_2 P(i, 2) &= 0, \\ \mu P(i+1, 2) - (\lambda_2 + \alpha_2 + \mu)P(i, 2) + \lambda_2 P(i-1, 2) + \alpha_1 P(i, 1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Решение системы (3) будем искать в виде  $P(i, 1) = \xi^i$ ,  $P(i, 2) = C\xi^i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Тогда характеристическое уравнение для системы (3) примет вид

$$(4) \quad (\xi - 1) \left\{ \mu^2 \xi^3 - \mu(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 + \mu) \xi^2 + \right. \\ \left. + [\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(\alpha_2 + \mu) + \lambda_2(\alpha_1 + \mu)] \xi - \lambda_1 \lambda_2 \right\} = 0.$$

Сначала рассмотрим условия существования вероятностей  $P(i, 1)$ ,  $P(i, 2)$ ,  $i = -1, 0, \dots$  (условия существования стационарного режима функционирования рассматриваемой СМО). Математическое ожидание случайной величины  $\tau$  — длительности интервала между соседними событиями в асинхронном потоке — определится в виде

$$M(\tau) = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau,$$

где плотность вероятности  $p(\tau)$  задана в (1). Подставляя в выражение для  $M(\tau)$  плотность  $p(\tau)$ , находим  $M(\tau) = (\alpha_1 + \alpha_2)/(\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1)$ . Тогда математическое ожидание числа событий во входящем коррелированном асинхронном потоке в единицу времени определится в виде  $\lambda = 1/M(\tau) = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ , где  $\pi_j$  — стационарная вероятность  $j$ -го состояния потока,  $j = 1, 2$ ; при этом  $\pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)$ ,  $\pi_2 = \alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2)$  [10].

Рассмотрим ситуацию, когда  $\lambda = \mu$ . Подставляя  $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$  в (4), находим характеристическое уравнение для рассматриваемой ситуации:

$$(5) \quad (\xi - 1)^2 \left[ (\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)^2 \xi^2 - \right. \\ \left. - (\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) (\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2) \xi + \lambda_1 \lambda_2 \right] = 0.$$

Характеристическое уравнение (5) имеет кратные корни. Тогда общее решение системы разностных уравнений (3), в которой  $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ , выражается в виде

$$(6) \quad P(i, 1) = D_1 \xi_1^i + D_2 i \xi_2^i + D_3 \xi_3^i + D_4 \xi_4^i, \\ P(i, 2) = B_1 D_1 \xi_1^i + B_2 D_2 i \xi_2^i + B_3 D_3 \xi_3^i + B_4 D_4 \xi_4^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

В (6)  $P_s(i, 1) = D_s \xi_s^i$ ;  $P_s(i, 2) = B_s D_s \xi_s^i$  — частные решения системы (3);  $B_s, D_s$  — некоторые константы, определяемые из граничных условий,  $s = \overline{1, 4}$ ;  $\xi_1 = \xi_2 = 1$ ,

$$\xi_{3,4} = \frac{(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2}}{2(\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)}, \quad 0 < \xi_3 < 1 < \xi_4.$$

Поскольку  $P(i, 1)$ ,  $P(i, 2)$  — вероятности, то для них должно выполняться условие нормировки  $\sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 1) + \sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 2) = 1$ . Тогда необходимым условием ее выполнения является выполнение предельных соотношений:  $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 1) = 0$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 2) = 0$  при  $i \rightarrow \infty$ . В противном случае ряды  $\sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 1)$ ,  $\sum_{i=-1}^{\infty} P(i, 2)$  будут расходиться. С учетом сказанного общее решение (6), где  $D_1 = D_2 = D_4 = 0$ , запишется в виде

$$(7) \quad P(i, 1) = D_3 \xi_3^i, \quad P(i, 2) = B_3 D_3 \xi_3^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Определим константу  $B_3$ . Подставляя (7) в первое уравнение системы (3), в котором  $\mu = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ , получаем

$$(8) \quad B_3 = [\lambda_1 + \alpha_1 + (\lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2)(1 - \xi_3) - (\lambda_1 / \xi_3)] / \alpha_2.$$

Подставляя в (8) явные выражения для  $\pi_1, \pi_2, \xi_3$ , находим

$$B_3 = -\frac{1}{2\lambda_2(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[ (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2)^2 - 4\lambda_1 \lambda_2} \right].$$

Таким образом,  $B_3 < 0$ . Тогда из (7) следует, что  $D_3 < 0$ . Последнее, в свою очередь, приводит к противоречию:  $P(i, 1) < 0$ ,  $i \geq 0$ ;  $P(i, 2) > 0$ ,  $i \geq 0$ . Противоречие устраняется, если положить  $D_3 = 0$ :  $P(i, 1) = P(i, 2) = 0$ ,  $i \geq 0$ . Отсюда следует, что при  $\lambda = \mu$  стационарное распределение  $P(i, 1)$ ,  $P(i, 2)$ ,  $i \geq 0$ , не существует и тем более не существует при  $\lambda > \mu$ .

Перейдем к случаю  $\lambda < \mu$  ( $\lambda = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$ ). Общее решение системы (3) с учетом (4) выпишется в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} P(i, 1) &= A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i + A_3 \xi_3^i + A_4 \xi_4^i, \\ P(i, 2) &= C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i + C_3 A_3 \xi_3^i + C_4 A_4 \xi_4^i, \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $P_s(i, 1) = A_s \xi_s^i$ ;  $P_s(i, 2) = C_s A_s \xi_s^i$  — частные решения системы (3);  $C_s, A_s$  — некоторые константы, определяемые из граничных условий,  $s = \overline{1, 4}$ ;  $\xi_4 = 1$ ;  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  — корни кубического уравнения

$$(10) \quad \begin{aligned} \mu^2 \xi^3 - \mu(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 + \mu) \xi^2 + \\ + [\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1(\alpha_2 + \mu) + \lambda_2(\alpha_1 + \mu)] \xi - \lambda_1 \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что все корни уравнения (10) вещественные и положительные:  $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 < \xi_3$ . Как отмечено выше, необходимо выполнение предельных соотношений  $\lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 1) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(i, 2) = 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , откуда следует, что  $A_3 = A_4 = 0$ . Тогда общее решение (9) примет вид

$$(11) \quad P(i, 1) = A_1 \xi_1^i + A_2 \xi_2^i; \quad P(i, 2) = C_1 A_1 \xi_1^i + C_2 A_2 \xi_2^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Подставляя частное решение  $P_s(i, 1) = A_s \xi_s^i$ ,  $P_s(i, 2) = C_s A_s \xi_s^i$ ,  $i = 0, 1, \dots$ ,  $s = 1, 2$ , в первое уравнение системы (3) сначала для  $s = 1$ , затем для  $s = 2$ , находим константу  $C_s$  в виде

$$(12) \quad C_s = [\lambda_1 + \alpha_1 + \mu - \mu \xi_s - (\lambda_1 / \xi_s)] / \alpha_2, \quad s = 1, 2.$$

Для определения констант  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , и вероятностей  $P(-1, 1)$ ,  $P(-1, 2)$  нужно привлечь граничные уравнения и условие нормировки.

Сечения стохастического графа

$$F_{-1,1} = \{(-1, 1; 0, 1), (0, 1; -1, 1), (-1, 1; -1, 2), (-1, 2; -1, 1)\},$$

$$F_{-1,2} = \{(-1, 2; 0, 2), (0, 2; -1, 2), (-1, 2; -1, 1), (-1, 1; -1, 2)\},$$

$F = \{(i, 1; i, 2), (i, 2; i, 1), i = -1, 0, 1, \dots\}$  соответственно определяют граничные уравнения:

$$(13) \quad \begin{aligned} (\lambda_1 + \alpha_1)P(-1, 1) &= \mu P(0, 1) + \alpha_2 P(-1, 2), (\lambda_2 + \alpha_2)P(-1, 2) = \\ &= \mu P(0, 2) + \alpha_1 P(-1, 1), \alpha_1 P(-1, 1) + \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} P(i, 1) = \\ &= \alpha_2 P(-1, 2) + \alpha_2 \sum_{i=0}^{\infty} P(i, 2). \end{aligned}$$

Присоединяя к (13) условие нормировки

$$P(-1, 1) + P(-1, 2) + \sum_{i=0}^{\infty} [P(i, 1) + P(i, 2)] = 1,$$

с учетом (11) получаем систему уравнений для определения неизвестных  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $P(-1, 1)$ ,  $P(-1, 2)$ . Решая (13), находим

$$(14) \quad P(-1, 1) = (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_1)A_1 + (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_2)A_2,$$

$$P(-1, 2) = (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_1]A_1 + (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_2]A_2,$$

$$A_1 = \lambda_1 \frac{(1/\xi_2) - (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(b_1 a_2 - a_1 b_2)},$$

$$A_2 = -\lambda_1 \frac{(1/\xi_1) - (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2)(b_1 a_2 - a_1 b_2)},$$

$$a = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1; \quad a_1 = (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_1) + 1/(1 - \xi_1);$$

$$a_2 = (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_1] + C_1/(1 - \xi_1);$$

$$b_1 = (\mu/a)(\lambda_2 + \alpha_2 + \alpha_2 C_2) + 1/(1 - \xi_2);$$

$$b_2 = (\mu/a)[\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1)C_2] + C_2/(1 - \xi_2),$$

$C_1, C_2$  определены в (12);  $\xi_1, \xi_2$  – корни кубического уравнения (10), лежащие в интервале  $(0, 1)$ .



**Таблица 1.** Зависимость вероятности простоя  $P(-1)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,875	0,833	0,792	0,750	0,708	0,667	0,625	0,583	0,542	0,500
0,2	0,889	0,861	0,833	0,806	0,778	0,750	0,722	0,694	0,667	0,639
0,3	0,896	0,875	0,854	0,833	0,812	0,792	0,771	0,750	0,729	0,708
0,4	0,900	0,883	0,867	0,850	0,833	0,817	0,800	0,783	0,767	0,750
0,5	0,903	0,889	0,875	0,861	0,847	0,833	0,819	0,806	0,792	0,778

**Таблица 2.** Зависимость средней длины очереди  $M(I)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,020	0,045	0,086	0,150	0,247	0,396	0,630	1,014	1,692	2,990
0,2	0,016	0,032	0,059	0,101	0,163	0,257	0,400	0,624	0,985	1,582
0,3	0,014	0,026	0,046	0,076	0,121	0,188	0,288	0,438	0,667	1,018
0,4	0,013	0,022	0,038	0,062	0,097	0,148	0,222	0,331	0,492	0,725
0,5	0,012	0,020	0,032	0,052	0,080	0,121	0,179	0,263	0,383	0,551

**Таблица 3.** Зависимость среднего числа сообщений в системе  $M(I + 1)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,145	0,212	0,294	0,400	0,539	0,729	1,005	1,431	2,151	3,490
0,2	0,127	0,171	0,226	0,295	0,385	0,507	0,678	0,929	1,318	1,943
0,3	0,118	0,151	0,192	0,243	0,309	0,397	0,517	0,688	0,938	1,309
0,4	0,113	0,139	0,171	0,212	0,263	0,331	0,422	0,548	0,725	0,975
0,5	0,109	0,131	0,157	0,191	0,233	0,288	0,360	0,458	0,591	0,773

Формулы (11), (14) позволяют определить характеристики системы:  $P(-1)$  — вероятность простоя обслуживающего прибора;  $M(I)$  — среднюю длину очереди в системе;  $M(I + 1)$  — среднее число сообщений в системе, здесь  $I$  — случайная величина: длина очереди в СМО.

$$(15) \quad P(-1) = (\mu/a)[(\lambda_2 + \alpha_1 + \alpha_2)(A_1 + A_2) + (\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2)(C_1 A_1 + C_2 A_2)],$$

$$M(I) = A_1(1 + C_1) \frac{\xi_1}{(1 - \xi_1)^2} + A_2(1 + C_2) \frac{\xi_2}{(1 - \xi_2)^2},$$

$$M(I + 1) = \frac{A_1(1 + C_1)}{(1 - \xi_1)^2} + \frac{A_2(1 + C_2)}{(1 - \xi_2)^2},$$

где  $C_1, C_2$  определены в (12);  $a, A_1, A_2$  — в (14);  $\xi_1, \xi_2$  — корни кубического уравнения (10), лежащие в интервале  $(0, 1)$ .

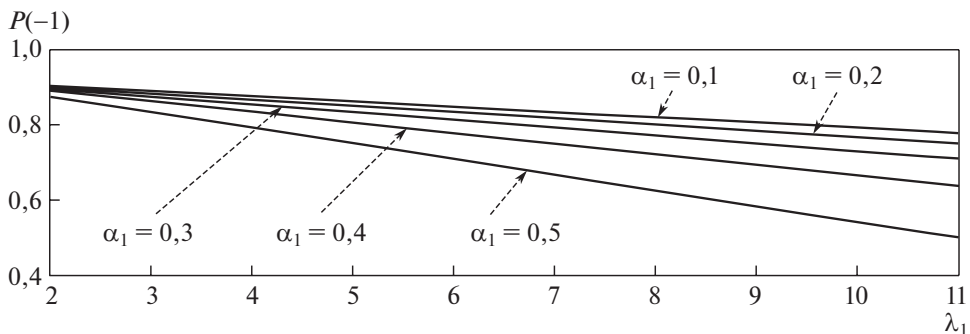


Рис. 2. Зависимость вероятности простоя  $P(-1)$  от параметра  $\lambda_1$ .

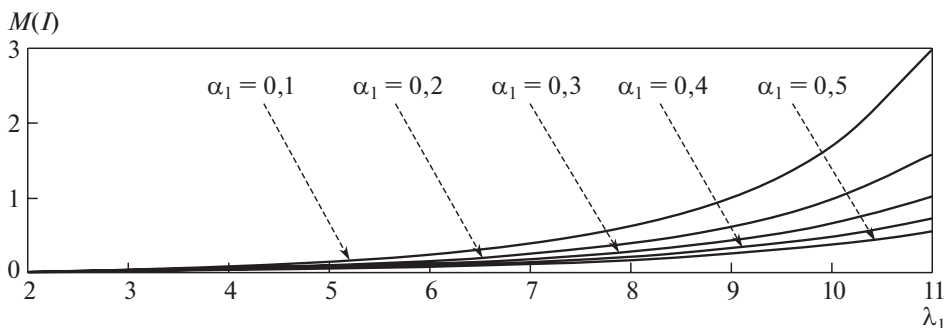


Рис. 3. Зависимость средней длины очереди  $M(I)$  от параметра  $\lambda_1$ .

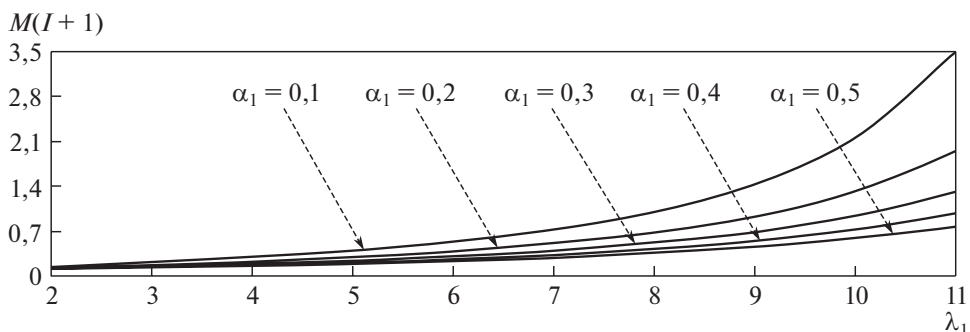


Рис. 4. Зависимость среднего числа сообщений в системе  $M(I+1)$  от параметра  $\lambda_1$ .

Исходные данные для численных примеров, приведенные здесь и далее, выбраны с тем расчетом, чтобы показать, насколько поведение характеристик (15) соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой СМО.

В табл. 1–3 приведены зависимости  $P(-1)$ ,  $M(I)$ ,  $M(I+1)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$  при фиксированных значениях параметров  $\lambda_2 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0,1$ ,  $\mu = 12$ , вычисленные по формулам (15).

Поведение указанных характеристик в зависимости от параметра  $\lambda_1$  соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим коррелированным асинхронным потоком сообщений (ММРР-поток).

На рис. 2–4 приведены графические зависимости характеристик (15), построенные для числовых значений табл. 1–3 соответственно.

#### 4. Частный случай. SPP-поток

Для рассматриваемого частного случая имеем  $\lambda_2 = 0$ . Тогда система (3) примет вид

$$(16) \quad \begin{aligned} \mu P(i+1, 1) - (\lambda_1 + \alpha_1 + \mu)P(i, 1) + \lambda_1 P(i-1, 1) + \alpha_2 P(i, 2) &= 0, \\ \mu P(i+1, 2) - (\alpha_2 + \mu)P(i, 2) + \alpha_1 P(i, 1) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Решение системы (16) будем по-прежнему искать в виде  $P(i, 1) = \xi^i$ ,  $P(i, 2) = G\xi^i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Тогда характеристическое уравнение для системы (16) примет вид

$$(17) \quad (\xi - 1) [\mu^2 \xi^2 - \mu(\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu)\xi + \lambda_1(\alpha_2 + \mu)] = 0.$$

Рассматривается случай  $\lambda < \mu$ , где  $\lambda = 1/M(\tau) = \lambda_1 \pi_1$ ,  $M(\tau) = (\alpha_1 + \alpha_2)/\lambda_1 \alpha_2$ ,  $\pi_1 = \alpha_2/(\alpha_1 + \alpha_2)$ . Случай  $\lambda \geq \mu$  приводит (аналогично общему случаю  $\lambda_2 > 0$ ) к ситуации, когда стационарное распределение  $P(i, 1), P(i, 2)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ , не существует.

Обозначим через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  корни характеристического уравнения (17), где  $\xi_3 = 1$ ,

$$(18) \quad \xi_{1,2} = \frac{1}{2\mu} \left[ (\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu) \mp \sqrt{(-\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu)^2 + 4\lambda_1 \alpha_1} \right],$$

при этом  $0 < \xi_1 < 1 = \xi_3 < \xi_2$ . Тогда общее решение системы (16) с учетом (17) выпишется в виде

$$(19) \quad \begin{aligned} P(i, 1) &= R_1 \xi_1^i + R_2 \xi_2^i + R_3 \xi_3^i, \\ P(i, 2) &= G_1 R_1 \xi_1^i + G_2 R_2 \xi_2^i + G_3 R_3 \xi_3^i, \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

В общем решении (19), так как  $\xi_2 > 1$ ,  $\xi_3 = 1$ , необходимо константы  $R_2, R_3$  положить равными нулю. Тогда (19) примет вид

$$(20) \quad P(i, 1) = R_1 \xi_1^i, \quad P(i, 2) = G_1 R_1 \xi_1^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Подставляя решение (20) во второе уравнение системы (16), находим константу  $G_1$ :

$$(21) \quad G_1 = \alpha_1 / [\alpha_2 + \mu(1 - \xi_1)].$$

Для нахождения константы  $R_1$  и вероятностей  $P(-1, 1), P(-1, 2)$  привлечем граничные уравнения (13), в которых  $\lambda_2 = 0$ , и условие нормировки.

**Таблица 4.** Зависимость вероятности простоя  $P(-1)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,917	0,875	0,833	0,792	0,750	0,708	0,667	0,625	0,583	0,542
0,2	0,944	0,917	0,889	0,861	0,833	0,806	0,778	0,750	0,722	0,694
0,3	0,958	0,937	0,917	0,896	0,875	0,854	0,833	0,813	0,792	0,771
0,4	0,967	0,950	0,933	0,917	0,900	0,883	0,867	0,850	0,833	0,817
0,5	0,972	0,958	0,944	0,931	0,917	0,903	0,889	0,875	0,861	0,847

**Таблица 5.** Зависимость средней длины очереди  $M(I)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,016	0,041	0,082	0,145	0,242	0,390	0,623	1,005	1,678	2,961
0,2	0,011	0,027	0,054	0,095	0,157	0,250	0,392	0,613	0,969	1,556
0,3	0,008	0,020	0,040	0,070	0,114	0,180	0,279	0,427	0,652	0,995
0,4	0,006	0,016	0,031	0,054	0,089	0,139	0,213	0,320	0,477	0,705
0,5	0,005	0,013	0,025	0,044	0,072	0,112	0,170	0,252	0,368	0,532

**Таблица 6.** Зависимость среднего числа сообщений в системе  $M(I + 1)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$

$\alpha_1 \backslash \lambda_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,1	0,100	0,166	0,248	0,354	0,492	0,682	0,956	1,380	2,095	3,420
0,2	0,066	0,110	0,165	0,234	0,323	0,444	0,614	0,863	1,247	1,862
0,3	0,050	0,082	0,123	0,174	0,239	0,326	0,445	0,614	0,860	1,224
0,4	0,040	0,066	0,098	0,138	0,189	0,256	0,346	0,470	0,643	0,888
0,5	0,033	0,055	0,081	0,114	0,156	0,210	0,281	0,377	0,507	0,685

Тогда получаем

$$(22) \quad P(-1, 1) = \frac{\mu}{\lambda_1} R_1 (1 + G_1), \quad P(-1, 2) = \frac{\mu}{\lambda_1 \alpha_2} R_1 [\alpha_1 + (\lambda_1 + \alpha_1) G_1],$$

$$R_1 = \lambda_1 \alpha_2 (1 - \xi_1) / (\alpha_1 + \alpha_2) [\lambda_1 + \mu (1 - \xi_1) (1 + G_1)],$$

где  $\xi_1$  определена в (18),  $G_1$  — в (21).

Формулы (20), (22) позволяют определить характеристики системы, введенные выше:

$$(23) \quad P(-1) = \frac{\mu}{\lambda_1 \alpha_2} [\alpha_1 + \alpha_2 + (\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2) G_1] R_1,$$

$$M(I) = R_1 (1 + G_1) \frac{\xi_1}{(1 - \xi_1)^2}, \quad M(I + 1) = \frac{R_1 (1 + G_1)}{(1 - \xi_1)^2},$$

где  $R_1$  определена в (22),  $G_1$  — в (21),  $\xi_1$  — в (18).

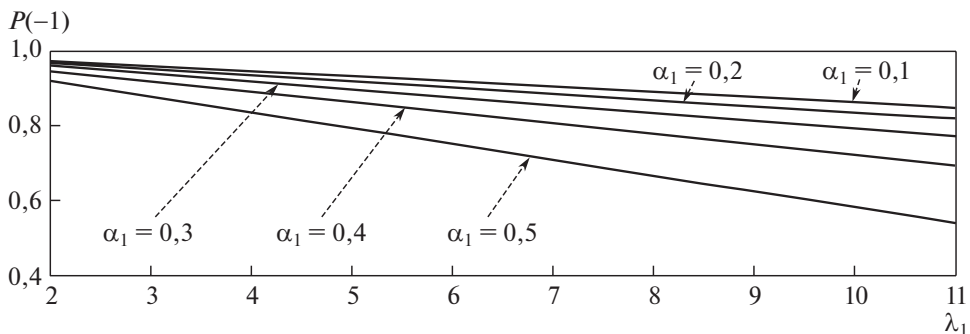


Рис. 5. Зависимость вероятности простоя  $P(-1)$  от параметра  $\lambda_1$ .

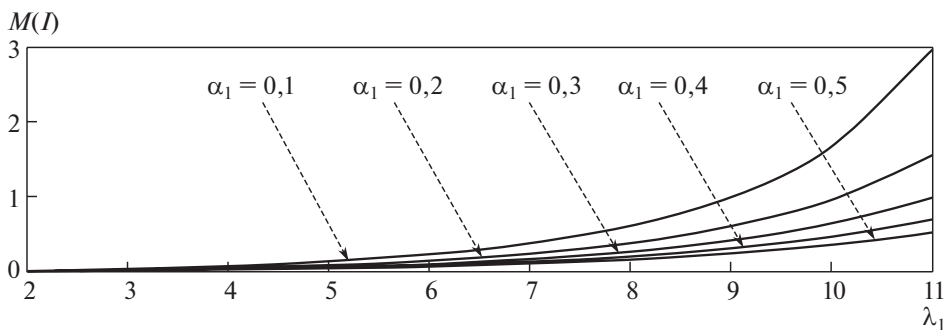


Рис. 6. Зависимость средней длины очереди  $M(I)$  от параметра  $\lambda_1$ .

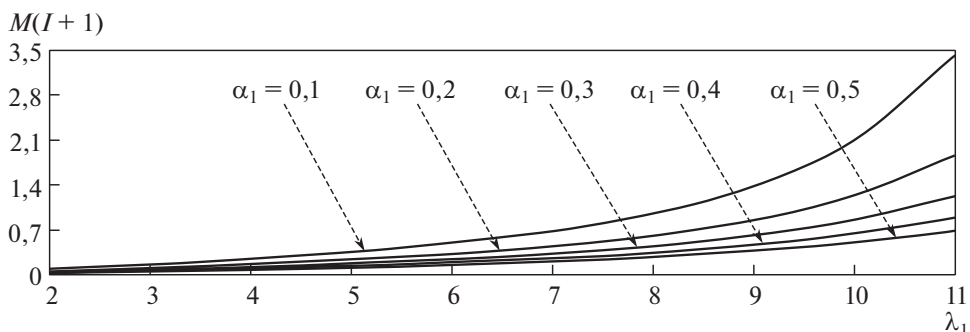


Рис. 7. Зависимость среднего числа сообщений в системе  $M(I+1)$  от параметра  $\lambda_1$ .

В табл. 4–6 приведены зависимости  $P(-1)$ ,  $M(I)$ ,  $M(I+1)$  от параметра  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = 2, 3, \dots, 11$ ) для  $\alpha_1 = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$  при фиксированных значениях параметров  $\alpha_2 = 0,1$ ,  $\mu = 12$ , вычисленные по формулам (23).

Поведение указанных величин в зависимости от параметра  $\lambda_1$  соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в рассматриваемой однолинейной СМО с входящим асинхронным альтернирующим потоком (SPP-поток).

На рис. 5–7 приведены графические зависимости характеристик (23), построенные для числовых значений табл. 4–6 соответственно.

## 5. Заключение

В настоящей статье изучена однолинейная СМО с входящим асинхронным дважды стохастическим потоком событий (ММРР-поток) с двумя состояниями.

Немарковский процесс  $i(t)$  — число запросов в очереди в момент времени  $t$  — путем введения дополнительной переменной  $j(t)$  — состояние входящего асинхронного потока в момент времени  $t$  — сводится к двумерному процессу  $(i(t), j(t))$ , являющемуся марковским процессом.

С использованием метода диаграмм интенсивностей переходов находится явное аналитическое стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $(i(t), j(t))$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Приводятся явные аналитические формулы для числовых характеристик системы и построенные на основании этих формул зависимости числовых характеристик от параметров СМО, представленные в таблицах.

Рассмотрен также частный случай входящего потока запросов — асинхронный альтернирующий поток с двумя состояниями (SPP-поток).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишнеvский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
2. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51. No. 3. P. 433–441.
3. Kingman J.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60. No. 4. P. 923–930.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. No. 4. P. 764–779.
7. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. No. 1. P. 1–46.
8. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. No. 3. P. 575–598.

9. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание параметров синхронного дважды стохастического потока событий методом моментов // Вест. Томск. гос. ун-та. 2002. № S1-1. С. 24–29.
10. Gortsev A.M., Nezhelskaya L.A. An asynchronous double stochastic flow with initiation of superfluous events // Discrete Mathematics and Applications. 2011. V. 21. No. 3. P. 283–290.
11. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного полусинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вест. Томск. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 2 (27). С. 19–29.
12. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // АиТ. 2002. № 3. С. 179–184.  
*Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of Parameters of a Double-Stochastic Flow of Events under Conditions of Its Incomplete Observability // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 3. P. 511–515.*
13. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // АиТ. 2003. № 12. С. 69–79.  
*Vasil'eva L.A., Gortsev A.M. Estimation of the Dead Time of an Asynchronous Double Stochastic Flow of Events under Incomplete Observability // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 12. P. 1890–1898.*
14. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.
15. Heindl A. Decomposition of general tandem queueing networks with MMPP input // Performance Evaluation. 2001. V. 44. P. 5–23.
16. Heindl A. Decomposition of general queue networks with MMPP inputs and customer losses // Performance Evaluation. 2003. V. 51. P. 117–136.
17. Бинь Сунь, Дудин С.А., Дудина О.С., Дудин А.Н. Модель обслуживания мобильных пользователей в соте с адаптивной модуляцией, учитывающая влияние случайной среды // АиТ. 2021. № 5. С. 86–105.  
*Bin Sun, Dudin S.A., Dudina O.S., Dudin A.N. A Customer Service Model in an Adaptive-Modulation Mobile Communication Cell with Allowance for Random Environment // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 5. P. 812–826.*
18. Алиева С.Г., Меликов А.З., Шахмалыев М.О. Численный анализ системы с гетерогенными серверами и мгновенной обратной связью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2021. № 3. С. 98–110.
19. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов обобщенного асинхронного потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Вест. Томск. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 4 (21). С. 14–25.
20. Gortsev A.M., Nissenbaum O.V. Estimation of the dead time period and parameters of an asynchronous alternative flow of events with unextendable dead time period // Russian Physics J. 2005. V. 48. No. 10. P. 1039–1054.

21. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. 175 с.
22. *Медведев Г.А.* Анализ стохастических графов, описывающих поведение шаговых систем автоматического поиска // Автоматика и вычислительная техника. 1968. № 4. С. 27–30.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.*

Поступила в редакцию 29.11.2021

После доработки 28.03.2022

Принята к публикации 28.04.2022