Автоматика и телемеханика, № 8, 2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2022 г. **М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)**
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

АДАПТИВНОЕ H_∞-ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ[1]

Для линейных динамических объектов рассматривается новый класс регуляторов с настраиваемыми параметрами, синтезируемых с целью уменьшения интегральных показателей влияния начального и внешнего возмущений. Параметры регулятора настраиваются согласно дифференциальному уравнению в направлении убывания локальной целевой функции. Формулируются условия, при выполнении которых достигается цель управления, и приводятся потери по сравнению со стационарными линейно-квадратичным и H_∞-оптимальным регуляторами, в том числе и в случае вырожденных функционалов. Показано, как эти регуляторы применяются в адаптивном линейно-квадратичном и H_∞-оптимальном управлении для неопределенных объектов, параметры которых принадлежат заданному многограннику, а также в адаптивном отслеживании выхода эталонной модели.

Ключевые слова: адаптивное управление, H_∞-оптимальное управление, линейно-квадратичное управление, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231022080074, **EDN:** AHHFHC

1. Введение

В статье развивается подход к синтезу законов управления в условиях неопределенности, берущий свое начало в работах Ю.И. Неймарка, связанных с адаптивным управлением по скорости убывания функции Ляпунова [1; 2, с. 304], и А.Л. Фрадкова по скоростному градиенту [3, 4]. Основная идея этого подхода состоит в следующем. Пусть динамическая система при некоторых постоянных значениях параметров допускает квадратичную функцию Ляпунова, обеспечивающую асимптотическую устойчивость состояния равновесия. Если параметры системы настраивать в направлении убывания производной этой функции Ляпунова по траектории системы, то ее состояние будет стремиться к тому же равновесию. Такой подход позволил с единых позиций рассмотреть многие из известных к тому времени алгоритмов адаптации

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2021-1394).

и идентификации в задачах управления и наблюдения в условиях неопределенности. Из недавних обзоров [5, 6] можно узнать о конкретных результатах, полученных по этой теме за последние 40 с лишним лет.

Основное внимание в работах этого направления уделялось решению задач стабилизации или асимптотического отслеживания и лишь в некоторых из них рассматривались задачи адаптивного управления с оценкой функционала качества и, в частности, задачи оптимального гашения возмущений. Так, в [7] для квадратных систем, в которых размерности векторов управления и целевого выхода совпадают, синтезируется система адаптивного управления, обеспечивающая гарантированное значение H_∞-нормы при асимптотическом отслеживании выхода эталонной модели. В [8] заданный уровень гашения возмущений при адаптивном управлении, основанном на методе пассификации (см. [9]), обеспечивается за счет введения дополнительного шунтирования в алгоритм настройки для ограничения роста настраиваемых параметров. В [10] показано, что при некоторых дополнительных условиях стандартное адаптивное управление гарантирует заданный уровень гашения возмущений для систем, в которых вектор управления не входит в целевой выход.

В настоящей работе адаптивное управление синтезируется на основе нестационарных регуляторов, предназначенных для минимизации максимального отношения L_2-нормы целевого выхода z к L_2-норме внешнего возмущения v и/или евклидовой норме начального возмущения x_0. Это максимальное отношение называется уровнем гашения возмущений системы, а точнее: при внешнем возмущении и нулевых начальных условиях — H_∞-нормой, при неизвестных начальных условиях в отсутствие внешнего возмущения — γ_0-нормой и при неизвестных начальных условиях и внешнем возмущении — обобщенной H_∞-нормой. В общих чертах синтез заключается в следующем. Если в объекте управления с линейной обратной связью уровень гашения возмущений меньше заданного числа γ, то найдется положительно определенная функция Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ такая, что по траектории замкнутой системы при любых возмущениях выполняется неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$, в котором $\dot{V}$ — производная по времени функции $V(x)$ в силу системы. Левую часть этого неравенства, рассматриваемую как функцию параметров обратной связи, назовем локальной целевой функцией и будем настраивать параметры регулятора в направлении убывания этой функции. Оказывается, что если при каких-либо, вообще говоря, неизвестных значениях параметров локальная целевая функция является отрицательно определенной, уровень гашения возмущений в системе, замкнутой таким нестационарным регулятором, также будет меньше γ. Для этих регуляторов указываются оценки потерь по сравнению с соответствующими оптимальными регуляторами.

Статья структурирована следующим образом. После введения во втором разделе описывается синтез регуляторов с настраиваемыми параметрами для гашения возмущений и доказывается основная теорема. В третьем разделе приводится анализ нестационарной системы управления при измеряемом состоянии, решается обратная задача H_∞-оптимального управления и находятся условия, при которых система управления с данным алгоритмом настройки параметров обеспечивает требуемый уровень гашения возмущений. В четвертом разделе показано, как на основе предлагаемого подхода синтезировать адаптивные линейно-квадратичные, γ-оптимальные и H_∞-оптимальные управления для неопределенной системы, у которой элементы матриц принадлежат заданному многограннику, а в пятом разделе – как синтезировать адаптивное оптимальное отслеживание выхода эталонной модели.

2. Синтез нестационарных регуляторов для гашения возмущений

Пусть уравнения управляемой системы имеют вид

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_u u + B_v v,\\
y &= C_y x,\\
z &= Cx + Du,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

в которых $x \in \mathrm{R}^{n_x}$ — состояние системы, $u \in \mathrm{R}^{n_u}$ — управление, $y \in \mathrm{R}^{n_y}$ — измеряемый выход, $z \in \mathrm{R}^{n_z}$ — целевой выход, $v \in \mathrm{R}^{n_v}$ — возмущение, принадлежащее классу L_2 на соответствующем интервале времени. Примем ради упрощения выкладок, что $C^{\mathrm{T}} D = 0$.

Сформулируем следующее предположение, которое будет неоднократно применяться в дальнейшем.

Предположение А. Для системы (2.1) существует квадратичная функция $V(x) = x^{\mathrm{T}} P x$ с постоянной положительно определенной матрицей P и стационарный закон управления $u_* = \Theta_* y$ такие, что выполняется условие

$$
\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0 \quad \forall\, x, v,
\tag{2.2}
$$

где $\dot{V}$ обозначает производную по времени от функции $V(x)$ в силу уравнений замкнутой системы.

Известно, что если предположение А выполнено, то уровень гашения возмущений в замкнутой системе с учетом начальных условий меньше γ, т.е.

$$
\|z\|^2_{[0,T]} < \gamma^2 \|v\|^2_{[0,T]} + x_0^{\mathrm{T}} P x_0 \quad \forall\, T.
\tag{2.3}
$$

В этом случае в дальнейшем будем говорить, что функция $V(x)$ обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ. Величина γ является верхней границей γ_0-нормы, H_∞-нормы и обобщенной H_∞-нормы замкнутой системы, т.е.

$$
\begin{gathered}
\gamma_0 = \sup_{x_0 \neq 0,\, v \equiv 0} \frac{\|z\|}{|x_0|} < \gamma, \quad \|H\|_\infty = \sup_{v \neq 0,\, x_0 = 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma,\\
\|H\|_{g\infty} = \sup_{x_0^{\mathrm{T}} R x_0 + \|v\|^2 \neq 0} \frac{\|z\|}{\sqrt{x_0^{\mathrm{T}} R x_0 + \|v\|^2}} < \gamma,
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$. Заметим, что при отсутствии внешнего возмущения из (2.3) следует, что $\|z\|^2 < x_0^{\mathrm{T}} P x_0$. Поэтому для того, чтобы $\gamma_0 < \gamma$, нужно дополнительно потребовать выполнение неравенства $P < \gamma^2 I$. При наличии внешнего возмущения и ненулевых начальных условий из (2.3) следует, что для того, чтобы $\|H\|_{g\infty} < \gamma$, требуется дополнительное неравенство $P < \gamma^2 R$.

Рассмотрим закон управление вида $u = \Theta(t)y$, в котором матрица параметров $\Theta(t)$ настраивается с целью минимизации функции

$$\Phi(x, v, \Theta) = \dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2.$$

А именно, пусть в каждый момент времени скорость изменения матрицы настраиваемых параметров регулятора составляет острый угол с направлением наискорейшего убывания этой функции, т.е. определяется в соответствии с уравнением

$$\dot{\Theta} = -(1/2) M^{-1} \nabla_{\Theta} \left(\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \right) \tag{2.5}$$

с начальным условием $\Theta(0) = \Theta_0$, где $(n_u \times n_u)$-матрица $M = M^{\mathrm{T}} > 0$ и ∇_{Θ} обозначает градиент по Θ, т.е. $(n_u \times n_y)$-матрицу, элементы которой есть частные производные функции $\Phi(x, v, \Theta)$ по соответствующим элементам матрицы Θ. Задача заключается в нахождении условий, при которых в замкнутой системе при управлении $u = \Theta(t)y$, (2.5) уровень гашения возмущений будет меньше γ.

Запишем функцию

$$\begin{gathered} \Phi(x, v, \Theta) = 2x^{\mathrm{T}} P (Ax + B_u \Theta y + B_v v) + \\ + x^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} C x + y^{\mathrm{T}} \Theta^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} D \Theta y - \gamma^2 v^{\mathrm{T}} v \end{gathered} \tag{2.6}$$

и вычислим ее градиент

$$(1/2) \nabla_{\Theta} \Phi(x, v, \Theta) = B_u^{\mathrm{T}} P x y^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}} D \Theta y y^{\mathrm{T}}.$$

Допустим, что найдется постоянная $(n_u \times n_y)$-матрица K, удовлетворяющая уравнению

$$K C_y = -B_u^{\mathrm{T}} P. \tag{2.7}$$

Тогда уравнение настройки параметров (2.5) примет вид

$$\dot{\Theta} = -M^{-1} \left(D^{\mathrm{T}} D \Theta - K \right) y y^{\mathrm{T}}. \tag{2.8}$$

В случае $D^{\mathrm{T}} D = S > 0$, который будем называть невырожденным, параметры настраиваются в соответствии с уравнением

$$\dot{\Theta} = -M^{-1} S (\Theta - \zeta) y y^{\mathrm{T}}, \tag{2.9}$$

где матрица $\zeta = S^{-1}K$ согласно (2.7) удовлетворяет уравнению $\zeta C_y = -S^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P$. При $D = 0$ уравнение (2.8) записывается как

$$\dot{\Theta} = M^{-1}Kyy^{\mathrm{T}}, \tag{2.10}$$

где матрица K удовлетворяет (2.7). Отметим, что уравнение (2.10) совпадает с уравнением настройки параметров по скорости убывания функции Ляпунова или с уравнением скоростного градиента.

Для того, чтобы представить, как выглядит уравнение (2.8) в вырожденном случае, когда $D^{\mathrm{T}}D \geqslant 0$ и $D \neq 0$, используем известную декомпозицию

$$\begin{gathered} D^{\mathrm{T}}D = (W_1\ W_2)\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1^{\mathrm{T}} \\ W_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \\ S = S^{\mathrm{T}} > 0, \quad \begin{pmatrix} W_1^{\mathrm{T}} \\ W_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}(W_1\ W_2) = I, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где столбцы матрицы W_1 образуют базис образа матрицы D^{T}, а столбцы матрицы W_2 – базис ядра матрицы D, т.е. $DW_2 = 0$. Обозначим

$$u_1 = W_1^{\mathrm{T}}u, \quad u_2 = W_2^{\mathrm{T}}u, \quad B_{u1} = B_uW_1, \quad B_{u2} = B_uW_2 \tag{2.12}$$

и запишем уравнения системы (2.1) с управлением $u = \Theta(t)y$ как

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_{u1}u_1 + B_{u2}u_2 + B_vv, \\ y &= C_yx, \\ z &= Cx + S^{1/2}u_1, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $u_1 = \Theta_1(t)y$, $u_2 = \Theta_2(t)y$, $\Theta_1(t) = W_1^{\mathrm{T}}\Theta(t)$, $\Theta_2(t) = W_2^{\mathrm{T}}\Theta(t)$. При этом уравнение (2.8) с $M = \alpha I$ для матрицы $\Theta(t)$ трансформируется в следующие уравнения для матриц $\Theta_1(t)$ и $\Theta_2(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_1 &= -\alpha^{-1}S(\Theta_1 - \zeta_1)yy^{\mathrm{T}}, \\ \dot{\Theta}_2 &= \alpha^{-1}K_2yy^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

в которых $\zeta_1 = S^{-1}K_1$, а K_1 и K_2 удовлетворяют уравнениям

$$K_1C_y = -B_{u1}^{\mathrm{T}}P, \quad K_2C_y = -B_{u2}^{\mathrm{T}}P.$$

В следующей теореме находятся условия, при которых синтезируемый нестационарный регулятор обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть предположение A выполнено для $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ и существует матрица K, удовлетворяющая уравнению $KC_y = -B_u^{\mathrm{T}}P$. Тогда в замкнутой системе* (2.1), $u = \Theta(t)y$, (2.8) *выполняется условие*

$$\|z\|^2_{[0,T]} + \|D(u - u_*)\|^2_{[0,T]} < \gamma^2\|v\|^2_{[0,T]} + \psi_0 \quad \forall T, \tag{2.15}$$

где

$$\psi_0 = x_0^{\mathrm{T}} P x_0 + \operatorname{tr}\left[(\Theta_0 - \Theta_*)^{\mathrm{T}} M (\Theta_0 - \Theta_*)\right]. \tag{2.16}$$

Из доказательства теоремы 2.1, приведенного в Приложении, следует, что для функции

$$\Psi(x, \Theta) = V(x) + \operatorname{tr}\left[(\Theta - \Theta_*)^{\mathrm{T}} M (\Theta - \Theta_*)\right] \tag{2.17}$$

по траекториям замкнутой системы выполняется

$$\dot{\Psi} + |z|^2 - \gamma^2 |v|^2 = \Phi(x, v, \Theta_*) - y^{\mathrm{T}} (\Theta - \Theta_*)^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} D (\Theta - \Theta_*) y < 0.$$

В силу этого все переменные системы ограничены

$$\Psi(x(t), \Theta(t)) \leqslant \Psi(x_0, \Theta_0) + \gamma^2 \|v\|^2_{[0,t]} \quad \forall\, t$$

и выполняются соотношения

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} D[u(t) - u_*(t)] = 0.$$

Для сходимости матрицы $\Theta(t)$ к Θ_* требуется выполнение дополнительных условий — в частности, так называемых условий неисчезающего возбуждения. Этот вопрос в данной статье не рассматривается.

Заметим также, что из (2.15) следует

$$\sup_{x_0, v, \Theta_0} \frac{\|z\|}{\sqrt{x_0^{\mathrm{T}} R x_0 + \|v\|^2 + \operatorname{tr}(\Theta_0 - \Theta_*)^{\mathrm{T}} (\Theta_0 - \Theta_*)}} < \gamma$$

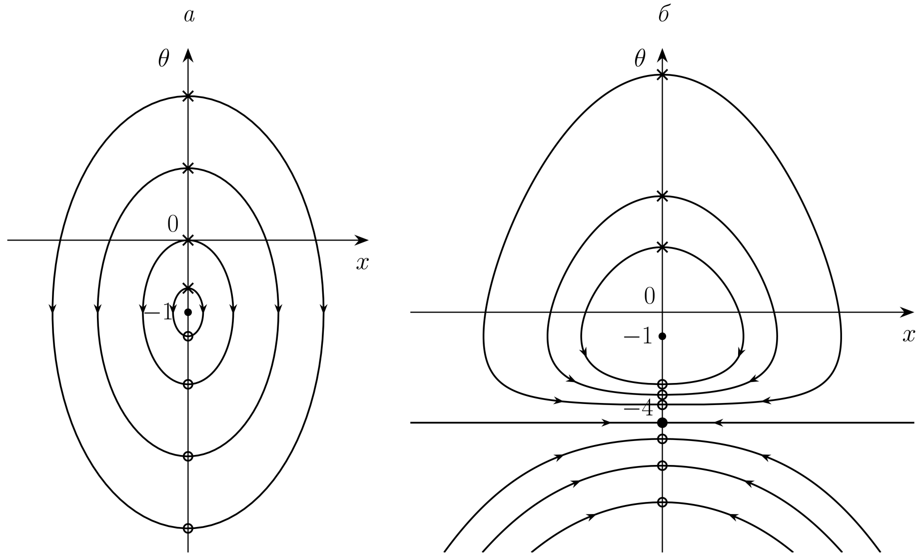
при условии $P < \gamma^2 R$, $M < \gamma^2 I$. По аналогии с обобщенной H_∞-нормой (2.4) стационарной системы эту величину можно интерпретировать как уровень гашения внешнего возмущения и начальных возмущений по состоянию и настраиваемым параметрам в нестационарной системе (2.1), $u = \Theta(t) y$, (2.8). Таким образом, если обобщенная H_∞-норма системы при некотором стационарном законе управления меньше γ, то указанный уровень гашения возмущений в рассматриваемой нестационарной системе будет также меньше γ.

Если возмущения отсутствуют, то для функции $\Psi(x, \Theta) > 0$, заданной в (2.17), верно неравенство

$$\dot{\Psi} + |z|^2 + |D(u - u_*)|^2 \leqslant 0,$$

означающее, что независимо от поведения настраиваемых параметров указанный нестационарный регулятор обеспечивает выполнение условия

$$\|z\|^2 + \|D(u - u_*)\|^2 \leqslant \psi_0.$$



Фазовые портреты замкнутой нестационарной системы управления:
а) вырожденный случай $z = x$; б) невырожденный случай $z = \mathrm{col}\,(x; 0,5u)$.

Если $u_* = \Theta_* y$ является линейно-квадратичным законом управления, при котором $\min \|z\|^2 = x_0^{\mathrm{T}} P x_0$, то "потери" соответствующего нестационарного регулятора $u = \Theta(t)y$, (2.8) по сравнению с оптимальным регулятором не превышают согласно (2.16) величину $\mathrm{tr}\,[(\Theta_0 - \Theta_*)^{\mathrm{T}} M (\Theta_0 - \Theta_*)]$.

Отметим, что в пространстве состояний (x, Θ) нелинейной динамической системы

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = (A + B_u \Theta C_y)x, \\
&\dot{\Theta} = -M^{-1}\left(D^{\mathrm{T}} D \Theta - K\right) C_y x x^{\mathrm{T}} C_y^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

описывающей динамику замкнутой системы управления без возмущения, имеется многообразие состояний равновесия, в которых $x = 0$. Именно наличие целого многообразия равновесий по параметрам Θ делает необходимым дополнительные механизмы для обеспечения сходимости $\Theta(t)$ к Θ_* и в целом осложняет анализ динамики этой системы. Исследование линейной динамической системы, полученной путем линеаризации системы (2.18) в окрестности произвольной фиксированной точки $\widehat{\Theta}$ этого многообразия, показывает, что для тех $\widehat{\Theta}$, для которых матрица $A + B_u \widehat{\Theta} C_y$ гурвицева, соответствующее равновесие системы (2.18) будет устойчивым по Ляпунову (но не асимптотически устойчивым), а там где эта матрица негурвицева — будет неустойчивым. Предположение А состоит в том, что множество устойчивых точек в этом многообразии не пусто, т.е. некоторая точка Θ_* должна принадлежать этому множеству.

Для иллюстрации на рисунке приведены фазовые портреты двумерной замкнутой системы, состоящей из одномерного объекта $\dot{x} = x + u$ с нестационарным регулятором $u = \theta(t)x$ при выборе $V(x) = x^2$ в двух случаях: а) вырожденный случай, когда целевой выход $z = x$, $\theta_* = -2$ и алгоритм настройки параметра регулятора $\dot\theta = -\alpha^{-1}x^2$; б) невырожденный случай, когда целевой выход $z = \mathrm{col}\,(x; 0{,}5u)$, $\theta_* = -4$ и алгоритм $\dot\theta = -\alpha^{-1}(\theta+4)x^2$. Здесь $\mathrm{col}\,(a, b)$ обозначает вектор-столбец, состоящий из векторов a и b. Интегральные кривые в этих двух случаях задаются уравнениями: а) $\alpha^{-1}x^2 + (\theta+1)^2 = \mathrm{const}$; б) $(2\alpha)^{-1}x^2 + \theta - 3\ln|\theta+4| = \mathrm{const}$. Все траектории стремятся к устойчивым состояниям равновесия $x = 0$, $\theta < -1$, отмеченным на рисунке кружочками. Крестиками отмечены неустойчивые состояния равновесия $x = 0$, $\theta \geqslant -1$.

3. Анализ нестационарной системы управления при измеряемом состоянии

В этом разделе выясняются условия, при которых синтезированный нестационарный регулятор приводит к достижению цели. В приводимом здесь анализе предполагается, что матрицы в уравнении объекта полностью известны. В последующих разделах будет показано, как эти регуляторы могут быть применены в адаптивном управлении.

В случае измеряемого состояния объекта (2.1), т.е. при $C_y = I$, вернемся к предположению А и выясним условия, при которых оно выполняется. Очевидно, что неравенство (2.2) при постоянной матрице Θ может быть записано как матричное неравенство

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{pmatrix} (A+B_u\Theta)^{\mathrm T}P + P(A+B_u\Theta) & * & * \\ B_v^{\mathrm T}P & -\gamma^2 I & * \\ C + D\Theta & 0 & -I \end{pmatrix} < 0.$$

Умножая это неравенство слева и справа на матрицу $\mathrm{diag}\,(P^{-1}, I, I)$ и обозначая $Y = P^{-1}$, $Z = \Theta Y$, стандартным образом получим линейное матричное неравенство

$$\text{(3.2)}\qquad \begin{pmatrix} AY + YA^{\mathrm T} + B_uZ + Z^{\mathrm T}B_u^{\mathrm T} & * & * \\ B_v^{\mathrm T} & -\gamma^2 I & * \\ CY + DZ & 0 & -I \end{pmatrix} < 0$$

относительно $Y > 0$, Z и γ^2. Следовательно, если Y удовлетворяет неравенству (3.2), то регулятор $u = \Theta(t)x$, в котором параметры настраиваются согласно уравнению

$$\text{(3.3)}\qquad \dot\Theta = -M^{-1}\left(D^{\mathrm T}D\Theta - K\right)xx^{\mathrm T}$$

с матрицей $K = -B_u^{\mathrm T}Y^{-1}$, обеспечивает достижение цели (2.15).

Покажем, что предположение А выполняется тогда и только тогда, когда существует такое $\mu > 0$, что регуляризованный центральный H_∞-оптимальный закон управления

$$\text{(3.4)}\qquad u = \Theta_p x, \quad \Theta_P = -\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm T}P, \quad \mathcal{D}_\mu = D^{\mathrm T}D + \mu^2 W_2 W_2^{\mathrm T} > 0$$

обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ. Заметим, что для функции $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ по траектории системы (2.1) при законе управления (3.4) выполняется условие

$$\dot{V} + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0 \quad \forall\, x, v, \tag{3.5}$$

где $\widehat{z} = \mathrm{col}\,(z, \mu W_2^{\mathrm{T}} u)$ и μ — некоторый параметр. В частности, когда $D^{\mathrm{T}}D = S > 0$, имеем $\mathcal{D}_\mu = D^{\mathrm{T}}D$ и этот закон управления совпадает с так называемым центральным H_∞-оптимальным законом управления

$$u = -(D^{\mathrm{T}}D)^{-1} B_u^{\mathrm{T}} Px, \tag{3.6}$$

где матрица P удовлетворяет соответствующему матричному неравенству, следующему из (2.2), и неравенству $P < \gamma^2 I$ или $P < \gamma^2 R$ для критерия γ_0 или $\|H\|_{g\infty}$ соответственно, а при $D = 0$ имеет вид $u = -\mu^{-2} B_u^{\mathrm{T}} Px$.

Теорема 3.1. *Следующие два утверждения относительно системы (2.1) эквивалентны:*

(i) *существует положительно определенная матрица P такая, что при некотором стационарном законе управления $u = \Theta x$ для всех x и v выполняется неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$, в котором $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$;*

(ii) *линейное матричное неравенство*

$$\begin{pmatrix} AY + YA^{\mathrm{T}} - B_u \mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^{\mathrm{T}} & * & * \\ B_v^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & * \\ CY & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \tag{3.7}$$

в котором $\mathcal{D}_\mu^{-1} = (D^{\mathrm{T}}D)^{+} + \mu^{-2} W_2 W_2^{\mathrm{T}} > 0$ и верхний “+” обозначает псевдообращение, разрешимо относительно $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ и $\mu^{-2} > 0$. В этом случае при регуляризованном центральном H_∞-оптимальном законе управления $u = \Theta_P x$, где $\Theta_P = -\mathcal{D}_\mu^{-1} B_u^{\mathrm{T}} P$ и $P = Y^{-1}$, уровень гашения возмущений меньше γ.

Теперь с учетом теорем 2.1 и 3.1 приходим к следующему выводу.

Следствие 3.1. *Если матрица $Y > 0$ удовлетворяет неравенству (3.7), то при законе управления $u = \Theta(t)x$, в котором параметры настраиваются согласно уравнению*

$$\dot{\Theta} = -M^{-1}\left(D^{\mathrm{T}}D\Theta - K\right) xx^{\mathrm{T}} \tag{3.8}$$

с матрицей $K = -B_u^{\mathrm{T}} Y^{-1}$, выполняется условие (2.15).

В рассматриваемом синтезе нестационарных регуляторов при измеряемом состоянии можно исключить матрицу P и непосредственно характеризовать множество всех матриц K в уравнении (3.8), при которых достигается цель. Для этого, подставляя равенство $K = -B_u^{\mathrm{T}} P$ в (3.1), получим неравенство

$$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA - \Theta^{\mathrm{T}}K - K^{\mathrm{T}}\Theta & * & * \\ B_v^{\mathrm{T}} P & -\gamma^2 I & * \\ C + D\Theta & 0 & -I \end{pmatrix} < 0. \tag{3.9}$$

Таким образом, если при данной матрице K линейное матричное неравенство (3.9) разрешимо относительно постоянных матриц $P > 0$, Θ и γ^2 таких, что $K = -B_u^{\mathrm{T}}P$, то нестационарный регулятор $u = \Theta(t)x$, (3.3) обеспечивает достижение цели.

Кроме того, можно поступить следующим образом. Если обозначить $\zeta = \mathcal{D}_\mu^{-1}K$, то для непосредственной характеризации множества всех матриц K, при которых достигается цель, согласно теореме 3.1 требуется выяснить, при каких условиях для заданной матрицы ζ существует решение Y неравенства (3.7) такое, что $\zeta = -\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}Y^{-1}$. Так как в правой части последнего равенства стоит матрица параметров закона управления (3.4), то задача сводится к решению следующей обратной задачи центрального H_∞-оптимального управления: при каких условиях закон управления $u = \zeta x$ с заданной матрицей ζ является центральным H_∞-оптимальным управлением (3.4), при котором для системы (2.1) выполняется неравенство

$$\int_0^\infty \left(x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu u - \gamma^2 v^{\mathrm{T}}v\right)\, dt \leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0 \tag{3.10}$$

для некоторых $Q \geqslant C^{\mathrm{T}}C$ и $P > 0$.

Введем матричные функции

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}(s) = \left(\mathcal{W}_u(s)\ \mathcal{W}_v(s)\right), \quad \mathcal{W}_z(s) = C(sI - A)^{-1}(B_u\ B_v),\\ &\mathcal{W}_u(s) = I - \zeta(sI - A)^{-1}B_u, \quad \mathcal{W}_v(s) = -\zeta(sI - A)^{-1}B_v. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь $\mathcal{W}_u(s)$ является передаточной матрицей системы

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_v v \tag{3.12}$$

от входа u к выходу $u - \zeta x$, которая в теории управления называется возвратной разностью для заданного закона управления $u = \zeta x$, $\mathcal{W}_v(s)$ — передаточная матрица от входа v к выходу $-\zeta x$, а $\mathcal{W}_z(s)$ — передаточная матрица от входа $\operatorname{col}(u, v)$ к выходу $z = Cx$.

Теорема 3.2. *Для системы* (2.1), *в которой пара* $(A, (B_u\, B_v))$ *управляема,* $C^{\mathrm{T}}D = 0$ *и матрица* $D^{\mathrm{T}}D$ *представлена в виде декомпозиции* (2.11), *закон управления* $u = \Theta(t)x$ *с матрицей* $\Theta(t)$, *настраиваемой согласно уравнению* (3.8) *при заданной матрице* K, *обеспечивает достижение цели* (2.15), *если выполнено одно из следующих эквивалентных условий, в которых* $\mathcal{D}_\mu = D^{\mathrm{T}}D + \mu^2 W_2 W_2^{\mathrm{T}} > 0$:

(i) *закон управления* $u = \zeta x$ *с* $\zeta = \mathcal{D}_\mu^{-1}K$ *является регуляризованным оптимальным законом управления вида* (3.4), *обеспечивающим уровень гашения возмущений меньше* γ;

(ii) *в предположении, что при* $\zeta = \mathcal{D}_\mu^{-1}K$ *матрица* $A + B_u\zeta$ *гурвицева, для передаточных матриц* $\mathcal{W}(s)$ *и* $\mathcal{W}_z(s)$, *определенных в* (3.11), *выполнено* *обобщенное частотное условие возвратной разности*:

$$\mathcal{W}^{\mathrm{T}}(-j\omega)\mathcal{D}_\mu\mathcal{W}(j\omega) - \mathcal{W}_z^{\mathrm{T}}(-j\omega)\mathcal{W}_z(j\omega) \geqslant \begin{pmatrix} \mathcal{D}_\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \quad \forall\,\omega. \tag{3.13}$$

Доказательство теоремы 3.2, приведенное в Приложении, основано на применении частотной теоремы [11] (леммы Калмана–Якубовича–Попова). Заметим, что частотное условие (3.13) дает решение обратной задачи центрального H_∞-оптимального управления, сформулированной перед теоремой 3.2. В отсутствие возмущений частотное условие (3.13) принимает вид

$$\mathcal{W}_u^{\mathrm{T}}(-j\omega)\mathcal{D}_\mu\mathcal{W}_u(j\omega) - \mathcal{W}_{zu}^{\mathrm{T}}(-j\omega)\mathcal{W}_{zu}(j\omega) \geqslant \mathcal{D}_\mu \quad \forall\,\omega,$$

где $\mathcal{W}_{zu}(s) = C(sI - A)^{-1}B_u$. При $C = 0$ и в невырожденном случае, т.е. когда $\mu = 0$, это условие переходит в хорошо известное частотное условие возвратной разности [12]

$$\mathcal{W}_u^{\mathrm{T}}(-j\omega)S\mathcal{W}_u(j\omega) \geqslant S \quad \forall\,\omega. \tag{3.14}$$

При выполнении (3.14) заданный закон управления $u = \zeta x$ является оптимальным по отношению к невырожденному квадратичному функционалу вида $J(u) = \int\limits_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Su)\,dt$ для некоторой матрицы $Q \geqslant 0$ или, другими словами, этот закон управления обеспечивает выполнение неравенства $\dot V + u^{\mathrm{T}}Su < 0$. Обратная задача минимаксного управления, в которой заданной является не только стратегия управления, но и стратегия возмущения, была рассмотрена в [13].

4. Синтез адаптивных H_∞-оптимальных регуляторов

Применим управление $u = \Theta(t)x$, (3.3) для гашения возмущений в неопределенной системе. Предполагается, что матрицы B_u и D заданы, а остальные матрицы или их некоторые элементы, вообще говоря, не известны, начальные условия x_0 не определены и возмущения не измеряются. А именно, пусть в системе (2.1) матрицы A, B_v и C принадлежат симплексу

$$\mathcal{A} = \left\{ (A\ B_v\ C) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(A_i\ B_{vi}\ C_i), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}$$

с известными вершинами. Допустим, что для каждой вершины этого симплекса найдется своя обратная связь $u = \Theta_i x$, при которой функция $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ. Согласно теореме 3.1 это означает, что линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} A_iY + YA_i^{\mathrm{T}} - B_u\mathcal{D}_{\mu_i}^{-1}B_u^{\mathrm{T}} & * & * \\ B_{vi}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & * \\ C_iY & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.1}$$

в которых $\mathcal{D}_{\mu_i}^{-1} = (D^{\mathrm{T}}D)^{+} + \mu_i^{-2}W_2W_2^{\mathrm{T}} > 0$, разрешимы относительно $Y = Y^{\mathrm{T}} > 0$ и $\mu_i^{-2} > 0$. Суммируя эти неравенства с коэффициентами α_i, получим, что для любой неопределенной системы с матрицами, принадлежащими симплексу $\mathcal{A}$, при законе управления $u = \Theta_\alpha x$, в котором $\Theta_\alpha = -\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}Y^{-1}$ при $\mathcal{D}_\mu^{-1} = (D^{\mathrm{T}}D)^{+} + \mu^{-2}W_2W_2^{\mathrm{T}}$ и $\mu^{-2} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i^{-2}$, выполняется условие $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$, где $V(x) = x^{\mathrm{T}}Y^{-1}x$. Следовательно, предположение А выполняется и адаптивное управление с алгоритмом адаптации (3.3), в котором $K = -B_u^{\mathrm{T}}Y^{-1}$, приводят к достижению цели для всех объектов из симплекса $\mathcal{A}$. Заметим, что здесь в отличие от синтеза робастного управления, основанного на существовании общей функции $V(x)$, не требуется, чтобы существовал единый для всех вершин симплекса закон управления, при котором уровень гашения возмущений меньше γ. Таким образом, адаптивное управление $u = \Theta(t)x$, (3.3) в этой задаче может обеспечить, вообще говоря, меньшее значение уровня гашения возмущений, чем указанное робастное управление.

Если внешнее возмущение в системе не принимается во внимание, то матрица Y в уравнении адаптивного регулятора находится при решении линейных матричных неравенств (4.1), в которых удалены вторые блочные строки и столбцы. Тогда для квадратичного функционала при адаптивном управлении верна оценка

$$\|z\|^2 \leqslant x_0^{\mathrm{T}}Y^{-1}x_0 + \mathrm{tr}\left[(\Theta_0 - \Theta_*)^{\mathrm{T}}M(\Theta_0 - \Theta_*)\right].$$

Если в этом случае к неравенствам (4.1) с удаленными вторыми блочными строками и столбцами добавить неравенство $\mathrm{diag}\,(Y, \gamma^2 I) > 0$ и найти минимальное γ^2 такое, что все эти неравенства разрешимы, то придем к адаптивному γ_0-оптимальному управлению, при котором $\|z\|^2 < \gamma^2|x_0|^2 + \mathrm{tr}\,[(\Theta_0 - \Theta_*)^{\mathrm{T}}M(\Theta_0 - \Theta_*)]$.

Для иллюстрации возьмем модель динамики ракеты, близкую к описанной в [15] уравнениями вида (2.1), в которых матрица A принадлежит многограннику с вершинами

$$A_i = \begin{pmatrix} -0{,}001 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \delta_i & 1 & 0 \\ 0 & -\eta_i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$C = (1 \quad 0 \quad 0{,}1 \quad 0)\,, \quad D = 0,$$

где $(\delta_i, \eta_i) \in \{(0{,}2\,, 6), (0{,}2\,, 106), (4,\ 6), (4,\ 106)\}$. Минимальное значение уровня гашения возмущений, достигаемое в этой системе при робастном управлении, получилось $\gamma = 0{,}017$, в то время, как для рассматриваемого адаптивного управления эта величина равна $\gamma = 0{,}013$. Для расчетов использовался Matlab с дополнительным пакетом cvx.

5. Адаптивное отслеживание выхода эталонной модели

Пусть неопределенный объект описывается уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_v v, \quad y = C_y x, \quad z = Cx. \tag{5.1}$$

Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить заданный уровень гашения возмущений по отношению к отклонению целевого выхода z объекта от целевого выхода z_m эталонной модели, заданной уравнениями

$$\dot{x}_m = A_m x_m, \quad y_m = C_y x_m, \quad z_m = C x_m. \tag{5.2}$$

Будем предполагать, как это принято в теории адаптивного управления с эталонной моделью, что выполнено так называемое условие адаптируемости: для любой, вообще говоря, неизвестной матрицы объекта A найдется матрица Θ_* такая, что $A + B_u \Theta_* C_y = A_m$. Это условие определяет множество объектов, для которых требуется обеспечить указанный уровень гашения возмущений. При этом предположении отклонения состояния и выходов объекта от состояния и соответствующих выходов модели подчиняются уравнениям

$$\dot{e} = A_m e + B_u(\Theta - \Theta_*)y + B_v v, \quad e_y = C_y e, \quad e_z = Ce, \tag{5.3}$$

где $e = x - x_m$, $e_y = y - y_m$, $e_z = z - z_m$.

В соответствии с изложенным подходом выберем квадратичную функцию $V(e) = e^{\mathrm{T}} P e$ и определим адаптивный закон управления в виде

$$u = \Theta y, \quad \dot{\Theta} = -(1/2) M^{-1} \nabla_{\Theta} \left(\dot{V} + |e_z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \right), \tag{5.4}$$

где $\dot{V}$ обозначает производную по времени функции $V(e) = e^{\mathrm{T}} P e$ в силу системы (5.3). Вычисляя

$$\nabla_{\Theta} \left(\dot{V} + |e_z|^2 - \gamma^2 |v|^2 \right) = 2 B_u^{\mathrm{T}} P e y^{\mathrm{T}},$$

приходим к алгоритму адаптации

$$\dot{\Theta} = M^{-1} K e_y y^{\mathrm{T}} \tag{5.5}$$

при условии, что найдется матрица K, удовлетворяющая уравнению $KC_y = -B_u^{\mathrm{T}} P$. Предположение A в данном случае состоит в том, что для уравнения (5.3) при $\Theta = \Theta_*$, т.е. для уравнения

$$\dot{e} = A_m e + B_v v, \quad e_z = Ce, \tag{5.6}$$

должно выполняться неравенство $\dot{V} + |e_z|^2 - \gamma^2 |v|^2 < 0$ для всех e и v. Другими словами, функция $V(e) = e^{\mathrm{T}} P e$ должна обеспечивать для эталонной модели уровень гашения возмущений, меньший γ. В результате, если находится матрица $P > 0$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{pmatrix} A_m^{\mathrm{T}} P + P A_m & * & * \\ B_v^{\mathrm{T}} P & -\gamma^2 I & * \\ C & 0 & -I \end{pmatrix} < 0, \quad B_u^{\mathrm{T}} P = -K C_y, \tag{5.7}$$

то при адаптивном управлении $u = \Theta(t)y$, (5.5) выполняется условие

$$\|e_z\|^2 < \gamma^2\|v\|^2 + e_0^{\mathrm{T}} P e_0 + \mathrm{tr}\,\left[(\Theta_0 - \Theta_*)^{\mathrm{T}} M(\Theta_0 - \Theta_*)\right].$$

6. Заключение

Для линейных динамических объектов рассмотрен новый класс законов управления: линейные регуляторы, имеющие вид статической обратной связи, параметры которых настраиваются в соответствии с дифференциальным уравнением в направлении убывания локальной целевой функции. Получены условия в терминах линейных матричных неравенств или частотных неравенств, при которых эти регуляторы обеспечивают уровень гашения возмущений в замкнутой системе, меньший заданного, и приведены потери по сравнению с соответствующими стационарными линейно-квадратичными и H_∞-оптимальными регуляторами. Установлено и проиллюстрировано на примере, что для объектов, уравнения которых содержат неопределенные матрицы, принадлежащие многограннику, адаптивное управление, синтезируемое на основе этих регуляторов, обеспечивает уровень гашения возмущений, вообще говоря, меньший, чем при так называемом робастном квадратичном управлении, основанном на применении единой функции Ляпунова.

Автор выражает признательность анонимным рецензентам, замечания которых помогли улучшить рукопись.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2.1. Вычислим производную функции

$$\Psi(x,\Theta) = V(x) + \mathrm{tr}\,\left[(\Theta - \Theta_*)^{\mathrm{T}} M(\Theta - \Theta_*)\right]$$

в силу системы (2.1), $u = \Theta(t)y$, (2.8) и составим выражение

$$\dot\Psi + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 = \Phi(x,v,\Theta) - 2\mathrm{tr}\,\left[(\Theta - \Theta_*)^{\mathrm{T}}(D^{\mathrm{T}} D\Theta - K)yy^{\mathrm{T}}\right]. \tag{П.1}$$

Представим функцию $\Phi(x,v,\Theta)$, заданную в (2.6), в виде

$$\begin{gathered}\Phi(x,v,\Theta) = 2x^{\mathrm{T}} P(Ax + B_u\Theta y + B_v v) + x^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} Cx + \\ + y^{\mathrm{T}}\Theta^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} D\Theta y - \gamma^2 v^{\mathrm{T}} v = \Phi(x,v,\Theta_*) - 2y^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}}(\Theta - \Theta_*)y + \\ + y^{\mathrm{T}}(\Theta^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} D\Theta - \Theta_*^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} D\Theta_*)y,\end{gathered} \tag{П.2}$$

где матрица K удовлетворяет уравнению (2.7). Подставляя в (П.1) представление функции $\Phi(x,v,\Theta)$ из (П.2), получим

$$\dot\Psi + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 = \Phi(x,v,\Theta_*) - y^{\mathrm{T}}(\Theta - \Theta_*)^{\mathrm{T}} D^{\mathrm{T}} D(\Theta - \Theta_*)y.$$

Так как согласно предположению А имеем $\Phi(x,v,\Theta_*) < 0$, то верно неравенство

$$\dot\Psi + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < -|D(u - u_*)|^2,$$

интегрирование которого показывает, что выполняются неравенства (2.15). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.1. (i) $\to$ (ii) Если функция $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ при некотором законе управления $u = \Theta x$, то для всех x и v верно неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$. Тогда для достаточно малого $\mu > 0$ будет выполняться $\dot{V} + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$, где $\widehat{z} = \mathrm{col}\,(z, \mu W_2^{\mathrm{T}}u)$. Выделим в левой части последнего неравенства “полный квадрат” и придем к неравенству

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + \gamma^{-2}PB_vB_v^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C - PB_u\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P +$$
$$+ (\Theta + \mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu(\Theta + \mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P) < 0.$$

Если оно выполнено при некотором Θ, то

$$\text{(П.3)} \qquad A^{\mathrm{T}}P + PA + \gamma^{-2}PB_vB_v^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}C - PB_u\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P < 0.$$

Это значит, что для функции $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$ выполняется неравенство $\dot{V} + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$, а следовательно, и неравенство $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$ при законе управления $u = \Theta_P x$, где $\Theta_P = -\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}P$ и

$$\mathcal{D}_\mu^{-1} = (W_1\ W_2)\begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & \mu^{-2}I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1^{\mathrm{T}} \\ W_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = (D^{\mathrm{T}}D)^{+} + \mu^{-2}W_2W_2^{\mathrm{T}}.$$

Осталось заметить, что умножая неравенство (П.3) слева и справа на матрицу $P^{-1} = Y$ и применяя лемму Шура, получим неравенство (3.7).

(ii) $\to$ (i) Если матрица Y удовлетворяет неравенству (3.7), то для функции $V(x) = x^{\mathrm{T}}Y^{-1}x$ при законе управления $u = \Theta_P x$ выполняется $\dot{V} + |\widehat{z}|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$ и, значит, $\dot{V} + |z|^2 - \gamma^2|v|^2 < 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Если выполнены условия, сформулированные в пункте (i), то функция $V(x) = x^{\mathrm{T}}Y^{-1}x$ с матрицей Y, удовлетворяющей неравенству (3.7), обеспечивает уровень гашения возмущений, меньший γ при законе управления $u = \zeta x$, где $\zeta = -\mathcal{D}_\mu^{-1}B_u^{\mathrm{T}}Y^{-1}$. Таким образом, условия теоремы 2.1 выполнены при $K = \mathcal{D}_\mu\zeta$ и, следовательно, при законе управления $u = \Theta(t)x$, (3.8) достигается цель (2.15). Следовательно, остается установить эквивалентность пунктов (i) и (ii).

(i) $\leftrightarrow$ (ii) По определению регуляризованного оптимального закона управления в (3.4) матрица его параметров ζ удовлетворяет уравнению $\mathcal{D}_\mu\zeta = -B_u^{\mathrm{T}}P$ и неравенству (3.5). Запишем эти условия в виде неравенства

$$2x^{\mathrm{T}}P\left[(A + B_u\zeta)x + (B_u\ B_v)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] + 2x^{\mathrm{T}}\left(\zeta^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu\ 0\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$
$$+ x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cx + y^{\mathrm{T}}\zeta^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu\zeta y - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leqslant 0 \quad \forall\, u, v,$$

которое эквивалентно следующему:

$$2x^{\mathrm{T}}P\left[Ax + (B_u\ B_v)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] + 2x^{\mathrm{T}}(\zeta^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu\ 0)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} +$$

$$+ x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cx - y^{\mathrm{T}}\zeta^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu\zeta y - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leqslant 0 \quad \forall\, u, v.$$

Согласно частотной теореме [11] (лемме Калмана–Попова–Якубовича) необходимым и достаточным условием существования матрицы $P > 0$, удовлетворяющей этому неравенству, является при сделанных предположениях выполнение для всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ частотного условия

$$L^{\mathrm{T}}(-j\omega)\left(\zeta^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu\zeta - C^{\mathrm{T}}C\right)L(j\omega) - 2\mathrm{Re}\, L^{\mathrm{T}}(-j\omega)\left(\zeta^{\mathrm{T}}\mathcal{D}_\mu\ 0\right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

где $L(s) = (sI - A)^{-1}(B_u\ B_v)$. С учетом обозначений (3.11) последнее неравенство преобразуется к виду (3.13). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И., Ронин Е.И., Берман В.Ш., Коган М.М.* Адаптивная стабилизация динамических объектов // Тезисы докладов VII Всесоюзного совещания по проблемам управления. Минск, 1977. С. 38–39.
2. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
3. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Сб. тр. 9-й Всесоюзной школы-семинара по адаптивным системам, КазПТИ, Алма-Ата, 1979, С. 139–143.
4. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990.
5. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод скоростного градиента и его приложения // АиТ. 2021. № 9. С. 3–72.

   Andrievsky B.R., Fradkov A.L. Speed Gradient Method and Its Applications // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1463–1518.
6. *Annaswamy A.A., Fradkov A.L.* A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning // Annual Reviews in Control. 2021. V. 52. P. 18–41.
7. *Ben Yamin R., Yaesh I., Shaked U.* Robust simple adaptive model following with guaranteed H_∞-performance // Proc. 16th Mediterranean Conference on Control and Automation. 2008. P. 238–243.
8. *Peaucelle D., Fradkov A.* Robust adaptive $L2$-gain control of polytopic MIMO LTI systems — LMI results // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. P. 881–887.
9. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Метод пассификации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // АиТ. 2006. № 11. С. 3–37.

   Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Method of passification in adaptive control, estimation, and synchronization // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. P. 1699–1731.

10. *Allerhand L.* Stability of adaptive control in the presence of input disturbances and H_∞ performance // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 14. P. 76–81.
11. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. 1973. № 5. С. 1100–1129.
12. *Kalman R.E.* When is a Linear Control System Optimal? // Trans. ASME Ser. D: J. Basic Eng. 1964. V. 86. P. 1–10.
13. *Kogan M.M.* Solution to the Inverse Problem of Minimax Control and Worst Case Disturbance for Linear Continuous-Time Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1998. V. 43. No. 5. P. 670–674.
14. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
15. *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M.* LMI Control Toolbox for Use with MATLAB. The Mathworks Inc. 1995.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 23.12.2021

После доработки 11.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022