Автоматика и телемеханика, № 8, 2022

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева)

АНАЛИЗ РАВНОВЕСИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Выведена вычислительная формула оптимального действия агента в виде дробной иррациональной функции, показано, что экстремумы этой функции соответствуют неподвижным точкам. Для нахождения неподвижной точки выведено иррациональное уравнение и получены приближенные формулы его решения. Доказаны необходимые условия существования и единственности или множественности равновесий в зависимости от параметров типа агентов.

Ключевые слова: олигополия, агрегативная игра, дробная иррациональная функция, неподвижная точка, множественность равновесий.

DOI: 10.31857/S0005231022080086, **EDN:** AHSHBT

1. Введение

Решение игры агентов на рынке олигополии находится в виде равновесия Курно–Нэша [1, 2]. С позиций вычисления равновесия особенно сложными являются постановки проблем с нелинейными функциями издержек агентов, в которых равновесия исследовались путем численных экспериментов. В частности, в таких случаях появляется неустойчивость равновесия вследствие роста числа агентов [3], при варьировании параметров агентов равновесие дестабилизируется через фазу двойной бифуркации [4], доказано, что локальная устойчивая область точки равновесия по Нэшу может сжиматься до нуля при определенных параметрах типа агентов [5, 6]. В случае линейной функции спроса и квадратичных функций затрат, отражающих убывающую отдачу от масштаба, подтверждено, что хаотическая динамика зависит от адаптационного поведения агентов, и показаны прерывистый переход к хаосу и кризис слияния аттракторов [7]. Даже в модели Курно с линейными функциями издержек при условии адаптации стратегий на базе фрактальных производных установлена хаотичная динамика равновесий [8].

Поэтому аналитическое исследование проблемы единственности аттракторов в игре олигополии является актуальной проблемой. Пути такого анализа были намечены в виде аналитического решения системы нелинейных уравнений равновесия [9].

В данной статье ставится задача аналитического подтверждения множественности равновесия Курно–Нэша в нелинейной постановке игры агентов рынка олигополии, относящейся к агрегативным играм. Вопрос количества равновесий актуален как теоретический базис нахождения равновесия в таких играх. Проблематика решения агрегативных игр отражена в обширном корпусе исследований, проведенных российскими учеными, из которых отметим наиболее свежие. Равновесия в агрегативных играх анализировались на основе наилучших ответов игроков при информационной рефлексии о значениях экзогенного параметра функции полезности [10]. Исследовалась игра олигополии Штакельберга при рефлексии агентов о параметрах функций издержек окружения [11]. Оценивалась эффективность лидерства по Штакельбергу по сравнению с представлением агента о рынке как о совершенной конкуренции [12]. В линейной модели олигополии исследовался динамический процесс формирования равновесия Курно [13] и Штакельберга [14] и доказаны условия сходимости процесса к аттрактору.

2. Методология

Рассмотрим следующую нелинейную модель рынка олигополии. Пусть агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$\Pi_i\left(Q, Q_i\right) = P\left(Q\right) Q_i - C_i\left(Q_i\right), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \ldots, n\} \tag{1}$$

при линейной функции цены спроса на товар от суммарного объема предложения всех агентов рынка

$$P\left(Q\right) = a - bQ, \quad a > b > 0, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i, \tag{2}$$

и нелинейных (степенных) функциях издержек агентов

$$C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} > 0, \quad B_i > 0, \quad \beta_i \in (0,2), \quad C'_Q < a, \quad i \in N, \tag{3}$$

где Q_i, Π_i — действие (объем выпуска) и функция полезности (прибыль) i-го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов, т.е. количество элементов множества N; P, Q — равновесная цена и суммарный объем рынка; C_{Fi}, B_i, β_i — коэффициенты функций издержек агентов, C_{Fi} интерпретируется как постоянные издержки; a, b – коэффициенты обратной функции спроса. Степенная функция издержек (3) в диапазоне коэффициентов $\beta_i \in (0, 2)$ обобщает три типа агентов: агент с постоянной отдачей от расширения масштаба описывается линейной функцией издержек ($\beta_i = 1$), агент с положительным эффектом расширения масштаба — вогнутой функцией издержек при $0 < \beta_i < 1$, агент с отрицательным эффектом — выпуклой функцией при $1 < \beta_i < 2$.

Модели выбора оптимальных (символ «*») действий агентов с учетом условий (1)–(3) запишем в виде

$$Q_i^* = \arg\max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg\max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a - bQ)Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\}, \quad i \in N. \tag{4}$$

Равновесие Нэша в системе (4) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы *уравнений реакций* следующего типа (при некотором известном векторе предположительных вариаций):

$$\frac{\partial \Pi_i \left(Q_i, \rho_{ij}\right)}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N, \tag{5}$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация в уравнении реакции i-го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j-го агента в ответ на единичный прирост выпуска i-го агента. Решение уравнений (5) было получено [9] в виде следующего выражения, зависящего от параметров x_i:

$$y_i = \frac{\alpha_i \left[\prod\limits_{j=1 \backslash i}^{n} (\delta_j - 1) + \sum\limits_{j=1 \backslash i}^{n} \prod\limits_{\gamma=1 \backslash j,i}^{n} (\delta_\gamma - 1) \right] - \sum\limits_{j=1 \backslash i}^{n} \left[\alpha_j \prod\limits_{\gamma=1 \backslash i,j}^{n} (\delta_\gamma - 1) \right]}{\prod\limits_{j=1}^{n} (\delta_j - 1) + \sum\limits_{j=1}^{n} \prod\limits_{\gamma=1 \backslash j}^{n} (\delta_\gamma - 1)}, \quad i \in N \tag{6а}$$

с учетом обозначений

$$\begin{gathered} y_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \in (0,1), \quad \alpha_i = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i \beta_i (2 - \beta_i) x_i^{\beta_i - 1}}{\hat{b}}, \\ \delta_i = 2 + \frac{\hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1)}{\hat{b}} x_i^{\beta_i - 2} + S_i, \quad Q_{\max} = \frac{a}{b}, \\ \hat{a} = Q_{\max} a, \quad \hat{b} = Q_{\max}^2 b, \quad \hat{B}_i = Q_{\max}^{\beta_i} B_i, \quad i \in N, \end{gathered} \tag{6б}$$

причем параметры x_i удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} y_i - x_i < \varepsilon_i, \quad x_i < y_i, \quad \Omega_i = x_i + \zeta_i (y_i - x_i), \\ \zeta_i, x_i \in (0,1), \quad \varepsilon_i \in (0, \Omega_i), \quad i \in N, \end{gathered} \tag{6в}$$

где $y_i \in (0,1)$ — нормированное значение действия агента, S_i — сумма предположительных вариаций i-го агента. В формулах (6б) переменные x_i представляют собой параметры линеаризации [9] системы уравнений оптимальных реакций агентов (5) на основе разложения степенных функций в ряды Тейлора, поэтому в соответствии с (6в) имеют ту же размерность, что и равновесные действия y_i, и должны быть им равны с точностью до малых положительных чисел ε_i.

Поставим задачу анализа влияния параметров функций издержек агентов (т.е. параметров типа) на функцию равновесного действия агента (6а).

3. Результаты

Поскольку формула вычисления оптимального действия агента (6а) зависит от неизвестных априори параметров x_i, а также в силу сложной зависимости этого действия от других параметров игры исследуем эти особенности в виде следующих результатов, доказательство которых приведено в Приложении.

Представленные ниже утверждения касаются i-го агента, поэтому для упрощения записи опустим в (6а) и далее индекс i.

Утверждение 1. *Функция* (6а) *для i-го агента является дробной иррациональной функцией вида*

(7а) $$y = \frac{a_0 + a_1 x^{\theta}}{b_0 + b_1 x^{\theta-1}},$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

(7б) $$\theta = \beta - 1 \in (-1, 1)\,, \quad a_0 = \frac{1-\lambda}{\bar{B}}, \quad a_1 = \theta^2 - 1 < 0,$$
$$b_0 = \frac{1 + S + \tau}{\bar{B}}, \quad b_1 = \theta\,(\theta+1) \begin{cases} > 0, & \theta \in (0,1)\,, \\ < 0, & \theta \in (-1,0)\,, \end{cases}$$

и коэффициенты a_0, b_0 зависят от переменных x, относящихся к другим агентам; в этих формулах

$$\bar{B} = \frac{B}{bQ_{\max}^{2-\beta}}, \quad \lambda = \frac{\sum\limits_{j\neq i}^{n} \frac{\alpha_j}{\omega_j}}{1 + \sum\limits_{j\neq i}^{n} \frac{1}{\omega_j}}, \quad \tau = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j\neq i}^{n} \frac{1}{\omega_j}}, \quad \omega = \delta - 1,$$

причем

(7в) $$\lambda = \tau \sum_{j\neq i}^{n} \frac{\alpha_j}{\omega_j}, \quad \sum_{j\neq i}^{n} \frac{1}{\omega_j} = \frac{1}{\tau} - 1.$$

Утверждение 2. *Функция* $y(x)$

i) *имеет разрыв второго рода в точке*

(8а) $$x_{\infty} = \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{1}{\theta-1}}$$

в случае $\theta \in (0,1)$ *при* $b_0 < 0$ *и в случае* $\theta \in (-1,0)$ *при* $b_0 > 0$*, а в иных случаях непрерывна;*

ii) *имеет ноль при* $a_0 > 0$ *в точке*

$$x^+ = \left|\frac{a_0}{a_1}\right|^{\frac{1}{\theta}}; \tag{8б}$$

iii) *в интервале* $x \in (0,1)$ *имеет следующие свойства в случаях:*

1) $\theta \in (0,1)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$: *непрерывная, неотрицательная в интервале* $x \in (0, x^+)$*, вогнутая и при условии* $u(1) < 0$ *унимодальная;*

2) $\theta \in (0,1)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$: *непрерывная, отрицательная;*

3) $\theta \in (0,1)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$: *при* $x_\infty \notin (0,1)$ *аналогичны случаю 1; при* $x_\infty \in (0,1)$ *неотрицательная в интервалах* $x \in (0, x^+) \cap (0, x_\infty)$ *и* $x \in \in (x^+, 1) \cap (x_\infty, 1)$*, при условиях* $u(1) > 0$, $u(x_\infty) < 0$ *вогнутая в интервале* $x \in (0, x_\infty)$*, выпуклая в интервале* $x \in (x_\infty, 1)$*, унимодальная в каждом их этих интервалов;*

4) $\theta \in (0,1)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$: *при* $x_\infty \notin (0,1)$ *отрицательная в интервале* $x \in (0,1)$*; при* $x_\infty \in (0,1)$ *отрицательная в интервале* $x \in (0, x_\infty)$*, неотрицательная в интервале* $x \in (x_\infty, 1)$*, в последнем унимодальная и выпуклая при условии* $u(1) > 0$*;*

5) $\theta \in (-1,0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$: *при* $x_\infty \notin (0,1)$ *в интервале* $x \in (0, x^+)$ *неотрицательная, вогнутая и унимодальная при условии* $u(1) > 0$*; при* $x_\infty \in (0,1) \wedge x^+ \notin (0,1)$ *неотрицательная в интервале* $x \in (0, x_\infty)$*, возрастающая, экстремумов нет; при* $x_\infty \in (0,1) \wedge x^+ \in (0,1)$ *неотрицательная в интервале* $x \in (0, x^+) \cup (x_\infty, 1)$*, вогнутая в интервале* $x \in (0, x_\infty)$ *и выпуклая в интервале* $x \in (x_\infty, 1)$*, унимодальная в каждом интервале при условиях* $u(x_\infty) > 0$, $u(1) < 0$*;*

6) $\theta \in (-1,0)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$: *в интервале* $x \in (0,1)$ *непрерывная, неотрицательная, вогнутая и при условии* $u(1) > 0$ *унимодальная;*

7) $\theta \in (-1,0)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$: *в интервале* $x \in (0, x^+)$ *непрерывная, неотрицательная, вогнутая и при условии* $u(1) > 0$ *унимодальная;*

8) $\theta \in (-1,0)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$: *в интервале* $x \in (0, x_\infty)$ *непрерывная, неотрицательная, возрастающая, экстремумов нет, а в интервале* $x \in (x_\infty, 1)$ *отрицательная,*

iiii) *условие* $u(x_\infty) > 0$ *равносильно следующему условию:*

$$-\frac{a_0}{a_1} > \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}, \tag{8в}$$

где

$$u = a_0 - b_0 x - (b_1 - a_1)\, x^\theta, \quad u\,(1) = a_0 - b_0 - (b_1 - a_1),$$

$$u\,(x_\infty) = a_0 + a_1 \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}.$$

Следовательно, для существования экстремума функции $y(x)$ в непрерывном случае необходимо, чтобы функция $u(\cdot)$ удовлетворяла следующим условиям: значения $u(0)$ и $u(1)$ имели противоположные знаки, а при наличии разрыва второго рода функции $y(x)$, чтобы $u(x_\infty)$ и $u(1)$ имели разные знаки.

В дальнейшем обозначим случаи, описанные в утверждении 2(iii), индексом $t = 1, \ldots, 8$. Поскольку условия (6в) соответствуют неподвижной точке функции (7а), то исследуем этот аспект.

Утверждение 3. *Если $b_0 + b_1 x^{\theta-1} \neq 0$, то функция $y(x)$ в интервале $x \in (0,1)$ имеет неподвижную точку $y = x$, она совпадает со стационарной точкой и вычисляется из уравнения*

$$f(x) = k_1 x + k_2 x^\theta = 1, \tag{9а}$$

где коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$k_1 = \frac{b_0}{a_0}, \quad k_2 = \frac{b_1 - a_1}{a_0}. \tag{9б}$$

Поэтому наличие неотрицательного экстремума (или экстремумов) функции $y(x)$ является основанием существования и единственности (или множественности) неотрицательного равновесия в игре с функциями полезности (4).

Обозначим решение уравнения (9а) символом $y^* = x^*$ и будем называть его точкой равновесия; число равновесий обозначим как n_E. Иррациональное уравнение (9а) не имеет аналитического решения, поэтому предложим следующее приближенное решение, которое обозначим через $\tilde{y}^t$, где верхний индекс соответствует случаям, описанным в утверждении 2, $t = 1, \ldots, 8$.

Утверждение 4. *Уравнение (9а) в интервале $x \in (0,1)$ в случаях $t = 1, \ldots, 8$ соответственно имеет с погрешностью $\left|1 - k_1\tilde{y} - k_2\tilde{y}^\theta\right|$ следующие приближенные решения:*

$$\tilde{y}^1 = \begin{cases} \left(\tilde{y}_{\theta=0}\right)^{1-2\theta} \left(\tilde{y}^t_{\theta=0,5}\right)^{2\theta}, & \theta \in (0;0,5), \ k_2 < 1, \ k_1 + k_2 > 1, \\ \left(\tilde{y}^t_{\theta=0,5}\right)^{2-2\theta} \left(\tilde{y}_{\theta=1}\right)^{2\theta-1}, & \theta \in (0,5;1), \ k_1 + k_2 > 1, \end{cases} \tag{10а}$$
$$\text{при } k_1, k_2 > 0,$$

$$\tilde{y}^2 \text{ не существует при } k_1 < 0, \ k_2 < 0, \tag{10б}$$

$$\tilde{y}^3 = \begin{cases} \tilde{y}^1_1, \text{ если } x_\infty \notin (0,1), \ k_1 + k_2 > 1, \\ \tilde{y}^1_1, \text{ если } x_\infty \in (0,1), \ k_1 + k_2 < 1, \ f(x_\infty) > 1, \\ \qquad k_2 \in \left(2\sqrt{|k_1|}, 2|k_1|\right) \wedge k_2 - |k_1| < 1, \end{cases} \tag{10в}$$
$$\text{при } k_1 < 0, \ k_2 > 0,$$

(10г) $\tilde{y}^4 = \begin{cases} & \textit{не существует, если } \; x_\infty \notin (0,1)\,, \\ \tilde{y}^1, & \textit{если } \; x_\infty \in (0,1) \; \textit{ и } k_1 + k_2 > 1,\; |k_2| < 2k_1, \end{cases}$

при $k_1 > 0,\; k_2 < 0,$

(10д1) $\tilde{y}^{5.1} = \begin{cases} (\tilde{y}_{\theta=0})^{1-2\theta}\,(\tilde{y}_{\theta=-0,5})^{-2\theta}, & \theta \in (0; -0{,}5),\; k_2 < 1,\; k_1 + k_2 < 1, \\ (\tilde{y}_{\theta=-0,5})^{2+2\theta}\,\left(\tilde{y}^t_{\theta=-1}\right)^{1-2\theta}, & \theta \in (-0{,}5; -1), \\ & k_1 k_2 < \dfrac{1}{4} \wedge k_1 + k_2 < 1,\; k_2^2 k_1 > \dfrac{4}{27}, \end{cases}$

если $x_\infty \notin (0,1)$ *при* $k_1, k_2 > 0,$

(10д2) $\tilde{y}^{5.2}$ *не существует, если* $x_\infty \in (0,1) \wedge x^+ \notin (0,1)$ *при* $k_1, k_2 > 0,$

(10д3) $\tilde{y}^{5.3} = \tilde{y}^{5.1},\;\; k_1 k_2 < \dfrac{1}{4},\; k_1 + k_2 > 1 \wedge k_1 > \dfrac{1}{2},\; f(x_\infty) < 1,$

если $x_\infty \in (0,1) \wedge x^+ \in (0,1)$ *при* $k_1, k_2 > 0,$

(10е) $\tilde{y}^6 = \tilde{y}^{5.1},\; k_1 + k_2 > 1$ *при* $k_1 > 0, k_2 < 0,$

(10ж) $\tilde{y}^7 = \tilde{y}^{5.1},\;\; k_1 + k_2 < 1,\;\; a_0 < 1 \wedge a_0 + |b_0| > 1$ *при* $k_1 < 0, k_2 > 0,$

(10з) $\tilde{y}^8$ *не существует при* $k_1 < 0,\; k_2 < 0,$

где $\varepsilon^t_{\max} > 0$ *— максимальная погрешность в* t*-м случае,*

$$\varepsilon^1_{\max} = \varepsilon^3_{\max} = \varepsilon^4_{\max} = \frac{k_2}{k_1}\,(k_1 + k_2 - 1), \quad \varepsilon^5_{\max} = \frac{\sqrt{1 - 4k_1k_2} + k_2}{2},$$

$$\varepsilon^6_{\max} = k_1 - k_2 - 1, \quad \varepsilon^7_{\max} = \frac{1 - a_0}{a_0}, \quad \tilde{y}^1_{\theta=0} = \frac{1 - k_2}{k_1},$$

$$\tilde{y}^1_{\theta=0,5} = \left(\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1}\right)^2, \quad \tilde{y}^1_{\theta=1} = \frac{1}{k_1 + k_2},$$

$$\tilde{y}^3_{\theta=0,5} = \left(\frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1}\right)^2, \quad \tilde{y}^4_{\theta=0,5} = \left(\frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2k_1}\right)^2,$$

$$\tilde{y}^5_{\theta=-0,5} = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}\right)^2, \quad q = \frac{k_2}{2k_1},$$

$$D = \frac{27k_2^2 k_1 - 4}{108k_1^3}, \quad \tilde{y}^{5.1}_{\theta=-1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4k_1k_2}}{2k_1},$$

$$\tilde{y}^{5.3}_{\theta=-1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k_1k_2}}{2k_1},$$

$$\tilde{y}^6_{\theta=-1} = \frac{1}{k_1}, \quad \tilde{y}^7_{\theta=-1} = \frac{a_0 - 1}{a_0 k_1}.$$

Формулы приближенного вычисления (10) актуальны в указанных диапазонах значений k_1, k_2, а если в реальных задачах эти диапазоны не соблюдаются, то необходимо вычислять y^* путем непосредственного решения уравнения (9а) численными методами. Поскольку параметры a_0, b_0 зависят от переменных y, относящихся к другим агентам, то формулы (10) приводят к системе N уравнений с N неизвестными y_i, $i \in N$.

4. Комментарии к результатам

Графическая интерпретация условий экстремума функции $y(x)$ и соответствующих экстремумам неподвижных точек представлена на рис. 1–5. На этих рисунках функция $u(x)$ характеризует либо знак y' при $\theta \in (0, 1)$, либо противоположный знак при $\theta \in (-1, 0)$, функция $f(x)$ (с учетом $f = 1 - \frac{u}{a_0}$) показывает значение неподвижной точки при $f(x) = 1$, а функция $v(x) = b_0 + b_1 x^{\theta-1}$ есть знаменатель $y(x)$ и характеризует разрыв. Подобные разрывы были отмечены также для корней динамических уравнений Эйлера [15]. Иллюстрация оценки погрешности приближенного решения приведена на рис. 6.

От параметров типа агентов зависит не только значения их равновесных действий, но и существование, а также единственность (или множественность) равновесия. Обобщение этих свойств приведено в табл. 1.

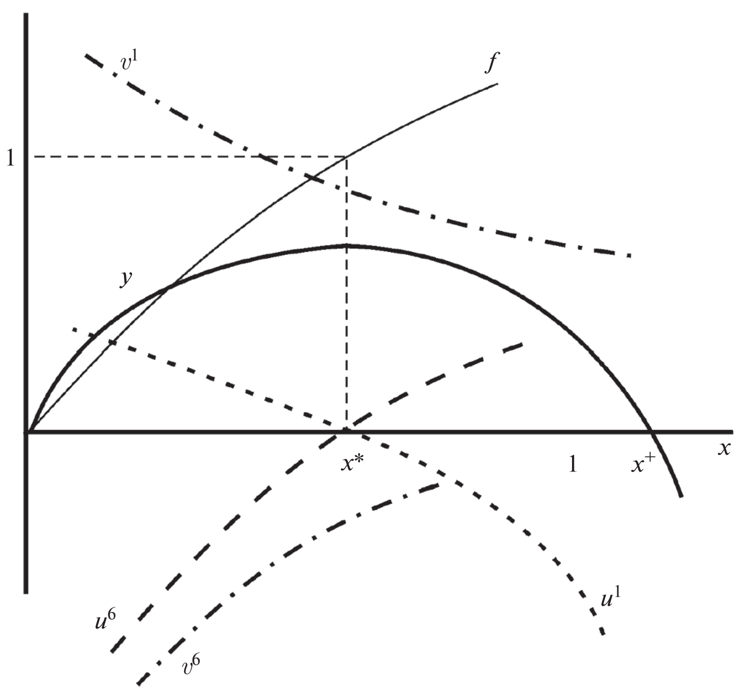

Рис. 1. Случай 1: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $u^1 = \operatorname{sgn} y'$; случай 6: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$, $u^6 = -\operatorname{sgn} y'$.

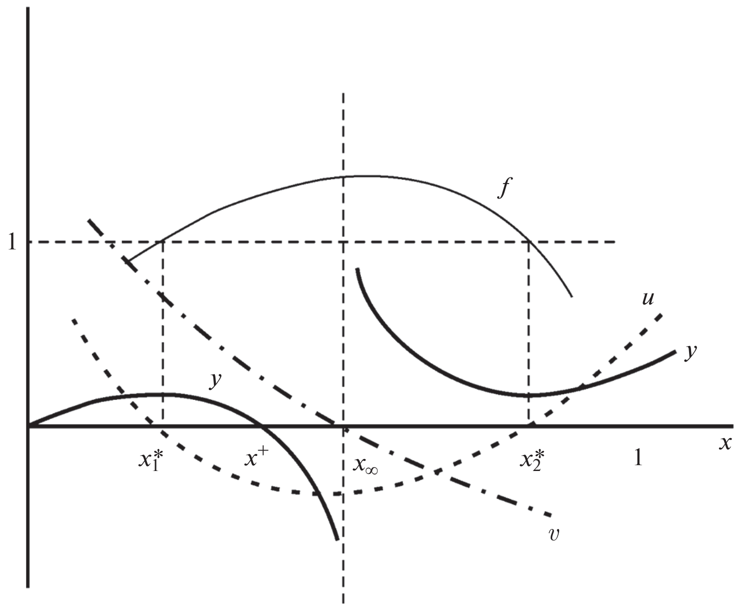

Рис. 2. Случай 3: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, $x_\infty \in (0, 1)$, $u = \operatorname{sgn} y'$.

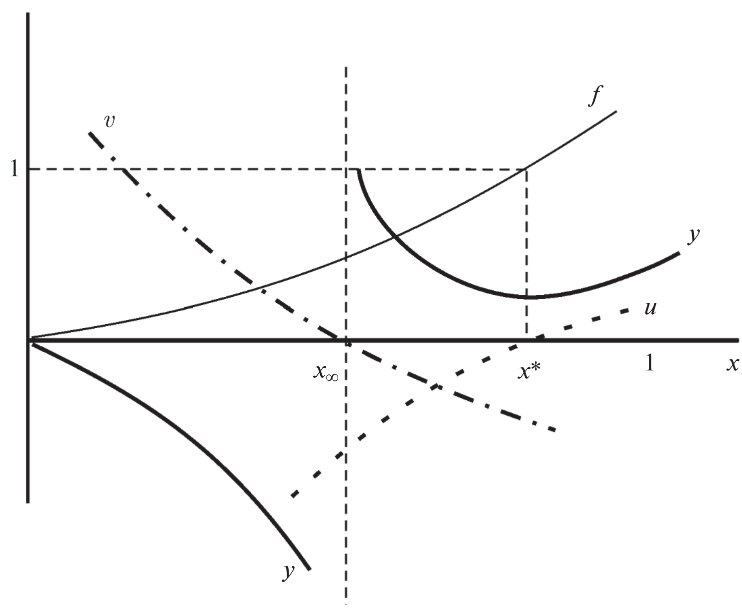

Рис. 3. Случай 4: $\theta \in (0, 1)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$, $x_\infty \in (0, 1)$, $u = \operatorname{sgn} y'$.

Факторы, влияющие на число и существование равновесий, следующие. Знак a_0 соответствует знаку $(1 - \lambda)$ и зависит главным образом от параметров типа окружения: $a_0 > 0$, если $\lambda < 1$. Знак b_0 совпадает со знаком $(1 + S + \tau)$ и зависит от типа агента через S и от типа окружения через τ:

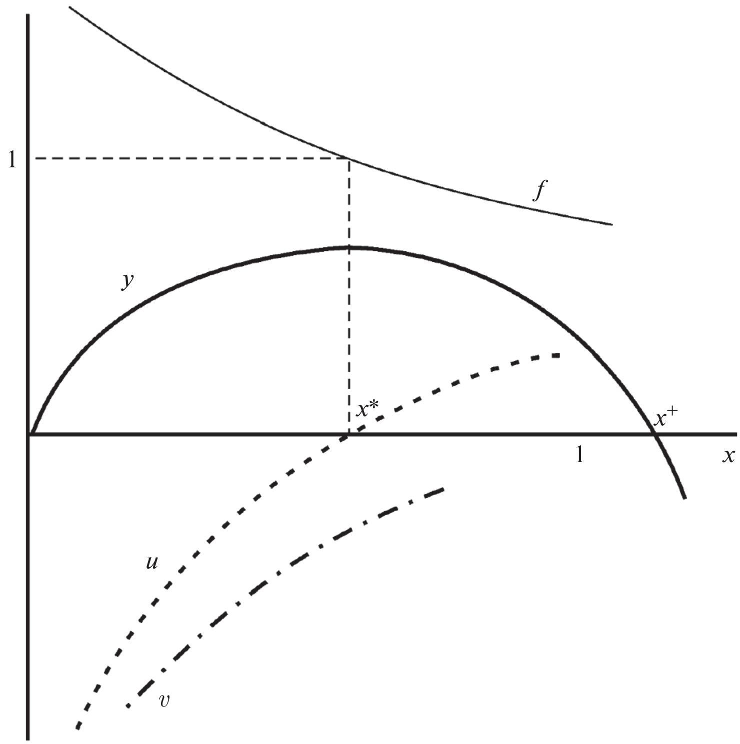

Рис. 4. Случай 5: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $x_\infty \notin (0, 1)$; случай 7: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, $u = -\operatorname{sgn} y'$.

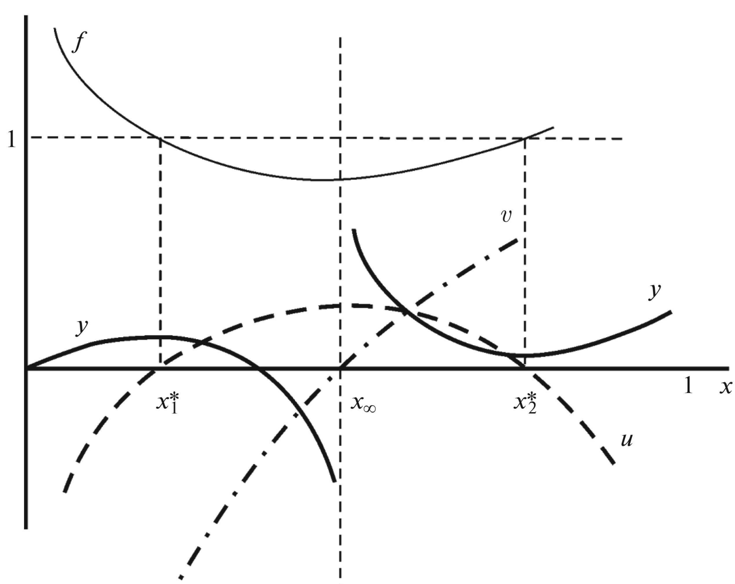

Рис. 5. Случай 5: $\theta \in (-1, 0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$, $u = -\operatorname{sgn} y'$.

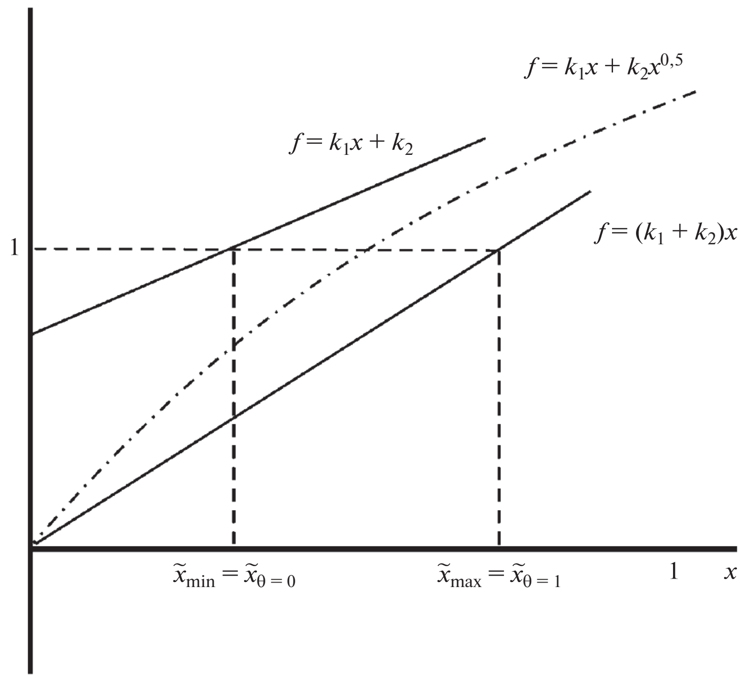

Рис. 6. Оценка погрешности приближенного решения в случае 1.

$b_0 < 0$, если $S < 0$, $|S| > 1 + \tau$, т.е. только при $\beta \in (0, 1)$ (поскольку $S \in (-1, 0]$ и $\tau > 0$ при $\beta \in (1, 2)$); $b_0 > 0$ в случае $S > -(1 + \tau)$, что возможно как при $\beta \in (0, 1)$, так и при $\beta \in (1, 2)$. Следовательно, случаи 3 и 4, в которых $b_0 < 0$ и $\beta \in (1, 2)$, не реализуются (выделены в табл. 1 курсивом).

Таблица 1. Свойства равновесий при различных параметрах типа агентов

t	β	$1-\lambda$	$1+S+\tau$	Вариант случая	n_E	Условия равновесия
1	$\in (1,2)$	>0	>0	–	1	$a_0 - b_0 - \beta < 0$
2		<0	>0	–	0	–
3.1		>0	<0	$\lvert b_0\rvert < \lvert b_1\rvert$	*1*	$a_0 - b_0 - \beta < 0$
3.2		>0	<0	$\lvert b_0\rvert > \lvert b_1\rvert$	*2*	$a_0 - b_0 - \beta > 0$, $u_\infty < 0$
4.1		<0	<0	$\lvert b_0\rvert < \lvert b_1\rvert$	*0*	–
4.2		<0	<0	$\lvert b_0\rvert > \lvert b_1\rvert$	*1*	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
5.1	$\in (0,1)$	>0	>0	$\lvert b_0\rvert < \lvert b_1\rvert$	1	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
5.2		>0	>0	$\lvert b_0\rvert > \lvert b_1\rvert$, $\lvert a_0\rvert < \lvert a_1\rvert$	0	–
5.3		>0	>0	$\lvert b_0\rvert > \lvert b_1\rvert$, $\lvert a_0\rvert > \lvert a_1\rvert$	2	$a_0 - b_0 - \beta < 0$, $u_\infty > 0$
6		<0	<0	–	1	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
7		>0	<0	–	1	$a_0 - b_0 - \beta > 0$
8		<0	>0	–	0	–

Локализация точки разрыва x_∞ и точки нуля x^+ функции $y(x)$ приводит к градации случаев: $x_\infty \notin (0,1)$, если $|b_0| < |b_1|$; $x^+ \notin (0,1)$, если $|a_0| > |a_1|$ при $\beta \in (1,2)$, а при $\beta \in (0,1)$ наоборот.

Существование единственного равновесия зависит от знака параметра $u(1) = a_0 - b_0 - \beta$. Существование двух равновесий (случаи 3.2 и 5.3) зависит от противоположности знаков параметров $u(1)$, $u(x_\infty)$; в табл. 1 запишем последнее условие на базе (8в) и обозначим как $u_\infty = u(x_\infty)$. Равновесие не существует, если функция $y(x)$ отрицательная в интервале $(0,1)$, т.е. в случаях 2 и 4.1, или не имеет экстремумов (случаи 5.2 и 8).

5. Заключение

Исследована игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Найдена зависимость оптимального действия агента от параметров типа, т.е. коэффициентов функций издержек агента и его окружения, а также их предположений о стратегиях конкурентов, в виде дробной иррациональной функции, неподвижная точка которой определяет равновесие в игре. Для этой функции доказано нетривиальное свойство совпадения неподвижной точки и стационарной точки, причем показано, что стационарная точка является именно точкой экстремума. Анализ числа и свойств экстремумов исследуемой функции при различных сочетаниях ее коэффициентов позволил установить количество равновесий в различных игровых ситуациях, а анализ иррационального уравнения неподвижной точки привел к приближенным формулам расчета равновесий.

Число равновесий зависит от типа эффекта расширения масштаба, т.е. выпуклости или вогнутости функции издержек агента. Для агента с отрицательным эффектом расширения масштаба (т.е. выпуклой функцией издержек) возможно только два случая — существование единственного равновесия или несуществование равновесия. Для агента с положительным эффектом расширения масштаба (т.е. вогнутой функцией издержек) может существовать одно равновесное действие, два равновесия или не существовать равновесия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Введем следующие обозначения:

$$\omega = \delta - 1, \quad D = \prod_{j=1}^{n} \omega_j + \sum_{j=1}^{n} \prod_{\gamma \neq j}^{n} \omega_\gamma, \quad \Delta = \prod_{j \neq i}^{n} \omega_j,$$

$$\psi = \prod_{j \neq i}^{n} \omega_j + \sum_{j=1}^{n} \prod_{\gamma \neq j}^{n} \omega_\gamma = \frac{D - \Delta}{\omega}, \quad \varphi = \sum_{j \neq i}^{n} \alpha_j \prod_{\gamma \neq i,j}^{n} \omega_\gamma.$$

В этом случае формулу (6а) можно записать следующим образом:

$$y = \frac{\alpha\psi - \varphi}{D} = \frac{\alpha\psi - \varphi}{\omega\psi + \Delta} = \frac{\alpha - \varphi/\psi}{\omega + \Delta/\psi} = \frac{\alpha - \lambda}{\omega + \tau}, \tag{П.1}$$

где $\lambda = \varphi/\psi$, $\tau = \Delta/\psi$. Поскольку, например, при $n = 4$,

$$\lambda_4 = \frac{\alpha_1\omega_2\omega_3 + \alpha_2\omega_1\omega_3 + \alpha_3\omega_2\omega_1}{\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3} = \frac{\frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{\alpha_2}{\omega_2} + \frac{\alpha_3}{\omega_3}}{1 + \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3}},$$

$$\tau_4 = \frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3}},$$

то эти параметры можно представить в следующем виде:

$$\lambda = \frac{\sum\limits_{j\neq i}^{n} \frac{\alpha_j}{\omega_j}}{1 + \sum\limits_{j\neq i}^{n} \frac{1}{\omega_j}}, \quad \tau = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j\neq i}^{n} \frac{1}{\omega_j}},$$

т.е.

$$\lambda = \tau \sum_{j\neq i}^{n} \frac{\alpha_j}{\omega_j}, \quad \sum_{j\neq i}^{n} \frac{1}{\omega_j} = \frac{1}{\tau} - 1.$$

Отсюда следует, что в формуле (П.1) параметры λ и τ не зависят от переменной x данного агента, а зависят от x_j, $j \neq i$. Подставим формулы (7б) в (П.1):

$$y = \frac{\hat{a} - \hat{B}\beta\,(2-\beta)\,x^{\beta-1} - \hat{b}\lambda}{\hat{b} + \hat{B}\beta\,(\beta-1)\,x^{\beta-2} + \hat{b}S + \hat{b}\tau} = \frac{\bar{a} - \bar{B}\beta\,(2-\beta)\,x^{\beta-1} - \lambda}{1 + \bar{B}\beta\,(\beta-1)\,x^{\beta-2} + S + \tau}, \tag{П.2}$$

где

$$\bar{a} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} = \frac{a}{bQ_{\max}} = 1, \quad \bar{B} = \frac{\hat{B}}{\hat{b}} = \frac{B}{bQ_{\max}^{2-\beta}}.$$

Обозначим:

$$\theta = \beta - 1, \quad a_0 = \frac{1-\lambda}{\bar{B}}, \quad a_1 = 1 - \theta^2, \quad b_0 = \frac{1 + S + \tau}{\bar{B}}, \quad b_1 = \theta\,(\theta + 1)\,.$$

Тогда (П.2) можно записать в виде (7а).

Доказательство утверждения 2. В формуле производной функции (7а)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a_1\theta x^{\theta-1}\left(b_0 + b_1 x^{\theta-1}\right) - b_1\,(\theta-1)\,x^{\theta-2}\left(a_0 + a_1 x^{\theta}\right)}{\left(b_0 + b_1 x^{\theta-1}\right)^2} = \\ &= \frac{x^{\theta-2}\theta\left(1-\theta^2\right)\left(a_0 - b_0 x - (b_1 - a_1)\,x^{\theta}\right)}{\left(b_0 + b_1 x^{\theta-1}\right)^2} \end{aligned} \tag{П.3}$$

обозначим $u = a_0 - b_0 x - (b_1 - a_1)\, x^{\theta}$, $v = b_0 + b_1 x^{\theta-1}$, т.е. параметр u характеризует знак производной:

$$\operatorname{sgn} y' = \begin{cases} \operatorname{sgn} u, & \text{если } \theta \in (0,1)\,, \\ -\operatorname{sgn} u, & \text{если } \theta \in (-1,0)\,. \end{cases}$$

Тогда вторая производная равна:

$$y'' = \frac{x^{\theta-3}\theta\left(1-\theta^2\right)}{v^3}\left[u\left(-\theta v + 2b_0\left(\theta-1\right)\right) - xv^2\right].$$

Разрыв второго рода функция $y(x)$, а также ее производные имеют только в точке x_∞ при $v = 0$, если b_0 и b_1 противоположны по знаку, т.е. при (8а), в остальных точках интервала $x \in (0,1)$ функция и производные непрерывны.

Рассмотрим различные случаи сочетаний параметров θ, a_0, b_0, с учетом знаков a_1, b_1 согласно (7б). Отметим, что $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ как в случае $\theta \in (0,1)$, так и в случае $\theta \in (-1,0)$, когда при обозначении $\sigma = |\theta|$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a_0 + a_1 x^{-\sigma}}{b_0 + b_1 x^{-(\sigma+1)}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a_0 x^{\sigma+1} + a_1 x}{b_0 x^{\sigma+1} + b_1} = 0$. Кроме того, заметим, что $u(0) = a_0$ при $\theta \in (0,1)$, и $\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0} (a_0 - b_0 x - (b_1 - a_1) x^{-\sigma}) = -\infty$ при $\theta \in (-1,0)$, так как $b_1 - a_1 = \theta + 1 > 0$.

Случай 1: $\theta \in (0,1)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. Функция (7а) непрерывная, неотрицательная в интервале $x \in (0, x^+)$. Функция вогнута, поскольку $v > 0$ и $u(-\theta v + 2b_0(\theta - 1)) < xv^2$, и в этом случае $y'' \begin{cases} < 0, & \text{если } u > 0, \\ < 0, & \text{если } u < 0. \end{cases}$ Поскольку $u(0) = a_0 > 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} y' > 0$, $y'(1) < 0$ при условии $u(1) < 0$, значит, в этом случае функция (7а) унимодальная.

Случай 2: $\theta \in (0,1)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, при этом $y < 0$ в интервале $x \in (0,1)$.

Случай 3: $\theta \in (0,1)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$. Функция (7а) имеет разрыв, есть два варианта:

3.1) $x_\infty \notin (0,1)$, т.е. $b_1 > |b_0|$, тогда свойства аналогичны случаю 1;

3.2) $x_\infty \in (0,1)$, т.е. $b_1 < |b_0|$, тогда $y > 0$ в интервалах $x \in (0, x^+) \cap (0, x_\infty)$ и $x \in (x^+, 1) \cap (x_\infty, 1)$; в этом случае функция v знакопеременная, $v \begin{cases} > 0, & \text{если } x < x_\infty, \\ < 0, & \text{если } x > x_\infty; \end{cases}$ поскольку $u(0) = a_0 > 0$, то при условиях $u(1) > 0$, $u(x_\infty) < 0$ (когда $x^+ < x_\infty$) функция u унимодальная и знакопеременная; заметим, что $u(x_\infty) = a_0 - b_0 \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{1}{\theta-1}} - (b_1 - a_1) \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}} = a_0 + a_1 \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}$; поэтому при $a_0 > 0$, $b_0 < 0$ и при $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, т.е. в случаях 3 и 5, $u(x_\infty) < 0 \Leftrightarrow -\frac{a_0}{a_1} < \left|\frac{b_0}{b_1}\right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}$; причем функция (7а) вогнута в интервале $x \in (0, x_\infty)$, поскольку $y'' \begin{cases} < 0, & \text{если } u > 0, \\ < 0, & \text{если } u < 0, \end{cases}$ и, соответственно, выпукла в интервале $x \in (x_\infty, 1)$.

Случай 4: $\theta \in (0,1)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Аналогично случаю 2 разрыв дает два варианта:

4.1) $x_\infty \notin (0,1)$, т.е. $b_1 > |b_0|$, тогда $y < 0$ в интервале $x \in (0,1)$;

4.2) $x_\infty \in (0,1)$, т.е. $b_1 < |b_0|$, тогда $y > 0$ в интервале $x \in (x_\infty, 1)$; так как $u(0) = a_0 < 0$ и при этом если $u(1) > 0$, то при условии $u(x_\infty) < 0$, которое при $a_0 < 0$, $b_0 < 0$ выполняется для всех $x \in (0,1)$, функция y унимодальная и выпуклая в интервале $x \in (x_\infty, 1)$.

Случай 5: $\theta \in (-1,0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. Разрыв приводит к следующим вариантам:

5.1) $x_\infty \notin (0,1) \wedge x^+ \notin (0,1)$, тогда $y > 0$ в интервале $x \in (0,1)$ и, поскольку $u(0) < 0$ при условии $u(1) > 0$, функция (7a) вогнутая и унимодальная;

5.1') $x_\infty \notin (0,1) \wedge x^+ \in (0,1)$, свойства функции (7a) аналогичны варианту 5.1, но $y > 0$ в интервале $x \in (0, x^+)$, поэтому эти варианты рассмотрим как один;

5.2) $x_\infty \in (0,1) \wedge x^+ \notin (0,1)$, тогда $y > 0$ в интервале $x \in (0, x_\infty)$, но $u(x) < 0\ \forall x \in (0,1)$, поэтому функция (7a) возрастающая, экстремумов нет;

5.3) $x_\infty \in (0,1) \wedge x^+ \in (0,1)$, тогда $y > 0$ в интервалах $x \in (0, x^+) \cup (x_\infty, 1)$, и при условиях $u(x_\infty) > 0$ и $u(1) < 0$ функция (7a) унимодальная; поскольку $v < 0\ \forall x \in (0, x_\infty)$, $v > 0\ \forall x \in (x_\infty, 1)$, $-\theta v + 2b_0(\theta - 1) = -\theta b_1 x^{\theta-1} + b_0\theta - 2b_0 < 0$, $u(-\theta v + 2b_0(\theta-1)) - xv^2 > 0$, то в интервале $(0, x_\infty)$ $y'' = \begin{cases} < 0, & \text{если } u < 0, \\ < 0, & \text{если } u > 0, \end{cases}$ т.е. функция $y(x)$ вогнута, а в интервале $(x_\infty, 1)$ имеет место $y'' = \begin{cases} > 0, & \text{если } u < 0, \\ > 0, & \text{если } u > 0, \end{cases}$ т.е. $y(x)$ выпукла; отметим, что если обозначить $\sigma = |\theta|$, то $v = (b_0 x^{\sigma+1} + b_1)x^{-(\sigma+1)}$ и $y = \frac{a_0 + a_1 x^{-\sigma}}{b_0 + b_1 x^{-(\sigma+1)}} = \frac{a_0}{v} + \frac{a_1}{v x^\sigma}$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ (так как $\lim\limits_{x\to 0} v = -\infty$), $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} y = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} v x^\sigma = -\infty$.

Случай 6: $\theta \in (-1,0)$, $a_0 < 0$, $b_0 < 0$. Функция (7a) непрерывная, неотрицательная в интервале $x \in (0,1)$. Функция (7a) вогнутая и при условии $u(1) > 0$ унимодальная.

Случай 7: $\theta \in (-1,0)$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$. Функция (7a) непрерывная, неотрицательная в интервале $x \in (0, x^+)$. Функция (7a) вогнута и при условии $u(1) > 0$ унимодальная.

Случай 8: $\theta \in (-1,0)$, $a_0 < 0$, $b_0 > 0$. Если $x_\infty \notin (0,1)$, то $y > 0$ в интервале $x \in (0,1)$, а если $x_\infty \in (0,1)$, то $y > 0$ в интервале $x \in (0, x_\infty)$, функция (7a) возрастающая, $u(x) < 0$ в интервале $x \in (0,1)$, экстремумов нет.

Доказательство утверждения 3. Функция $y(x)$ непрерывна на компактном выпуклом множестве $x \in (0,1)$ при условии $b_0 + b_1 x^{\theta-1} \neq 0$, поэтому по теореме Брауэра она имеет неподвижную точку. Найдем уравнение неподвижной точки функции (7a): $y = \frac{a_0 + a_1 x^\theta}{b_0 + b_1 x^{\theta-1}} = x = \frac{x^\theta}{x^{\theta-1}}$, откуда следует

$a_0x^{-1}-b_0=(b_1-a_1)x^{\theta-1}$, $a_0-b_0x-(b_1-a_1)x^{\theta}=0$, или $k_1x+k_2x^{\theta}=1$. Если обозначить $f=k_1x+k_2x^{\theta}$, то $\frac{u}{a_0}=1-f$, или $f=1-\frac{u}{a_0}$.

С другой стороны, уравнение стационарной точки получим, приравняв производную (П.3) к нулю: $y'=\frac{x^{\theta-2}\theta(1-\theta^2)(a_0-b_0x-(\theta+1)x^{\theta})}{(b_0+b_1x^{\theta-1})^2}=0$, откуда также следует $a_0-b_0x-(b_1-a_1)x^{\theta}=0$.

Доказательство утверждения 4. Рассмотрим случаи $t=1,\dots,8$.

$t=1$ ($k_1,k_2>0$): поскольку функция (7a) унимодальная при условии $u(1)<0$, то по утверждению 3 в интервале $x\in(0,1)$ существует одна стационарная точка, значит, $x^*\in(0,1)$ и равновесие единственно, т.е. $n_E=1$. Условие $u(1)<0$ равносильно условию $k_1+k_2>1$. Поскольку $y(x)$ вогнутая, то функция $f(x)$ монотонно возрастающая (так как $f=1-\frac{u}{a_0}$ и $k_1>0$, $k_2>0$), поэтому аппроксимируем (9a) следующими частными случаями: i) $k_1x+k_2=1$ при $\theta=0$, решение $\tilde{x}_{\theta=0}=\frac{1-k_2}{k_1}$; для $x\in(0,1)$ необходимо, чтобы $0<1-k_2<k_1$, т.е. $k_2<1\wedge k_1+k_2>1$; ii) $k_1x+k_2x^{0,5}=1$ при $\theta=0{,}5$ имеет корень $\tilde{x}^1_{\theta=0,5}=\left(\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2k_1}\right)^2$, для $x\in(0,1)$ необходимо, чтобы $k_1+k_2>1$ (второй корень в этот интервал не входит); iii) $k_1x+k_2x=1$ при $\theta=1$, решение $\tilde{x}_{\theta=1}=\frac{1}{k_1+k_2}$; для $x\in(0,1)$ необходимо, чтобы $k_1+k_2>1$. Если рассматривать приближенное решение в виде $\tilde{x}=\begin{cases}(\tilde{x}_{\theta=0})^{1-2\theta}(\tilde{x}_{\theta=0,5})^{2\theta}, & \theta\in(0;0{,}5),\\ (\tilde{x}_{\theta=0,5})^{2-2\theta}(\tilde{x}_{\theta=1})^{2\theta-1}, & \theta\in(0{,}5;1),\end{cases}$ то при этом решении $\lim\limits_{\theta\to0}f=1$, $\lim\limits_{\theta\to0,5}f=1$, $\lim\limits_{\theta\to1}f=1$, т.е. на границах отрезка $[0,1]$ и при $x=0{,}5$ уравнение (9a) решается точно. Во внутренних точках погрешность этого решения $|x^*-\tilde{x}|\le\tilde{x}_{\max}-\tilde{x}_{\min}=\tilde{x}_{\theta=1}-\tilde{x}_{\theta=0}=\frac{k_2(k_1+k_2-1)}{k_1(k_1+k_2)}<1$ при вышеуказанных условиях (см. рис. 6), поэтому погрешность равенства (9a) $\varepsilon=|f(|x^*-\tilde{x}|)-1|$, и наибольшая погрешность при $\theta=1$ равна $\varepsilon_{\max}=\frac{k_2}{k_1}(k_1+k_2-1)<1$.

$t=2$ ($k_1<0,k_2<0$): неотрицательное равновесие отсутствует, $n_E=0$, поскольку $y<0$.

$t=3$ ($k_1<0,k_2>0$): при $x_\infty\notin(0,1)$ решение аналогично $t=1$; при $x_\infty\in(0,1)$ существуют две точки равновесия $x_1^*\in(0,x_\infty)$ и $x_2^*\in(x_\infty,1)$, т.е. $n_E=2$. Условие $u(1)>0$ равносильно условию $k_1+k_2<1$, соответственно $u(x_\infty)<0\Leftrightarrow f(x_\infty)>1$. Как и в случае $t=1$ рассмотрим частные случаи, но случай (ii) в виде $k_1x+k_2x^{0,5}=1$ имеет решение $\tilde{x}^3_{\theta=0,5}=\left(\frac{-k_2\pm\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2k_1}\right)^2$, действительные корни могут быть при $k_2>2\sqrt{|k_1|}$, поэтому для $x\in(0,1)$ необходимо, чтобы $k_2\in(2\sqrt{|k_1|},2\,|k_1|)\wedge k_2-|k_1|<1$, тогда решение получим в виде, аналогичном $t=1$, и погрешность вычисляется аналогично.

$t=4$ ($k_1>0,k_2<0$): при $x_\infty\notin(0,1)$ неотрицательное равновесие отсутствует, $n_E=0$; при $x_\infty\in(0,1)$, если выполняется условие $u(1)>0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k_1+k_2>1$, то существует одно неотрицательное равновесие $x^*\in(x_\infty,1)$, т.е. $n_E = 1$, поскольку при этих условиях $f(x) > 0$ и возрастающая, то решение вычисляется аналогично $t = 1$, только корень $\tilde{x}^4_{\theta=0,5} = \left(\frac{-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1}}{2k_1}\right)^2$ входит в интервал $(0, 1)$ при $|k_2| < 2k_1$ и соответствует условию $k_1 + k_2 > 1$.

$t = 5$ $(k_1 > 0, k_2 > 0)$: при $x_\infty \notin (0, 1)$ точка равновесия либо $x^* \in (0, 1)$, если $x^+ \notin (0, 1)$, либо $x \in (0, x^+)$, если $x^+ \in (0, 1)$, и при условии $u(1) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow k_1 + k_2 < 1$ равновесие единственно, т.е. $n_E = 1$, при этих условиях $f(x) > 0$ и убывающая. Сделаем приближение аналогично $t = 1$, но случай (ii) при $\theta = -0{,}5$ в виде $k_1x + k_2x^{-0,5} = 1$ приводит к уравнению $k_1z^3 - z +$ $+ k_2 = 0$ при $z = x^{0,5}$, которое имеет единственное действительное решение $z = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}$, где $q = \frac{k_2}{2k_1}$, $D = \frac{27k_2^2k_1-4}{108k_1^3}$, при условии $D > 0$, т.е. $k_2^2k_1 > \frac{4}{27}$; поэтому $\tilde{x}^5_{\theta=-0,5} = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}\right)^2$. Случай (iii) при $\theta = -1$ в виде $k_1x + k_2x^{-1} = 1$ приводит к уравнению $k_1x^2 - x + k_2 = 0$, из корней которого $\tilde{x} = \frac{1\pm\sqrt{1-4k_1k_2}}{2k_1}$ при условии $k_1k_2 < \frac{1}{4}$ в интервал $(0, 1)$ входит $\tilde{x}^{5,1}_{\theta=-1} = \frac{1-\sqrt{1-4k_1k_2}}{2k_1}$, т.е. условия следующие: $k_1k_2 > \frac{1}{4} \wedge k_1 + k_2 < 1$. Наибольшая погрешность равенства (9а) вследствие отклонения $\tilde{x}^5_{\theta=-1} -$ $- \tilde{x}^5_{\theta=0} = \frac{\sqrt{1-4k_1k_2}-k_2}{2k_1}$ при $\theta = 0$ равна $\varepsilon_{\max} = \frac{\sqrt{1-4k_1k_2}+k_2}{2} < 1$.

при $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \notin (0, 1)$, поскольку $y(x)$ экстремумов не имеет, то равновесие отсутствует, т.е. $n_E = 0$;

при $x_\infty \in (0, 1) \wedge x^+ \in (0, 1)$, если выполняются условия $u(1) < 0 \Leftrightarrow k_1 +$ $+ k_2 > 1$ и $u(x_\infty) > 0 \Leftrightarrow f(x_\infty) < 1$, функция $y(x)$ имеет интервалы вогнутости и выпуклости и два экстремума, значит, существуют две точки равновесия $x_1^* \in (0, x_\infty)$ и $x_2^* \in (x_\infty, 1)$, т.е. $n_E = 2$, решение вычисляется аналогично $t = 5$ для $x_\infty \notin (0, 1)$, но случай (iii) при $\theta = -1$ имеет два корня $\tilde{x}^{5.3}_{\theta=-1} = \frac{1\pm\sqrt{1-4k_1k_2}}{2k_1}$ при условии $k_1k_2 < \frac{1}{4}$, и если $k_1 + k_2 > 1 \wedge k_1 > \frac{1}{2}$, то эти корни входят в интервал $(0, 1)$.

$t = 6$ $(k_1 > 0,\ k_2 < 0)$: при условии $u(1) > 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 > 1$ точка равновесия $x^* \in (0, 1)$ и равновесие единственно, т.е. $n_E = 1$; так как $f(x) > 0$ и возрастающая, то решение вычисляется аналогично $t = 5$, т.е. $\tilde{x}^6_{\theta=0} = \frac{1-k_2}{k_1}$, $\tilde{x}^6_{\theta=-0,5} = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}\right)^2$, но случай (iii) при $\theta = -1$ (так как $k_2 = \frac{b_1-a_1}{a_0} = \frac{\theta+1}{a_0} = 0$) приводит к уравнению $k_1x = 1$, т.е. $\tilde{x}^6_{\theta=-1} = \frac{1}{k_1}$. Поэтому вследствие отклонения $\tilde{x}^6_{\theta=0} - \tilde{x}^6_{\theta=-1} = -\frac{k_2}{k_1}$ при $\theta = 0$ погрешность равна $\varepsilon_{\max} = k_1 - k_2 - 1 < 1$.

$t = 7$ $(k_1 < 0,\ k_2 > 0)$: при условии $u(1) > 0 \Leftrightarrow k_1 + k_2 < 1$ точка равновесия $x^* \in (0, x^+)$ и равновесие единственно, т.е. $n_E = 1$; при этих условиях $f(x) > 0$ и убывающая, решение вычисляется аналогично $t = 5$ (формула (10д)), но случай (iii) $k_1x + k_2x^{-1} = 1$ при $\theta = -1$ дает решение $\frac{1}{k_1} < 0$, однако при $x \to 0$ имеем неопределенность слагаемого $k_2x^\theta = (0 \cdot \infty)$, раскрыв которую, получим: $\lim\limits_{\theta\to-1} k_2x^\theta = \lim\limits_{\theta\to-1}\frac{(\theta+1)/a_0}{x^{-\theta}} = \lim\limits_{\theta\to-1}\frac{1/a_0}{-\theta x^{-\theta-1}} = \frac{1}{a_0}$; поэтому решение будет $\tilde{x}^7_{\theta=-1} = \frac{a_0-1}{a_0k_1} \in (0,1)$, если $a_0 < 1 \wedge a_0 + |b_0| > 1$. Вследствие отклонения $\tilde{x}^7_{\theta=0} - \tilde{x}^7_{\theta=-1} = \frac{1-a_0k_2}{a_0k_1}$ при $\theta = 0$ погрешность равна $\varepsilon_{\max} = \frac{1-a_0}{a_0} < 1$.

$t = 8$ ($k_1 < 0,\ k_2 < 0$): поскольку $y(x)$ экстремумов не имеет, то равновесие отсутствует, т.е. $n_E = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nash J.* Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
3. *Puu T.* On the stability of Cournot equilibrium when the number of competitors increases // J. Econom. Behavior Organizat. 2007. No. 66. P. 445–456.
4. *Agiza H.N., Elsadany A.A.* Chaotic dynamics in nonlinear duopoly game with heterogeneous players // Appl. Math. Comput. 2004. No. 149. P. 843–860.
5. *Sun Z., Ma J.* Complexity of triopoly price game in chinese cold rolled steel market // Nonlin. Dynamics. 2012. No. 67. P. 2001–2008.
6. *Bischi G.I., Chiarella C., Kopel M., Szidarovszky Z.* Nonlinear oligopolies: stability and Bifurcations. New York: Springer. 2009.
7. *Dubiel-Teleszynski T.* Nonlinear dynamics in a heterogeneous duopoly game with adjusting players and diseconomies of scale // Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2011. No. 16. P. 296–308.
8. *Al-Khedhairi A.* Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2020. No. 21(3-4). P. 339–359.
9. *Гераськин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // АиТ. 2020. № 9. С. 120–143.

   Geraskin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1659–1678.
10. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No. 49 (32). P. 19–23.
11. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91–105.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Collective behavior in the Stackelberg model under incomplete information // Autom. Remote Control. 2017. No. 78 (9). P. 1619–1630.
12. *Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S.* The equilibrium and socially effective number of firms in oligopoly: theory and empirics // VIII Moscow Int. Conf. Oper. Res. (ORM2016). 2016. P. 207–208.
13. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. No. 81 (2). P. 287–301.

14. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.

Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. No. 81 (7). P. 1258–1270.

15. *Lyubimov V.V.* Direct and inverse secondary resonance effects in the spherical motion of an asymmetric rigid body with moving masses // Acta Mechan. 2020. No. 231(12). P. 4933–4946.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 28.01.2022

После доработки 15.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022