Автоматика и телемеханика, № 8, 2022

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. В.А. БУХАЛЁВ, д-р техн. наук (Vadim.Bukhalev@yandex.ru)
(Московский научно-исследовательский телевизионный институт),
А.А. СКРЫННИКОВ, канд. техн. наук (a1260@mail.ru)
(Государственный научно-исследовательский институт
авиационных систем, Москва;
Московский авиационный институт),
В.А. БОЛДИНОВ, канд. техн. наук (ViktorBoldinov@mail.ru)
(Московский авиационный институт)

АДАПТИВНОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ МАРКОВСКОГО ДВОИЧНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИРСОНА I ТИПА[1]

Рассматривается задача нахождения закона распределения выходного сигнала апериодического звена, на вход которого действует случайный скачкообразный сигнал в виде марковской цепи с двумя состояниями. Теоретически доказано, что плотность вероятности выходного сигнала описывается распределением Пирсона I типа, что экспериментально подтверждается результатами математического моделирования. Полученные результаты используются для синтеза алгоритма адаптивного распознавания неизвестных вероятностей переходов марковской цепи.

Ключевые слова: распределение Пирсона I типа, случайная скачкообразная структура, марковский двоичный сигнал, адаптивный алгоритм, вероятности переходов марковской цепи.

DOI: 10.31857/S0005231022080098, **EDN:** AHWVVL

1. Введение

Семейство *распределений Пирсона* часто используется в прикладных задачах исследования стохастических динамических систем для аппроксимации законов распределения фазовых координат [1–5].

Это объясняется широтой охвата реальных вероятностных распределений, встречающихся на практике, разнообразием форм распределений Пирсона и возможностью построения алгоритмов анализа и синтеза, сочетающих точность решения с простотой реализации.

В связи с этим возникает интерес, насколько аппроксимирующие распределения близки к реальным, которые можно найти в результате аналитических

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00708).

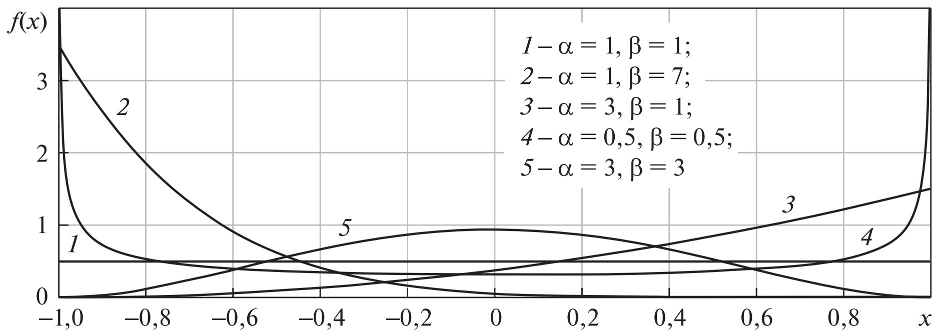

Рис. 1. Плотность вероятности распределения Пирсона I типа при $a = b = 1$ и при различных значениях α, β.

решений некоторых типовых задач. Одна из таких задач рассматривается в настоящей работе.

С ней связана вторая задача, решаемая в статье, — применение полученного распределения как аппроксимирующего для построения алгоритма адаптивного распознавания неизвестных вероятностей переходов марковского двоичного входного сигнала линейной системы.

Одним из наиболее эффективных с этой точки зрения является распределение Пирсона I типа, плотность вероятности которого описывается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+x)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{(a+b)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)} & \text{при } x \in [-a, b]; \\ 0 & \text{при } x \notin [-a, b], \end{cases}$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция, а математическое ожидание m и дисперсия D случайной величины X связаны с параметрами распределения α, β простыми алгебраическими формулами

$$m = \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha + \beta}, \quad D = \frac{(a+b)^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Распределение Пирсона I типа обладает двумя практическими достоинствами: 1) жесткие ограничения по амплитуде сигналов в технических устройствах определяют диапазон распределения $[-a, b]$; 2) форма кривой распределения существенно изменяется в зависимости от сочетания параметров α, β (см. рис. 1).

Эти обстоятельства позволяют надеяться на успешное применение распределения Пирсона I типа в качестве аппроксимирующего и при решении аналогичных задач для других инерционных систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 2 и описываемую уравнением

$$x_{k+1} = lx_k + (1 - l)u(s_k), \tag{2.1}$$

где s_k — марковская цепь с двумя состояниями: $s = 1$ и $s = 2$, заданная вероятностями переходов h и g; $h \in (0,\ 0{,}5)$, $g \in (0,\ 0{,}5)$; $u(s_k)$ — случайный двоичный сигнал: $u(1) = b$, $u(2) = -a$, $a > 0$, $b > 0$; l — коэффициент усиления, $l \in (0,\ 1)$.

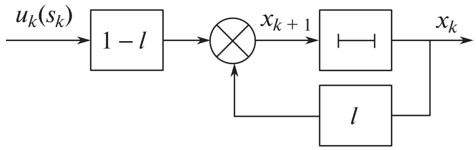

Рис. 2.

Требуется: 1) найти закон распределения выходного сигнала $x(t)$ в установившемся режиме при *известных* вероятностях переходов h, g; 2) применить полученное распределение для адаптивного распознавания *неизвестных* h, g по измерениям x_k.

3. Распределение выходного сигнала

Если изменения структуры представляют собой условно-марковскую цепь с вероятностями переходов $q_k(s_{k+1}|x_k, s_k)$, то на основании теории систем со случайной скачкообразной структурой (ССС) [1–3, 5–9] закон распределения (x_k, s_k) описывается уравнениями

$$f_{k+1}(x_{k+1}, s_{k+1}) = \sum_{s_k} \int_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, s_k) q_k(s_{k+1}|x_k, s_k) f_k(x_k, s_k) dx_k, \tag{3.1}$$
$$s_k = \overline{1, n^{(s)}},$$

где $q_k(s_{k+1}|x_k, s_k)$ — условная вероятность перехода из s_k в s_{k+1} при фиксированном x_k.

В частном случае, при $s_k = 1, 2$ и условиях задачи п. 2, уравнения (3.1) принимают вид

$$f_{k+1}(x_{k+1}, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, 1) \left[(1 - h) f_k(x_k, 1) + g f_k(x_k, 2)\right] dx_k, \tag{3.2}$$

$$f_{k+1}(x_{k+1}, 2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}|x_k, 2) \left[h f_k(x_k, 1) + (1 - g) f_k(x_k, 2)\right] dx_k, \tag{3.3}$$

где

$$f_{k+1}(x_{k+1}|x_k,1)=\delta(x_{k+1}-lx_k-1+l), \tag{3.4}$$

$$f_{k+1}(x_{k+1}|x_k,2)=\delta(x_{k+1}-lx_k+1-l), \tag{3.5}$$

$\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

При $k\to\infty$ (установившийся режим) уравнения (3.2)–(3.5) преобразуются к непрерывной форме:

$$\begin{aligned} &l(x-b)\frac{\partial f(x,1)}{\partial x}+(l-h)f(x,1)+gf(x,2)=0;\\ &l(x+b)\frac{\partial f(x,2)}{\partial x}+(l-g)f(x,2)+hf(x,1)=0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Исключая из системы уравнений переменную $f(x,2)$ и используя подстановку $y=(x+a)/(a-b)$, получаем *гипергеометрическое уравнение Гаусса* [10]

$$\begin{aligned} y(y-1)\frac{\partial^2 f(y,1)}{\partial y^2}+\left[(3-\alpha-\beta)y+\alpha-1\right]\frac{\partial f(y,1)}{\partial y}+\\ +(1-\alpha-\beta)f(y,1)=0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\alpha\triangleq\frac{g}{1-l},\quad \beta\triangleq\frac{h}{1-l}. \tag{3.8}$$

Уравнение (3.7) эквивалентно уравнению с *разделяющимися переменными* [10]

$$y(y-1)\frac{\partial f(y,1)}{\partial y}+\left[(1-\alpha-\beta)y+\alpha\right]f(y,1)=0. \tag{3.9}$$

Аналогично получаем уравнение для $f(x,2)$

$$y(y-1)\frac{\partial f(y,2)}{\partial y}+\left[(1-\alpha-\beta)y+\alpha-1\right]f(y,2)=0. \tag{3.10}$$

Решая эти уравнения, получаем

$$f(y,1)=C_1y^{\alpha}(1-y)^{\beta-1},\quad f(y,2)=C_2y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta}. \tag{3.11}$$

Произвольные постоянные определяются из условия нормировки

$$\int\limits_0^1 f(y,1)dy=p(1),\quad \int\limits_0^1 f(y,2)dy=p(2). \tag{3.12}$$

Вероятности состояний структуры $p_{k+1}(1)$, $p_{k+1}(2)$ определяются формулами

$$p_{k+1}(1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{k+1}(x_{k+1}, 1) dx_{k+1}, \tag{3.13}$$
$$p_{k+1}(2) = 1 - p_{k+1}(1),$$

откуда согласно (3.2), (3.3) следует

$$p_{k+1}(1) = (1 - h - g)p_k(1) + g. \tag{3.14}$$

В установившемся режиме (при $k \to \infty$) из (3.14) получаем

$$p(1) = \frac{g}{h+g}, \quad p(2) = \frac{h}{h+g}. \tag{3.15}$$

Подставив (3.11), (3.15) в (3.9), (3.10), производя обратную замену $x = (a+b)y - a$ и учитывая соотношения $f(x,1) = p(1)f(x|1)$, $f(x,2) = p(2)f(x|2)$, находим *установившиеся* условные плотности вероятностей $f(x|1)$, $f(x|2)$ и безусловную плотность вероятности $f(x)$:

при $x \in [-a, b]$

$$f(x|1) = \frac{(a+x)^{\alpha}(b-x)^{\beta-1}}{(a+b)^{\alpha+\beta}B(\alpha+1, \beta)}, \tag{3.16}$$

$$f(x|2) = \frac{(a+x)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta}}{(a+b)^{\alpha+\beta}B(\alpha, \beta+1)}, \tag{3.17}$$

$$f(x) = \frac{(a+x)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}}{(a+b)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta)}, \tag{3.18}$$

при $x \notin [-a, b]$

$$f(x|1) = f(x|2) = f(x) = 0, \tag{3.19}$$

где $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция; $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Таким образом, условные и безусловные распределения выходного сигнала в установившемся режиме являются распределениями Пирсона I типа [4, 5].

В частном случае при $a = b = 1$:

при $x \in [-1, 1]$

$$f(x|1) = \frac{(1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta}B(\alpha+1, \beta)}, \tag{3.20}$$

$$f(x|2) = \frac{(1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}}{2^{\alpha+\beta}B(\alpha, \beta+1)}, \tag{3.21}$$

$$f(x) = \frac{(1+x)^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{2^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta)}, \tag{3.22}$$

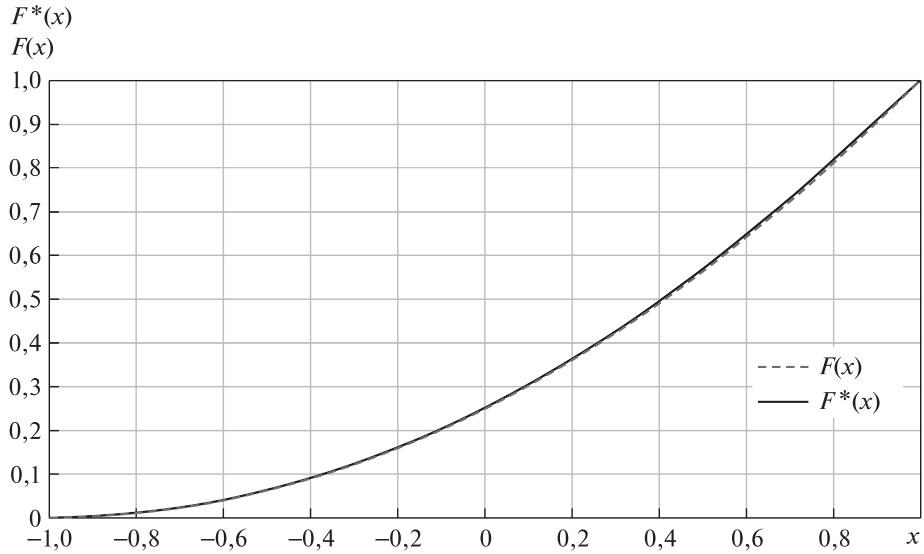

Рис. 3.

при $x \notin [-1, 1]$

(3.23) $$f(x|1) = f(x|2) = f(x) = 0.$$

В частном случае при $b = 1$, $a = 0$ распределения (3.19) являются *бета-распределениями*: [4, 5]

при $x \in [0, 1]$

(3.24) $$f(x|1) = \frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha+1, \beta)},$$

(3.25) $$f(x|2) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}}{B(\alpha, \beta+1)},$$

(3.26) $$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)},$$

при $x \notin [0, 1]$

(3.27) $$f(x|1) = f(x|2) = f(x) = 0.$$

Как следует из формул (3.8), (3.19), параметры α, β характеризуют *отношение частотного спектра случайного двоичного входного сигнала к полосе пропускания апериодического звена и сдвиг распределения выходного сигнала в сторону одной из границ: b или $(-a)$.*

Пример. Результаты моделирования выходного сигнала $x(t)$ по формуле (2.1) с заданными вероятностями переходов $h = 0{,}1\Delta t$ и $g = 0{,}2\Delta t$ и коэффициенте усиления $l = 0{,}1\Delta t$, где Δt — шаг счета, при $a = b = 1$ показывают, что с увеличением длительности наблюдения экспериментальная функция распределения $F^*(x)$ случайной величины X сходится к теоретической $F(x)$ (см. рис. 3). Выражение функции распределения при таких значениях параметров модели может быть получено аналитически, для этого с использованием выражений (3.8) вычисляются значения параметров закона распределения $\alpha = 1{,}0$, $\beta = 2{,}0$, тогда плотность распределения (3.22) будет иметь вид

$$f(x) = \frac{x+1}{2},$$

что дает выражение для функции распределения

$$F(x) = \frac{x^2+2x+1}{4}.$$

Сходимость экспериментальной функции распределения фазовой координаты $x(t)$ к теоретической функции распределения подтверждается при любых значениях параметров модели.

4. Адаптивное распознавание неизвестных вероятностей скачков случайного двоичного входного сигнала

Дополним систему, изображенную на рис. 2, измерителем выходного сигнала, описываемым в дискретной форме

$$z_k = x_k + \zeta_k, \tag{4.1}$$

где ζ_k — последовательность случайных величин, независимых при разных k и распределенных в диапазоне $[-1, 1]$ с плотностью вероятности Пирсона I типа

$$f_\zeta(\zeta_k) = \frac{3(1-\zeta_k^2)}{4}. \tag{4.2}$$

Входной сигнал $u_k(s_k) \in [-1, 1]$. В отличие от постановки задачи в разделе 2 вероятности перехода h и g марковской цепи $u_k(s_k)$ *неизвестны*, и их необходимо найти, используя измерения z_k.

1. Приближенную связь апостериорных оценок $\hat{x}_k$, $\hat{R}_k$ с прогнозируемыми $\tilde{x}_k$, $\tilde{R}_k$ и измерением z_k, применяя байесовскую обработку информации и линейную регрессию коррелированных случайных величин x_k и z_k, можно представить в виде следующих формул [2]:

$$\hat{x}_{k+1} \approx \left[\tilde{x} + \frac{\tilde{R}^{xz}}{\tilde{R}^z}(z - \tilde{z})\right]_{k+1}, \tag{4.3}$$

$$\hat{R}_{k+1} \approx \left[\tilde{R} + \frac{(\tilde{R}^{xz})^2}{\tilde{R}^z}\right]_{k+1}, \tag{4.4}$$

где

$$\hat{x}_{k+1} \triangleq \mathrm{M}\left[x_{k+1}|z_{\overline{0,k+1}}\right], \quad \tilde{x}_{k+1} \triangleq \mathrm{M}\left[x_{k+1}|z_{\overline{0,k}}\right],$$

$$\hat{R}_{k+1} \triangleq \mathrm{M}\left[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})^2|z_{\overline{0,k+1}}\right], \quad \tilde{R}_{k+1} \triangleq \mathrm{M}\left[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})^2|z_{\overline{0,k}}\right],$$

$$\tilde{R}^{xz}_{k+1} \triangleq \mathrm{M}\left[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1})(z_{k+1} - \tilde{z}_{k+1})|z_{\overline{0,k}}\right],$$

$$\tilde{R}^{z}_{k+1} \triangleq \mathrm{M}\left[(z_{k+1} - \tilde{z}_{k+1})^2|z_{\overline{0,k}}\right];$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \left[l\hat{x} + (1-l)\hat{u}\right]_k, \tag{4.5}$$

$$\tilde{R}_{k+1} = \left[l^2\hat{R} + (1-l)^2\hat{G}\right]_k, \tag{4.6}$$

где

$$\hat{u}_k \triangleq \mathrm{M}[u_k(s_k)|z_{\overline{0,k}}],$$
$$\hat{G}_k \triangleq \mathrm{M}[(u_k(s_k) - \hat{u}_k)^2|z_{\overline{0,k-1}}].$$

2. Согласно (4.1), (4.2) $\tilde{R}^{xz}_k$, $\tilde{R}^{z}_k$ определяются формулами

$$\tilde{R}^{xz}_k = \tilde{R}_k, \quad \tilde{R}^{z}_k = \tilde{R}_k + Q, \quad \tilde{z}_k = \tilde{x}_k, \tag{4.7}$$

где Q_k — дисперсия помехи ζ_k.

Подставив (4.7) в (4.3)–(4.6), получаем

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{\left[l\hat{x}_k + (1-l)\hat{u}_k\right]Q + \left[l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k\right]z_{k+1}}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k + Q}, \tag{4.8}$$

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{\left[l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k\right]Q}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2\hat{G}_k + Q}, \tag{4.9}$$

$$\hat{x}_0 = \bar{x}_0, \quad \hat{R}_0 = R_0, \quad Q = 0{,}2,$$

где $\bar{x}_0$, R_0 — известные величины.

3. Математическое ожидание и дисперсия входного сигнала $u_k(s_k)$, распределенного по закону Бернулли, определяются формулами

$$\hat{u}_k = \hat{p}_k(1) - \hat{p}_k(2), \quad \hat{G}_k = 4\hat{p}_k(1)\hat{p}_k(2). \tag{4.10}$$

Вероятности $p_k(1)$, $p_k(1)$ состояний структуры $s_k = 1, 2$ марковской цепи в установившемся режиме согласно (3.15) определяются формулами

$$p(1) = \frac{g}{h+g}, \quad p(2) = \frac{h}{h+g}. \tag{4.11}$$

При неизвестных h и g эти вероятности корректируются на основании измерений $z_{\overline{0,k}}$ и приближенно могут быть определены формулами

$$\hat{p}_k(1) = \frac{\hat{g}_k}{\hat{h}_k + \hat{g}_k}, \quad \hat{p}_k(2) = \frac{\hat{h}_k}{\hat{h}_k + \hat{g}_k}. \tag{4.12}$$

Учитывая связь (3.8) вероятностей перехода h, g с параметрами распределения Пирсона I типа, получаем из (4.10)

$$\hat{p}_k(1) = \frac{\hat{\alpha}_k}{\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k}, \quad \hat{p}_k(2) = \frac{\hat{\beta}_k}{\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k}, \tag{4.13}$$

где $\hat{h}_k$, $\hat{g}_k$, $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$ — оценки соответствующих параметров h, g, α, β, полученные на основании измерений $z_{\overline{0,k}}$.

4. Математическое ожидание $\bar{x}$ и дисперсия R распределения Пирсона I типа в диапазоне $x \in [-1, 1]$ связаны с парметрами распределения α, β формулами [4, 5]

$$\bar{x} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad R = \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}, \tag{4.14}$$

откуда следует

$$\alpha = \frac{(1+\bar{x})\gamma}{2}, \quad \beta = \frac{(1-\bar{x})\gamma}{2}, \quad \gamma = \frac{1-\bar{x}^2}{R} - 1, \tag{4.15}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{(1+\hat{x})\hat{\gamma}}{2}, \quad \hat{\beta} = \frac{(1-\hat{x})\hat{\gamma}}{2}, \quad \hat{\gamma} = \frac{1-\hat{x}^2}{\hat{R}} - 1. \tag{4.16}$$

Подставив (4.13) в (4.10), получаем

$$\hat{u}_k = \frac{\hat{\alpha}_k - \hat{\beta}_k}{\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k} = \hat{x}_k, \quad \hat{G}_k = \frac{4\alpha_k\hat{\beta}_k}{(\hat{\alpha}_k + \hat{\beta}_k)^2} = 1 - \hat{x}^2. \tag{4.17}$$

Подставив (4.17) в (4.8), (4.9), получаем

$$\hat{x}_{k+1} = \frac{Q\hat{x}_k + \left[l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2)\right] z_{k+1}}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2) + Q}, \tag{4.18}$$

$$\hat{R}_{k+1} = \frac{\left[l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2)\right] Q}{l^2\hat{R}_k + (1-l)^2(1-\hat{x}_k^2) + Q}. \tag{4.19}$$

Согласно (2.1), (3.8)

$$\hat{g}_k = \hat{\alpha}_k(1-l), \quad \hat{h}_k = \hat{\beta}_k(1-l). \tag{4.20}$$

Таким образом, алгоритм адаптивного распознавания неизвестных вероятностей перехода h и g марковского двоичного входного сигнала $u_k(s_k)$, $s_k = 1, 2$ с параметрами $u_k(1) = 1$, $u_k(2) = -1$ описывается замкнутой системой уравнений (4.18)–(4.20), входом которой является измерение z_k, а выходом — оценки $\hat{h}_k$, $\hat{g}_k$.

5. Заключение

В результате решения задачи нахождения закона распределения сигнала на выходе апериодического звена, на вход которого действует случайный двоичный сигнал, вероятности переходов которого из одного состояния в другое описываются марковской цепью, получена плотность вероятности выходного сигнала.

Задача решена методами теории систем со случайной скачкообразной структурой [1–3]. Найденная плотность вероятности является распределением Пирсона I типа, которое широко используется в прикладных задачах анализа и синтеза стохастичеких динамических систем [4, 5]. Полученное аналитическое решение подтверждено результатами математического моделирования.

Полученные результаты используются для построения алгоритма адаптивного распознавания *неизвестных* вероятностей переходов на основании неточных измерений выходного сигнала системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухалёв В.А.* Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.
2. *Бухалёв В.А.* Оптимальное сглаживание в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Физматлит, 2013.
3. *Бухалёв В.А., Скрынников А.А., Болдинов В.А.* Игровое управление системами со случайной скачкообразной структурой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Под редакцией В.С. Королюка. М.: Наука, 1985.
5. *Джонсон Н.Л., Коц С., Балакришнан Н.* Одномерные непрерывные распределения. В двух частях. Ч.2. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2012.
6. *Piers B.D., Sworder D.D.* Bayes and Minimax Controllers for a Linear Systems for Stochastic Jump Parameters // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. No. 4. P. 677–685.
7. *Moon J.* A Sufficient Condition for Linear-Quadratic Stochastic Zero-Sum Differential Games for Markov Jump Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. V. 64. No. 4. P. 1619–1626.
8. *Mariton M.* Jump Linear Systems in Automatic Control. Taylor & Francis, 1990.
9. *Sworder D.D.* Feedback Control of a Class of Linear Systems with Jump Parameters // IEEE Trans. Autom. Control. 1969. V. 14. No. 1. P. 9–14.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1976.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 14.11.2021

После доработки 16.02.2022

Принята к публикации 31.03.2022