Автоматика и телемеханика, № 9, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДИСКРЕТНЫЕ ПОПАРНО СВЯЗНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ И СИСТЕМЫ ЛУРЬЕ, КРИТЕРИЙ ЦЫПКИНА ДЛЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ[1]

Рассматриваются вопросы устойчивости дискретных систем с переключениями при любых законах переключения между линейными подсистемами. Среди таких систем выделяются системы, которые названы попарно связными. Для них получено достаточное частотное условие устойчивости. Для систем с переключениями, устойчивость которых эквивалентна абсолютной устойчивости систем Лурье с двумя нелинейностями, получено два достаточных условия и два критерия существования квадратичной функции Ляпунова. Эти условия состоят в проверке разрешимости специальных матричных неравенств, размерности которых существенно меньше размерности исходной системы матричных неравенств, определяющей необходимые и достаточные условия. Полученные условия сравниваются с условиями критерия Цыпкина и с необходимыми и достаточными условиями на примерах систем третьего и шестого порядков.

Ключевые слова: дискретные системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231022090033, **EDN:** AILKNJ

1. Введение

Интерес к системам с дискретным временем подтверждает тот факт, что большинство вопросов теории управления и теории устойчивости для систем с непрерывным временем и систем с дискретным временем рассматриваются параллельно [1–4]. Относительно недавно вопросы устойчивости дискретных систем рассматривались в [5–7]. Для упрощения условий существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ) в непрерывном случае вводится понятие попарно связных систем с переключениями [8]. Здесь это понятие переносится на дискретные системы. Показывается, что динамика попарно связных дискретных систем с переключениями может быть представлена динамикой

[1] Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 "Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники".

систем Лурье специального вида. В результате для таких систем Лурье с помощью S-процедуры [9] получено достаточное частотное условие существования КФЛ.

Задача устойчивости линейных дискретных систем с переключениями обобщает [7] известную задачу об абсолютной устойчивости дискретных систем управления с несколькими нестационарными нелинейностями. Здесь подробно рассматривается вопрос существования КФЛ для системы с переключениями между четырьмя подсистемами в случае, когда устойчивость этой системы эквивалентна абсолютной устойчивости системы Лурье с двумя нелинейностями из конечных секторов. Прежде всего для таких систем демонстрируется получение критерия Цыпкина без использования S-процедуры. Затем получен вариант критерия Цыпкина для систем Лурье, которые соответствуют попарно связным системам с переключениями.

Необходимые и достаточные условия существования КФЛ определяются разрешимостью специальной системы линейных матричных неравенств (ЛМН) — назовем ее исходной. Частотным условием критерия Цыпкина является критерий разрешимости специального матричного неравенства (МН) — назовем его МН Цыпкина. МН Цыпкина является ЛМН относительно входящих в него неизвестных, его разрешимость лишь достаточна для разрешимости исходной системы ЛМН, но его размерность практически в четыре раза меньше. В работе предлагаются четыре МН, условия разрешимости которых являются менее консервативными, чем критерий Цыпкина, а размерность существенно меньше, чем у исходной системы. Условия разрешимости двух из них являются лишь достаточными условиями существования КФЛ, условия двух других — необходимыми и достаточными. Области существования КФЛ, полученные с помощью новых достаточных условий, сравниваются с областями, полученными из разрешимости МН Цыпкина и исходной системы ЛМН, на примерах систем Лурье третьего и шестого порядков.

Объединяя перечисленные во введении вопросы, которые будут рассмотрены в статье, можно сказать, что целью работы является получение новых, более эффективных условий существования КФЛ, устанавливающих устойчивость для широкого класса систем с переключениями.

Изложение материала статьи организовано следующим образом. В разделе 2 вводится понятие попарно связных систем с переключениями и получено достаточное частотное условие существования КФЛ. В разделе 3 для систем с двумя нелинейностями критерий Цыпкина выводится без использования S-процедуры. Вопросы улучшения критерия Цыпкина для систем с переключениями между четырьмя подсистемами рассматриваются в разделе 4. В разделе 5 полученные в разделе 4 условия сравниваются с точки зрения сложности их проверки и приводится наиболее эффективное условие, являющееся критерием существования КФЛ. В разделе 6 обсуждаются результаты по всем рассмотренным примерам и приводятся численные результаты по четырем характерным случаям.

2. Попарно связные дискретные системы с переключениями

Рассматриваются линейные дискретные системы с переключениями

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}, \tag{2.1}$$

где $A_s \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $A(t) : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \overline{A}$ — отображение из множества $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел в $\overline{A}$. Все матрицы A_s предполагаются устойчивыми (по Шуру), т.е. $r(A_s) < 1$, где $r(A_s)$ — спектральный радиус матрицы A_s [10], $s = \overline{1, N}$.

Понятие связной дискретной системы с переключениями формулируется [7] в терминах теории графов. Каждой матрице A_s из системы (2.1) ставится в соответствие вершина графа. Две вершины графа соединяются ребром, если разность матриц, которым соответствуют эти вершины, имеет вид $bc^\top$, где $b, c \in \mathbb{R}^n$, т.е. ранг матрицы разности равен 1. Система (2.1) называется связной [7], если соответствующий ей граф является связным. Связную систему (2.1) будем называть попарно связной, если каждая пара вершин из соответствующего графа соединена ребром этого графа. В этом случае множество матриц $\overline{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ также будем называть попарно связным. Отметим, что определения связной и попарно связной систем с дискретным временем полностью совпадают с соответствующими определениями систем с переключениями с непрерывным временем [8].

Как уже отмечалось [1, 2, 7], устойчивость системы (2.1) при любых $A(t)$ указанного вида эквивалентна устойчивости разностного включения

$$x(t+1) \in F(x(t)), \quad F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathrm{conv}\overline{A}\}, \tag{2.2}$$

где $\mathrm{conv}\overline{A}$ — выпуклый многогранник в линейном пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ матриц порядка n. Будем считать, что матрицы $\{A_1, \ldots, A_N\}$ являются крайними точками множества $\mathrm{conv}\overline{A}$, т.е. вершинами этого многогранника.

Попарно связное множество матриц $\overline{A} = \{A_1, \ldots, A_N\}$ допускает одно из двух представлений [8]:

$$\begin{gathered} A_1 = A, \quad A_{s+1} = A + bc_s^\top, \quad b, c_s \in \mathbb{R}^n, \quad s = \overline{1, N-1}, \\ A_1 = A, \quad A_{s+1} = A + b_s c^\top, \quad b_s, c \in \mathbb{R}^n, \quad s = \overline{1, N-1}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Пусть в попарно связной системе (2.1) матрицы A_s определяются соотношением (2.3), тогда многозначное отображение $F(x)$, определяющее разностное включение (2.2), имеет вид

$$F(x) = \left\{ y : y = Ax + \langle c, x\rangle \sum_{s=1}^{N-1} \lambda_s b_s,\ \sum_{s=1}^{N-1} \lambda_s \leqslant 1,\ \lambda_s \geqslant 0,\ s = \overline{1, N-1} \right\}, \tag{2.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Введем обозначения $\varphi_s = \lambda_s \langle c, x\rangle$, $s = \overline{1, N-1}$. Тогда условия на λ_s из (2.4) эквивалентны выполнению системы неравенств на квадратичные формы в расширенном пространстве (x, φ):

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\langle c, x\rangle - \varphi_1) \geqslant 0, \quad \varphi_2(\langle c, x\rangle - \varphi_1 - \varphi_2) \geqslant 0,\\
&\varphi_3(\langle c, x\rangle - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) \geqslant 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{N-1}\left(\langle c, x\rangle - \sum_{s=1}^{N-1} \varphi_s\right) \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

По аналогии с непрерывным случаем рассмотрим систему Лурье

$$
x(t+1) = Ax(t) + \sum_{s=1}^{N-1} b_s \varphi_s(t, \sigma_s), \quad \sigma_s = \langle c, x\rangle, \tag{2.6}
$$

в которой $\varphi_s(t, \sigma_s)$ удовлетворяют (2.5) при всех $\sigma_s = \langle c, x\rangle$ и $t > 0$.

В [8] показывается, что многозначное отображение $F(x)$ из (2.4) совпадает с множеством $\{y : y = Ax + \sum_{s=1}^{N-1} b_s \varphi_s, \varphi_s$ *удовлетворяют* $(2.5)\}$. Таким образом, система (2.6), (2.5) эквивалентна автономному разностному включению (2.2), (2.4) (эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств решений при одинаковых начальных условиях). В результате приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. Вопрос об устойчивости попарно связной системы (2.1), (2.3) *при произвольных переключениях эквивалентен вопросу об устойчивости системы Лурье* (2.6) *при всех нелинейностях $\varphi_s(t, \sigma_s)$, $\sigma_s = \langle c, x\rangle$, удовлетворяющих* (2.5).

Замечание 1. В непрерывном случае доказывается более сильный результат о совпадении множеств решений попарно связной системы с переключениями и соответствующей системы Лурье (теорема 2 [8]). Аналогом леммы 1 в непрерывном случае является следствие 2 [8].

Функция Ляпунова $v(x) = x^\top L x$ ($L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L^\top = L$) для включения (2.2), (2.4) будет одновременно функцией Ляпунова для системы Лурье (2.6), (2.5) и общей квадратичной функцией Ляпунова (ОКФЛ) для системы с переключениями (2.1), (2.3), а ее наличие определяется [7, 11] разрешимостью соответствующей системы ЛМН:

$$
A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{2.7}
$$

Достаточные частотные условия существования КФЛ для системы Лурье (2.6) при ограничениях (2.5) могут быть получены с помощью стандартной техники, основанной на использовании S-процедуры и обобщенной леммы Калмана – Сеге – Попова [12, 13], как это делается в случае $N = 3$ для систем треугольного типа [7].

В матричной форме система (2.6) имеет вид

$$x(t+1) = Ax(t) + B\varphi, \tag{2.8}$$

где $B = \big(b_1\ b_2\ \dots\ b_{N-1}\big)$, и $\varphi^\top = (\varphi_1\ \varphi_2\ \dots\ \varphi_{N-1})$. Неравенство на первую разность $\triangle v(x(t)) = x^\top(t+1)Lx(t+1) - x^\top(t)Lx(t)$ функции Ляпунова $v(x) = x^\top Lx$ вдоль решений системы (2.8) имеет вид

$$\triangle v(x,\varphi) = (Ax + B\varphi)^* L(Ax + B\varphi) - x^* Lx < 0 \tag{2.9}$$

и должно выполняться при всех $(x,\varphi) \neq 0$, удовлетворяющих (2.5). В соответствии с S-процедурой составим квадратичную форму

$$(Ax + B\varphi)^* L(Ax + B\varphi) - x^* Lx\ + \sum_{s=1}^{N-1} \tau_s\varphi_s \left(\langle c, x\rangle - \sum_{q=1}^{s} \varphi_q\right), \tag{2.10}$$

где $\tau_s > 0$ — неизвестные параметры, $s = \overline{1, N-1}$. Функция ограничений

$$F(x,\varphi) = \sum_{s=1}^{N-1} \tau_s\varphi_s \left(\langle c, x\rangle - \sum_{q=1}^{s} \varphi_q\right)$$

может быть записана в матричной форме

$$F(x,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & C\tau/2 \\ \tau C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где

$$\tau = \operatorname{diag}\Big\{\tau_1, \dots, \tau_{N-1}\Big\}, \quad C = \Big(\underbrace{c\ \ c\ \ \dots\ \ c}_{N-1}\Big),$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2/2 & \dots & \tau_{N-1}/2 \\ \tau_2/2 & \tau_2 & \dots & \tau_{N-1}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{N-1}/2 & \tau_{N-1}/2 & \dots & \tau_{N-1} \end{pmatrix}.$$

В новых обозначениях отрицательная определенность формы (2.10) эквивалентна МН

$$\begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top LB + C\tau/2 \\ B^\top LA + \tau C^\top/2 & B^\top LB - \Gamma \end{pmatrix} < 0. \tag{2.12}$$

Из обобщенной леммы Калмана – Сеге – Попова [12, 13] условия разрешимости (2.12) определяются в форме частотного неравенства. В результате аналогом теоремы 3 [8] в дискретном случае будет следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть матрица A устойчива ($r(A) < 1$) и существуют числа $\tau_s > 0$, $s = \overline{1, N-1}$, такие что $\Gamma > 0$ и частотное неравенство*

$$\Gamma + \mathrm{Re}\, \left[\tau C^\top \left(A - \lambda E_n\right)^{-1} B\right] > 0$$

выполняется при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, где E_n — единичная $(n \times n)$-матрица ($\mathrm{Re}\, W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ — эрмитово сопряженная к W). Тогда попарно связная система (2.1), (2.3) имеет ОКФЛ (система (2.7) разрешима, система (2.1) устойчива).

3. Системы с переключениями между четырьмя подсистемами. Критерий Цыпкина

Проблема существования ОКФЛ для систем (2.1) с переключениями между двумя или тремя подсистемами подробно рассмотрена в [7]. В случае $N = 4$ связные системы (2.1) могут быть двух различных типов. Системы этих двух типов отличаются друг от друга видом соответствующих им графов. Описание обоих этих типов систем с переключениями в дискретном случае полностью совпадает с соответствующим описанием, приведенным в [14] для непрерывного случая. Как и в [14], здесь ограничимся рассмотрением системы (2.1), устойчивость которой эквивалентна абсолютной устойчивости системы управления с двумя нестационарными нелинейностями из конечных секторов [12, 13]. Такая система управления описывается системой Лурье (2.8), в которой $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, т.е. системой

$$x(t+1) = Ax(t) + \sum_{s=1}^{2} b_s \varphi_s(t, \sigma_s), \quad \sigma_s = \langle c_s, x \rangle, \tag{3.1}$$

где $\varphi_s(t, \sigma_s)$ удовлетворяют при всех $\sigma_s = \langle c_s, x \rangle$ и $t > 0$ стандартным секторным ограничениям:

$$0 \leqslant \varphi_s(t, \sigma_s)/\sigma_s \leqslant 1, \quad \sigma_s = \langle c_s, x \rangle, \quad s = 1, 2. \tag{3.2}$$

Действительно, абсолютная устойчивость такой системы Лурье эквивалентна [15] устойчивости разностного включения (2.2), в котором матрицы A_s, $s = \overline{1, 4}$, определяются соотношениями

$$\begin{gathered} A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1 c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2 c_2^\top, \quad A_4 = A + b_1 c_1^\top + b_2 c_2^\top, \\ b_s, c_s \in \mathbb{R}^n. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Таким образом, объектом исследования в этом разделе является устойчивость системы (2.1), определяемой матрицами (3.3). Очевидно, такая система с переключениями будет связной. Система ЛМН (2.7), определяющая существование ОКФЛ для этой системы, имеет вид

$$I_s = A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = \overline{1, 4}. \tag{3.4}$$

В [7] показано, что связной системе с переключениями (2.1) соответствует связная система МН (2.7). Метод получения одного результирующего неравенства, эквивалентного исходной связной системе МН, приводится в [7, 11]. К сожалению, форма этого результирующего неравенства для системы (2.7) в случае $N > 2$ не позволяет получить условия его разрешимости в форме частотного критерия. Поэтому система неравенств (2.7) предварительно приводится в [11] к виду, характерному для непрерывного случая.

Метод получения результирующего неравенства опирается на следующее утверждение (теорема 1 из [7]).

Т е о р е м а 2. *Для выполнения системы двух МН*

$$I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\widetilde{\varepsilon} > 0$, *при котором выполнено одно неравенство*

$$I_1 + Q^+(\widetilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\widetilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}\, u^\pm (u^\pm)^\top, \quad u^\pm = p \pm q/\varepsilon^2.$$

В [14] показывается, как с помощью теоремы 2 получить достаточные условия существования ОКФЛ для непрерывного варианта системы (2.1) с матрицами (3.3), так чтобы эти условия совпадали с круговым критерием абсолютной устойчивости систем управления с двумя нелинейностями. Здесь рассмотрим получение с помощью теоремы 2 достаточных условий разрешимости системы (3.4) в виде частотного критерия, совпадающего с известным критерием Цыпкина абсолютной устойчивости дискретных систем управления с двумя нелинейностями. Одновременно эти условия служат достаточными условиями существования ОКФЛ для системы (2.1) с матрицами (3.3). Под критерием Цыпкина абсолютной устойчивости дискретных систем управления с несколькими нелинейностями здесь понимается достаточное частотное условие существования для таких систем КФЛ, которое получено с использованием S-процедуры и обобщенной леммы Калмана – Сеге – Попова [12, 13]. Достаточность объясняется ущербностью S-процедуры в этом случае. Заметим, что дискретный случай гораздо сложнее непрерывного, поскольку МН в (3.4) зависят от A_s квадратично, а в непрерывном случае эта зависимость линейна.

Коротко напомним рассуждения, основанные на S-процедуре и приводящие к критерию Цыпкина. Секторные ограничения (3.2) эквивалентны квадратичным ограничениям:

$$F_s(x, \varphi_s) = \varphi_s(\langle c_s, x\rangle - \varphi_s) \geqslant 0, \quad s = 1, 2. \tag{3.5}$$

Для первой разности функции Ляпунова $v(x) = x^\top L x$ в силу (2.8) имеем то же неравенство (2.9), в котором $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ и которое должно выполняться при любых $(x, \varphi) \neq 0$, удовлетворяющих (3.5). В результате S-процедуры получим квадратичную форму в расширенном пространстве

$$(3.6)\qquad (Ax+B\varphi)^\top L(Ax+B\varphi)-x^\top Lx\;+\sum_{s=1}^{2}\tau_s\varphi_s\left(\langle c_s,x\rangle-\varphi_s\right),$$

где $\tau_1>0$ и $\tau_2>0$ — неизвестные параметры. Функция ограничений $F(x,\varphi)=$ $=\tau_1F_1(x,\varphi_1)+\tau_2F_2(x,\varphi_2)$ может быть представлена выражением (2.11), в котором

$$(3.7)\qquad \Gamma=\tau=\operatorname{diag}\Big\{\tau_1,\tau_2\Big\},\quad C=\Big(c_1\;\;c_2\Big).$$

В обозначениях (3.7) отрицательная определенность формы (3.6) эквивалентна МН (2.12). Далее покажем, как это неравенство можно получить с помощью теоремы 2.

Матрица разности I_2-I_1 имеет вид

$$(3.8)\qquad I_2-I_1=p_1q_1^\top+q_1p_1^\top,\quad p_1=A^\top Lb_1+(\delta_{11}/2)c_1,\quad q_1=c_1,$$

где $\delta_{11}=b_1^\top Lb_1$. Аналогично,

$$(3.9)\qquad I_4-I_3=p_2q_2^\top+q_2p_2^\top,\quad p_2=A^\top Lb_1+(\delta_{11}/2)c_1+\delta_{12}c_2,\quad q_2=c_1,$$

где $\delta_{12}=\delta_{21}=b_1^\top Lb_2=b_2^\top Lb_1$. Для получения условий разрешимости (3.4), совпадающих с критерием Цыпкина, применим теорему 2 сначала к первой, а затем ко второй паре неравенств из (3.4), получим, что система (3.4) разрешима тогда и только тогда, когда существуют $\varepsilon_1>0$ и $\varepsilon_2>0$ такие, что разрешима система из двух МН

$$(3.10)\qquad \widetilde{I}_1=I_1+\frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(u_1^+)^\top<0,\quad \widetilde{I}_2=I_3+\frac{{\varepsilon_2}^2}{2}u_2^+(u_2^+)^\top<0,$$

где

$$u_1^+(\varepsilon_1)=A^\top Lb_1+\left(\frac{\delta_{11}}{2}+\frac{1}{\varepsilon_1^2}\right)c_1,$$
$$u_2^+(\varepsilon_2)=A^\top Lb_1+\left(\frac{\delta_{11}}{2}+\frac{1}{{\varepsilon_2}^2}\right)c_1+\delta_{12}c_2.$$

Ключевая идея последующего анализа состоит в том, чтобы перейти от МН на $(n\times n)$-матрицы в (3.10) к эквивалентным им МН на $((n+1)\times$ $\times(n+1))$-матрицы, используя лемму Шура. В результате получается следующая система МН, эквивалентная (3.10):

$$(3.11)\qquad \begin{aligned}\widetilde{I}_1<0\cong\widehat{\widetilde{I}}_1&=\begin{pmatrix}I_1 & u_1^+\\ (u_1^+)^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon_1^2}\end{pmatrix}<0,\\ \widetilde{I}_2<0\cong\widehat{\widetilde{I}}_2&=\begin{pmatrix}I_3 & u_2^+\\ (u_2^+)^\top & -\dfrac{2}{{\varepsilon_2}^2}\end{pmatrix}<0.\end{aligned}$$

Если в (3.10) положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то в этом случае разрешимость (3.10) будет только достаточна для разрешимости (3.4). В случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ имеем $u_2^+(\varepsilon_1) = u_1^+(\varepsilon_1) + \delta_{12} c_2$. Матрица разности $I_3 - I_1$ (как в (3.8)) имеет вид

$$I_3 - I_1 = p_3 q_3^\top + q_3 p_3^\top, \quad p_3 = A^\top L b_2 + (\delta_{22}/2) c_2, \quad q_3 = c_2, \tag{3.12}$$

где $\delta_{22} = b_2^\top L b_2$. Проверяется непосредственно, что

$$\widehat{\widetilde{I}}_2 - \widehat{\widetilde{I}}_1 = \widetilde{p}\,\widetilde{q}^\top + \widetilde{q}\,\widetilde{p}^\top, \;\; \widetilde{p} = \begin{pmatrix} p_3 \\ \delta_{12} \end{pmatrix}, \;\; \widetilde{q} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ к системе (3.11) применима теорема 2, на основании которой получим, что разрешимость (3.11) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ эквивалентна существованию такого $\varepsilon_2 > 0$ (нового), что разрешимо одно МН

$$\overset{\approx}{I} = \widehat{\widetilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2}\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\widetilde{q}\right)\left(\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\widetilde{q}\right)^\top < 0. \tag{3.13}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим что

$$\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\widetilde{q} = \begin{pmatrix} p_3 + \dfrac{1}{\varepsilon_2^2} c_2 \\ \delta_{12} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} u_3^+(\varepsilon_2) \\ \delta_{12} \end{pmatrix}, \qquad u_3^+(\varepsilon_2) = A^\top L b_2 + \left(\frac{\delta_{22}}{2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2}\right) c_2.$$

По лемме Шура МН (3.13) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$\overset{\approx}{I} < 0 \cong I_{Ts} = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+(\varepsilon_1) & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_1^+(\varepsilon_1)^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon_1^2} & \delta_{12} \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & \delta_{21} & -\dfrac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} < 0. \tag{3.14}$$

Разрешимость этого неравенства достаточна для разрешимости системы (3.4). Определим новые параметры $\tau_s = \delta_{ss} + (2/\varepsilon_s^2) > \delta_{ss}$, тогда $-2/\varepsilon_s^2 = \delta_{ss} - \tau_s$, $s = 1, 2$. Сделаем в (3.14) обратную замену $I_1 = A^\top L A - L$ и выразим ε_s через τ_s, $s = 1, 2$. В результате получим, что неравенство (3.14) принимает вид

$$\begin{pmatrix} A^\top L A - L & A^\top L b_1 + (\tau_1/2) c_1 & A^\top L b_2 + (\tau_2/2) c_2 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_1 & \delta_{12} \\ (\bullet)^\top & \delta_{21} & \delta_{22} - \tau_2 \end{pmatrix} < 0. \tag{3.15}$$

При $m = 2$ имеем $\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = B^\top L B$, т.е. МН (3.15) совпадает с (2.12), в котором Γ, τ и C определены в (3.7). Такое неравенство (2.12), равно как (3.15) и соответствующее МН (3.14), далее будем называть неравенствами Цыпкина.

4. Улучшения критерия Цыпкина

4.1. Сужение множества систем

В двух предыдущих секциях были рассмотрены два различных сужения множества систем с переключениями (2.1). Это попарно связные системы с переключениями и системы Лурье со стандартными ограничениями на нелинейности вида (3.2). В непрерывном случае в [8] показано, что задача устойчивости систем Лурье вида (2.6) даже при нескольких нелинейностях вида (3.2) эквивалентна устойчивости систем с переключениями специального вида при произвольных переключениях. Эти системы с переключениями, которые соответствуют системам Лурье, являются связными, но в общем случае попарно связными не являются. Точно такая же ситуация имеет место в дискретном случае. С другой стороны, попарно связные системы с переключениями из раздела 2 не обязательно являются системами Лурье со стандартными секторными ограничениями. В этом разделе рассмотрим системы с переключениями, которые удовлетворяют обоим ограничениям. Для простоты рассмотрим только случай $m = 2$. В этом случае в (3.3) $c_1 = c_2 = c$, и теорему 2 можно применить к $I_1 < 0$ и $I_4 < 0$, а затем к $I_2 < 0$ и $I_3 < 0$. Получим результирующее неравенство, разрешимость которого гарантирует разрешимость (3.4) с матрицами (3.3) при $c_1 = c_2$. Это МН совпадает с (2.12), в котором

$$\begin{gathered} B = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & c \end{pmatrix}, \\ \Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \operatorname{diag}\Big\{\tau_1, \tau_2\Big\}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Подробные выкладки достаточно громоздки и здесь их опускаем.

4.2. Схема получения матричного неравенства, эквивалентного исходной системе

Получение МН, эквивалентного (3.4), методом из [11] изображено на схеме

$$\begin{array}{ccccccc} I_2 & \longleftrightarrow & I_1 & \longleftrightarrow & I_3 & \longleftrightarrow & I_4 \\ & \downarrow_{\varepsilon_1} & & \downarrow_{\varepsilon_3} & & \downarrow_{\varepsilon_2} & \\ & \widetilde{I}_1 & \longleftrightarrow & \widetilde{I}_3 & \longleftrightarrow & \widetilde{I}_2 & \\ & & \downarrow_{\varepsilon_4} & & \downarrow_{\varepsilon_5} & & \\ & & \overset{\approx}{I}_1 & \longleftrightarrow & \overset{\approx}{I}_2 & & \\ & & & \downarrow_{\varepsilon_6} & & & \\ & & & \overset{\approx}{I}\ . & & & \end{array}$$

В этой схеме горизонтальные стрелки указывают на пары неравенств, к которым применима теорема 2. Вертикальные стрелки указывают на результирующие МН, полученные в результате применения этой теоремы, а ε_s —

появляющиеся при этом новые параметры. Приведем выражения для неравенств из схемы через p_s и q_s из (3.8), (3.9), (3.12).

Неравенства первого уровня: $\widetilde{I}_1 < 0 \cong I_1 < 0$, $I_2 < 0$, $\widetilde{I}_3 < 0 \cong I_1 < 0$, $I_3 < 0$, $\widetilde{I}_2 < 0 \cong I_3 < 0$, $I_4 < 0$. Ниже для неравенств из (3.10) приведены их более полные выражения и добавлено выражение для $\widetilde{I}_3$:

$$\widetilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(u_1^+)^\top = I_2 + \frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^-(u_1^-)^\top < 0, \quad u_1^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_1^2}q_1, \tag{4.2}$$

$$\widetilde{I}_2 = I_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2}u_2^+(u_2^+)^\top = I_4 + \frac{\varepsilon_2^2}{2}u_2^-(u_2^-)^\top < 0, \quad u_2^\pm = p_2 \pm \frac{1}{\varepsilon_2^2}q_2, \tag{4.3}$$

$$\widetilde{I}_3 = I_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2}u_3^+(u_3^+)^\top = I_3 + \frac{\varepsilon_3^2}{2}u_3^-(u_3^-)^\top < 0, \quad u_3^\pm = p_3 \pm \frac{1}{\varepsilon_3^2}q_3. \tag{4.4}$$

Неравенства второго уровня: $\approx{I}_1 < 0 \cong \widetilde{I}_1 < 0$, $\widetilde{I}_3 < 0$, $\approx{I}_2 < 0 \cong \widetilde{I}_2 < 0$, $\widetilde{I}_3 < 0$. Получение неравенств второго уровня продемонстрируем на получении выражения для $\approx{I}_1 < 0$. Разность $\widetilde{I}_3 - \widetilde{I}_1$ допускает представление

$$\widetilde{I}_3 - \widetilde{I}_1 = \frac{\varepsilon_3^2}{2}u_3^+(u_3^+)^\top - \frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(u_1^+)^\top = p_4q_4^\top + q_4p_4^\top,$$

где $p_4 = \left(\frac{\varepsilon_3}{2}u_3^+ + \frac{\varepsilon_1}{2}u_1^+\right)$ и $q_4 = \left(\frac{\varepsilon_3}{2}u_3^+ - \frac{\varepsilon_1}{2}u_1^+\right)^\top$. Применяя теорему 2, получим (далее используем обозначение $\varepsilon_s^\pm = 1 \pm 1/\varepsilon_s^2$):

$$\begin{gathered}\approx{I}_1 = \widetilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2}u_4^+(u_4^+)^\top = \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_4^2}{2}u_4^-(u_4^-)^\top < 0,\\ u_4^\pm = \frac{\varepsilon_3}{2}u_3^+ + \frac{\varepsilon_1}{2}u_1^+ \pm \frac{1}{\varepsilon_4^2}\left(\frac{\varepsilon_3}{2}u_3^+ - \frac{\varepsilon_1}{2}u_1^+\right) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_4^\mp}{2}u_1^+ + \frac{\varepsilon_3\varepsilon_4^\pm}{2}u_3^+.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Аналогично получим выражение для $\approx{I}_2 < 0$:

$$\approx{I}_2 = \widetilde{I}_2 + \frac{\varepsilon_5^2}{2}u_5^+(u_5^+)^\top = \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_5^2}{2}u_5^-(u_5^-)^\top < 0, \quad u_5^\pm = \frac{\varepsilon_2\varepsilon_5^\mp}{2}u_2^+ + \frac{\varepsilon_3\varepsilon_5^\pm}{2}u_3^-. \tag{4.6}$$

Финальное результирующее неравенство: $\approx{I} < 0 \cong \approx{I}_1 < 0$, $\approx{I}_2 < 0$. Таким же образом получим выражение для финального результирующего неравенства

$$\begin{aligned}\approx{I} = \approx{I}_1 + \frac{\varepsilon_6^2}{2}u_6^+(u_6^+)^\top &= \widetilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2}u_4^+(u_4^+)^\top + \frac{\varepsilon_6^2}{2}u_6^+(u_6^+)^\top = \\ &= I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(u_1^+)^\top + \frac{\varepsilon_4^2}{2}u_4^+(u_4^+)^\top + \frac{\varepsilon_6^2}{2}u_6^+(u_6^+)^\top < 0,\end{aligned} \tag{4.7}$$

где

$$u_6^\pm = \frac{\varepsilon_5}{2}u_5^- + \frac{\varepsilon_4}{2}u_4^- \pm \frac{1}{\varepsilon_6^2}\left(\frac{\varepsilon_5}{2}u_5^- - \frac{\varepsilon_4}{2}u_4^-\right) = \frac{\varepsilon_4\varepsilon_6^\mp}{2}u_4^- + \frac{\varepsilon_5\varepsilon_6^\pm}{2}u_5^-.$$

Финальное результирующее МН (4.7) зависит от шести дополнительных параметров. Легкий способ упростить ситуацию — просто положить два из них равными 1. Пусть $\overset{\approx}{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 1, 1, \varepsilon_6) \triangleq \overset{\approx}{I}_{(1)}$. Неравенство $\overset{\approx}{I}_{(1)} < 0$ является достаточным условием для выполнения всей системы (3.4) (достаточным из-за предположения $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$). К сожалению, матрицу $\overset{\approx}{I}_{(1)}$ не удается преобразовать к виду, в котором она линейно зависит от неизвестных параметров. Поэтому вернемся к МН второго уровня, которые сильно упрощаются, если в них положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$. В этом случае $\varepsilon_4^+ = \varepsilon_5^+ = 2$, а $\varepsilon_4^- = \varepsilon_5^- = 0$. Тогда (см. (4.5) и (4.6))

$$u_4^+ = \varepsilon_3 u_3^+, \quad u_4^- = \varepsilon_1 u_1^+, \quad u_5^+ = \varepsilon_3 u_3^-, \quad u_5^- = \varepsilon_2 u_2^+,$$

и для соответствующих МН второго уровня справедливы выражения

$$\begin{aligned} \overset{\approx}{I}_{1(1)} &= \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^- (u_4^-)^\top = \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+ (u_1^+)^\top = \\ &= I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+ (u_1^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+ (u_3^+)^\top < 0, \\ \overset{\approx}{I}_{2(1)} &= \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^- (u_5^-)^\top = \widetilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+ (u_2^+)^\top = \\ &= I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+ (u_2^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+ (u_3^+)^\top < 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Понятно, что МН $\overset{\approx}{I}_{(1)} < 0$ является результирующим для системы из двух неравенств (4.8). Применим лемму Шура к обоим этим неравенствам и получим эквивалентную систему МН:

$$\overset{\simeq}{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & \begin{bmatrix} u_1^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_3^+ \end{bmatrix} \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_1^2 & 0 \\ & 0 & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0, \quad \overset{\simeq}{I}_2 = \begin{pmatrix} I_1 & \begin{bmatrix} u_2^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_3^+ \end{bmatrix} \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 & 0 \\ & 0 & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0. \tag{4.9}$$

К системе (4.9) применима теорема 2, что приводит к результирующему МН, разрешимость которого гарантирует разрешимость (3.4) (достаточное условие).

Т е о р е м а 3. *МН, результирующее для системы* (4.9), *эквивалентно неравенству*

$$\overset{\simeq}{I} = \begin{pmatrix} A^\top L A - L & A^\top L B + C \\ B^\top L A + C^\top & \Gamma \end{pmatrix} < 0, \tag{4.10}$$

где $B = \Big(b_1 \; b_2 \; 0\Big)$, $C = \Big(\frac{\tau_1}{2}c_1, \; \frac{\tau_2}{2}c_2, \; \frac{\tau_3-\tau_1}{2}c_1 + \delta_{12}c_2\Big)$ *и*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \delta_{11}-\tau_1 & 0 & (\tau_1-\tau_3+\tau_4)/2 \\ 0 & \delta_{22}-\tau_2 & 0 \\ (\tau_1-\tau_3+\tau_4)/2 & 0 & -\tau_4 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Теорема 3 уточняет результат из [16].

С одной стороны, получить аналитические условия разрешимости МН (4.10) с помощью леммы Калмана – Сеге – Попова не представляется возможным, с другой стороны, это МН является ЛМН относительно неизвестных L и τ_s, $s = \overline{1,4}$ и численно решается стандартными программными средствами.

В [16] сделано предположение, которое подтверждено приведенным там примером, что область выполнимости МН (4.10) при оптимизации по входящим в него параметрам превосходит область выполнимости неравенства Цыпкина (3.15). Это предположение вполне естественно. Неравенство Цыпкина зависит от двух дополнительных параметров, неравенство (4.10) — от четырех, т.е. чем больше параметров, тем, вообще говоря, точнее результат. Кроме этого, при различных ε_1 и ε_2 отсутствует прямое повторение результатов критерия Цыпкина, которое, как показано в разделе 3, наступает в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Однако это предположение не нашло подтверждения при детальном рассмотрении на большем количестве примеров. Ниже в разделе 6 будет показано, что на одних примерах проверка МН (4.10) дает более точный результат, чем критерий Цыпкина, на других — наоборот.

4.4. Критерий B

Для улучшения критерия Цыпкина в этом разделе предлагается следующий подход: в результирующем неравенстве (4.7) положить $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$, но отказаться от требования $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ (т.е. оставить пять дополнительных параметров вместо шести). Далее сравнить аналитически области выполнимости этого неравенства и неравенства Цыпкина.

Выше показано, что из выполнения неравенства Цыпкина (3.14) следует выполнение системы (3.4). В соответствии со схемой из раздела 4.2 в этом случае существуют параметры ε_s, $s = \overline{1,6}$, при которых выполняется результирующее МН (4.7). Ключевым вопросом является возможность в этом наборе (при котором выполняется критерий Цыпкина) взять $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$.

Отметим, что при получении критерия Цыпкина теорема 2 применяется сразу к неравенствам $\widetilde{I}_1 < 0$ из (4.2) и $\widetilde{I}_2 < 0$ из (4.3) и выполнение неравенства $\widetilde{I}_3 < 0$ из (4.4) не обсуждается. Из общих соображений при выполнении (3.14) это очевидно, покажем это формально.

Л е м м а 2. *Пусть выполняется неравенство Цыпкина* (3.14), *тогда неравенство* $\widetilde{I}_3 < 0$ *из* (4.4) *выполняется при* $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, *где* ε_2 — *значение параметра, при котором выполняется* (3.14).

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

Далее выясним, при каких ε_4 и ε_5 выполнены неравенства второго уровня (4.5) и (4.6) при условии выполнения неравенства Цыпкина.

Понятно, что определить условия, при которых из отрицательной определенности одной матрицы $I_a(\nu) < 0$, зависящей от условного параметра ν, следует отрицательная определенность другой матрицы $I_b(\nu) < 0$, весьма затруднительно. Поэтому будем исходить из очевидного достаточного требования: если $I_a(\nu) < 0$ и $I_b(\nu) \leqslant I_a(\nu)$, то $I_b(\nu) < 0$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняется неравенство Цыпкина* (3.14). *Положим* $\xi \triangleq \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\delta_{12}^{\,2}$, *где* ε_1, ε_2 *и* δ_{12} *определяются при выполнении* (3.14). *Тогда результирующее МН* (4.7) *выполняется при*

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_4^2 = \varepsilon_5^2 = \frac{2+\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}}\,.$$

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Заметим, что МН (4.5) и (4.6), и тем более МН (4.7), не являются ЛМН относительно входящих в них переменных. Чтобы проверить справедливость теоремы 4 на численных примерах, перейдем от неравенств второго уровня (4.5) и (4.6) к эквивалентным им неравенствам, которые являются ЛМН. Эти неравенства имеют вид

$$(4.11)\quad \widehat{\widetilde{\widetilde{I}}}_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top Lb_1 + (\tau_1/2)c_1 & A^\top L(b_2 - b_1) + (\tau_2/2)c_2 - (\tau_1/2)c_1 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_1 & (\delta_{22} - \delta_{11} + \tau_1 - \tau_2 + \tau_4)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0,$$

$$(4.12)\quad \widehat{\widetilde{\widetilde{I}}}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} A_3^\top LA_3 - L & A^\top Lb_1 + \dfrac{\tau_3}{2}c_1 + \delta_{12}c_2 & A^\top L(b_2 - b_1) - \dfrac{\tau_3}{2}c_1 + \left(\delta_{22} - \delta_{12} - \dfrac{\tau_2}{2}\right)c_2 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_3 & (\delta_{22} - \delta_{11} + \tau_3 - \tau_2 + \tau_5)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_5 \end{pmatrix} < 0.$$

МН (4.11) является ЛМН относительно неизвестных L и τ_s, $s = 1, 2, 4$, МН (4.12) является ЛМН относительно неизвестных L и τ_s, $s = 2, 3, 5$.

Т е о р е м а 5. *МН* (4.11) *эквивалентно МН* (4.5), *МН* (4.12) *эквивалентно МН* (4.6). *Система двух МН* (4.11) *и* (4.12) *эквивалентна исходной системе* (3.4).

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении.

5. Альтернативный взгляд на критерий Цыпкина

Частотное условие критерия Цыпкина получается как условие разрешимости специального МН (МН (3.15) в случае системы (2.8) с двумя нелинейностями (3.2)). МН (3.15) является ЛМН относительно входящих в него неизвестных L и τ_s, $s = 1, 2$, и численно решается стандартными программными средствами. Более того, благодаря линейности МН (3.15), в нем, без ущерба для вопроса о разрешимости, можно считать $\tau_2 = 1$. Таким образом, вместо системы (3.4), имеющей общую размерность $4n$, можно рассматривать одно МН (3.15) размерности $n + 2$ с одним дополнительным параметром (разумеется, принимая во внимание риски, связанные с ущербностью S-процедуры и обусловленные этим потери в области существования КФЛ).

Рассматривая полученные в предыдущих разделах условия существования КФЛ под углом сложности их проверки, отметим следующее.

Достаточное условие теоремы 3, назовем его критерием A, представляет собой проверку МН (4.10), в котором в силу линейности можно положить $\tau_4 = 1$. Таким образом, проверка критерия A состоит в проверке МН размерности $n + 3$ с тремя дополнительными параметрами.

Условие, вытекающее из теоремы 5, состоит в проверке системы из двух МН (4.11), (4.12). Полагая в ней в силу линейности $\tau_5 = 1$, получим систему ЛМН общей размерности $2n + 4$ с четырьмя дополнительными параметрами, которая эквивалентна исходной системе (3.4). Если в системе (4.11), (4.12) положить $\tau_4 = \tau_5 = \tau$, то условие ее разрешимости будет достаточным условием разрешимости системы (3.4). Дополнительно в силу линейности положим в системе (4.11), (4.12) $\tau_4 = \tau_5 = 1$. В результате получим достаточное условие разрешимости (3.4), назовем его критерием B, состоящее в проверке системы ЛМН общей размерности $2n + 4$ с тремя дополнительными параметрами.

Наконец, более выгодной с прикладной точки зрения выглядит численная проверка системы ЛМН (3.11), которая, как сказано при ее получении, эквивалентна исходной системе (3.4). Выразим МН системы (3.11) в исходных обозначениях (3.4), (3.10), используя (П.2) для τ_1 и τ_3, и сформулируем этот результат в виде теоремы.

Т е о р е м а 6. *Система ЛМН* (3.4) *эквивалентна системе*

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\widetilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top Lb_1 + \dfrac{\tau_1}{2}c_1 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_1 \end{pmatrix} < 0, \\
&\widehat{\widetilde{I}}_2 = \begin{pmatrix} A_3^\top LA_3 - L & A^\top Lb_1 + \dfrac{\tau_3}{2}c_1 + \delta_{12}c_2 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_3 \end{pmatrix} < 0,
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

которая является системой ЛМН относительно входящих в нее неизвестных L, τ_1 и τ_3.

В системе (5.1) в силу линейности можно положить $\tau_3 = 1$. В результате получим необходимое и достаточное условие разрешимости (3.4), состоящее в проверке системы ЛМН общей размерности $2n + 2$ (т.е. почти в два раза меньше) с одним дополнительным параметром.

Критерии A и B имеют скорее теоретический интерес, так как уступают по эффективности критерию теоремы 6.

6. Примеры

Если устойчивость удается установить с помощью КФЛ, то иногда говорят, что установлена "квадратичная устойчивость". Поэтому для краткости вместо "область существования КФЛ" будем использовать термин "область квадратичной устойчивости" (ОКУ). Было рассмотрено более пятидесяти примеров систем вида (3.1), (3.2) третьего и шестого порядков, для которых находились оценки ОКУ, вычисляемые с помощью тестируемых алгоритмов из некоторого набора. Этот набор состоит из следующих алгоритмов. Алгоритм NS (обозначения алгоритмов далее будут использоваться в таблицах) состоит в нахождении ОКУ в соответствии с необходимыми и достаточными условиями существования КФЛ путем проверки системы (3.4). Алгоритм Ts состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью критерия Цыпкина, т.е. путем проверки МН (3.15). Алгоритм A состоит в нахождении оценки ОКУ на основании теоремы 3, т.е. путем проверки МН (4.10). Алгоритм B состоит в нахождении оценки ОКУ на основании теоремы 5, т.е. путем проверки системы (4.11), (4.12). Алгоритм PW используется в соответствии с теоремой 1 для попарно связных систем и состоит в нахождении оценки ОКУ путем проверки МН (2.12), в котором при $N = 4$: $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_1 + b_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c & c & c \end{pmatrix}$, $c = c_1 = c_2$, $\tau = \mathrm{diag}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2/2 & \tau_3/2; & \tau_2/2 & \tau_2 & \tau_3/2; & \tau_3/2 & \tau_3/2 & \tau_3 \end{pmatrix}$ (для экономии места матрица Γ записана построчно, а знаки " ; " обозначают переход на следующую строку).

Для нахождения ОКУ рассматривается луч, выходящий из точки 0. Далее выбирается и фиксируется произвольный вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ (естественно, $\alpha_s \geqslant 0$), направленный вдоль этого луча, и решается задача определения наибольшего числа k, такого что при $(k_1, k_2) = k\overline{\alpha}$ выполняется условие соответствующего критерия. Для каждой системы, рассмотренной в качестве примера, проводилось сравнение алгоритмов из указанного набора по пяти различным направлениям $\overline{\alpha}_i$, $i = \overline{1, 5}$.

Отметим закономерности, выявленные по результатам во всех рассмотренных примерах. Очень хорошо показал себя критерий Цыпкина. Более чем в половине случаев область по критерию Цыпкина совпадает с точной ОКУ. Во всех рассмотренных примерах область по критерию B либо больше, либо совпадает с областью по критерию Цыпкина. Область по критерию A в некоторых примерах превосходит область по критерию Цыпкина, а в некоторых наоборот. При этом в ряде случаев область по критерию A превосходит область по критерию B. Область по PW алгоритму почти во всех случаях уступает области по Ts алгоритму. Это отчасти объясняется тем, что у критерия

Цыпкина и критерия теоремы 1 не совпадают области применения. Нахождение оценки ОКУ для попарно связных систем с помощью проверки МН (2.12) при (4.1) во всех примерах дает точно тот же результат, что и критерий Цыпкина. Этот факт не отражен в таблицах. Также был проверен численно, но не отражен в таблицах тот факт, что при проверке системы (4.11), (4.12) при $\tau_4 = 1$ и системы (5.1) при $\tau_3 = 1$ получается точная оценка ОКУ.

Отметим также, что для одной и той же системы результаты могут принципиально отличаться для разных направлений.

Во всех таблицах, приведенных ниже (см. табл. 1–4), в верхней строке указываются лучи $\overline{\alpha}_i$, $i = \overline{1,5}$, вдоль которых оценивается ОКУ, а в левом столбце приведены обозначения используемых для этого алгоритмов. Номера таблиц совпадают с номерами примеров, к которым они относятся.

Пример 1. Рассматривается система Лурье вида (3.1) при $n = 3$, в которой

$$A = [0 \;\; 0 \;\; -0{,}5; \;\; 0{,}5 \;\; 0 \;\; -1{,}5; \;\; 0 \;\; 0{,}5 \;\; -1{,}5],$$
$$\mathrm{spectr}(A) = [-0{,}5 \;\; -0{,}5 \;\; -0{,}5],$$
$$b_1^\top = (0 \;\; 0 \;\; k_1), \;\; b_2^\top = (0 \;\; k_2 \;\; 0), \;\; c_1^\top = (0 \;\; 0 \;\; 1), \;\; c_2^\top = (0 \;\; 0 \;\; 1),$$

где матрица A записана построчно. Система попарно связна, так как $c_1 = c_2$. Пример 1 уточняет результаты из [16].

Таблица 1

Прогр. \ Лучи	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,1)$
NS	0,24999	0,12499	0,08333	0,24107	0,18396
Ts	0,24999	0,12499	0,08333	0,23502	0,17749
A	0,24999	0,12499	0,08333	0,23867	0,18393
B	0,24999	0,12499	0,08333	0,23858	0,18195
PW	0,23211	0,12499	0,08241	0,15263	0,10659
Sh	0,24999	0,12499	0,08333	0,24999	0,24999

Вычислив в этом примере область устойчивости (шуровости) матриц A_s (последняя строка в табл. 1), приходим к выводу, что дискретный аналог квадратичной проблемы Айзермана имеет положительное решение для направлений $(1,1)$, $(1,2)$ и $(1,3)$. Это означает (с точностью до погрешности вычислений), что в этих случаях алгоритмы A и B не только позволяют найти всю ОКУ, но и то, что ОКУ совпадает с точной областью устойчивости.

Пример 2. Рассматривается система Лурье вида (3.1) при $n = 3$, в которой

$$A = [0 \;\; 1 \;\; 0; \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1; \;\; 0{,}125 \;\; 0{,}15 \;\; -0{,}3],$$
$$\mathrm{spectr}(A) = [-0{,}4 + 0{,}3i \;\; -0{,}4 - 0{,}3i \;\; 0{,}5],$$
$$b_1^\top = (k_1 \;\; 0 \;\; k_1), \quad b_2^\top = (k_2 \;\; k_2 \;\; k_2), \quad c_1^\top = (1 \;\; 1 \;\; 0), \quad c_2^\top = (0 \;\; 1 \;\; -1).$$

Таблица 2

Прогр. $\diagdown$ Лучи	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,1)$
NS	0,28041	0,21944	0,17183	0,15223	0,10308
Ts	0,27338	0,20921	0,16512	0,15124	0,10280
A	0,28033	0,21904	0,17148	0,15219	0,10306
B	0,27964	0,21931	0,17183	0,15205	0,10302

Пример 3. Рассматривается система Лурье вида (3.1) при $n = 3$, в которой

$$A = [0 \ \ 1 \ \ 0; \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1; \ \ -0{,}125 \ \ 0{,}05 \ \ 0{,}1],$$
$$\mathrm{spectr}(A) = [0{,}3 + 0{,}4i \ \ 0{,}3 - 0{,}4i \ \ -0{,}5],$$
$$b_1^\top = (0 \ \ 0 \ \ k_1), \quad b_2^\top = (0 \ \ k_2 \ \ 0), \quad c_1^\top = (0 \ \ 0 \ \ 1), \quad c_2^\top = (0 \ \ 1 \ \ 1).$$

Таблица 3

Прогр. $\diagdown$ Лучи	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,1)$
NS	0,71219	0,44570	0,31324	0,43866	0,30943
Ts	0,69671	0,43879	0,31168	0,43866	0,30835
A	0,70536	0,44363	0,31293	0,43386	0,30178
B	0,69671	0,43879	0,31168	0,43866	0,30942

Пример 4. Рассматривается система Лурье вида (3.1) при $n = 6$, в которой матрица A имеет форму Фробениуса и поэтому здесь задается только последней строкой

$$A \sim [0{,}0625 \ \ 0 \ \ -0{,}25 \ \ 0 \ \ 0{,}25 \ \ 0],$$
$$\mathrm{spectr}(A) = [-0{,}5 \ \ -0{,}5 + 0{,}5i \ \ -0{,}5 - 0{,}5i \ \ 0,5 + 0,5i \ \ 0,5 - 0,5i \ \ 0,5],$$
$$b_1^\top = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ k_1), \ \ b_2^\top = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ k_2 \ \ 0),$$
$$c_1^\top = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1), \ \ c_2^\top = (0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1).$$

Система попарно связна, так как $c_1 = c_2$.

Таблица 4

Прогр. $\diagdown$ Лучи	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,1)$
NS	0,76665	0,63449	0,53687	0,42254	0,29070
Ts	0,75869	0,62624	0,52991	0,42042	0,28996
A	0,76174	0,63139	0,53578	0,42116	0,29023
B	0,76552	0,63431	0,53685	0,42199	0,29052
PW	0,62305	0,57036	0,51425	0,32334	0,21802

7. Заключение

В настоящей работе понятие попарно связных систем с переключениями переносится на дискретные системы. Показано, что динамика таких систем может быть представлена динамикой систем Лурье с квадратичными ограничениями на нелинейности. Это позволяет получить с помощью S-процедуры частотный критерий устойчивости таких систем.

Задача устойчивости дискретных систем с переключениями тесно связана с задачей об абсолютной устойчивости дискретных систем Лурье с несколькими нелинейностями из конечных секторов. Здесь для системы Лурье с двумя нелинейностями критерий Цыпкина получен без использования S-процедуры, что привносит методическое разнообразие в изложение классических результатов.

Помимо теоретического интереса, который связан с получением новых аналитических условий существования КФЛ, предлагаемые в работе результаты имеют существенное прикладное значение, так как позволяют значительно снизить размерность систем ЛМН, определяющих существование КФЛ. Это снижение размерности может быть достигнуто как с потерей в ОКУ, так и без такой потери. Наиболее эффективным с прикладной точки зрения является критерий теоремы 6, состоящий в проверке разрешимости ЛМН, размерность которого практически в два раза меньше размерности исходной системы и при этой проверке не происходит потерь в ОКУ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Пусть $\gamma \triangleq \frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2}$ и $\widehat{p} \triangleq u_2^+ - u_1^+ = -\gamma c_1 + \delta_{12} c_2$. Матрица разности допускает представление

$$\widetilde{\widetilde{I}}_2 - \widetilde{\widetilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & \begin{bmatrix} \widehat{p} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \end{bmatrix} \\ (\bullet)^\top & 2\gamma & 0 \\ (\bullet)^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p} \end{bmatrix} \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{1\times n} & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \end{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{p}^\top & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

(во избежание путаницы используется обозначение $0_{n\times m}$ — это матрица размера $n \times m$, все элементы которой равны 0). На основании теоремы 2 результирующее неравенство для системы двух неравенств $\widetilde{\widetilde{I}}_1 < 0$ и $\widetilde{\widetilde{I}}_2 < 0$ из (4.9) имеет вид:

$$\widetilde{\widetilde{I}}_{(1)} < 0 \cong \widetilde{\widetilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p} \end{bmatrix} \\ \gamma + \dfrac{1}{\varepsilon_6^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{p} \end{bmatrix} \\ \gamma + \dfrac{1}{\varepsilon_6^2} \\ 0 \end{pmatrix}^\top < 0.$$

Еще раз применим лемму Шура, получим $\widetilde{\widetilde{I}}_{(1)} < 0 \cong \widetilde{\widetilde{I}} < 0$:

$$
\text{(П.1)} \quad \widetilde{\widetilde{I}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{I}}_1 & \begin{matrix} \begin{bmatrix} \widehat{p} \end{bmatrix} \\ \gamma + \dfrac{1}{\varepsilon_6^2} \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{bmatrix} \ \widehat{p} \ \end{bmatrix}^\top & \gamma + \dfrac{1}{\varepsilon_6^2} & 0 \end{matrix} & -\dfrac{2}{\varepsilon_6^2} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} I_1 & \begin{bmatrix} u_1^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_3^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \widehat{p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ u_1^+ \ \end{bmatrix}^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon_1^2} & 0 & \gamma + \dfrac{1}{\varepsilon_6^2} \\ \begin{bmatrix} \ u_3^+ \ \end{bmatrix}^\top & 0 & -\dfrac{2}{\varepsilon_3^2} & 0 \\ \begin{bmatrix} \ \widehat{p} \ \end{bmatrix}^\top & \gamma + \dfrac{1}{\varepsilon_6^2} & 0 & -\dfrac{2}{\varepsilon_6^2} \end{pmatrix} < 0.
$$

Подставим в u_s^+ выражения для p_s и q_s из (3.8), (3.9) и (3.12), введем новые параметры τ_s, $s = \overline{1,3}$, получим:

$$
\text{(П.2)} \quad \begin{aligned} u_1^+ &= A^\top L b_1 + \frac{\tau_1}{2} c_1, & \tau_1 &\triangleq \delta_{11} + \frac{2}{\varepsilon_1^2}, \\ u_3^+ &= A^\top L b_2 + \frac{\tau_2}{2} c_2, & \tau_2 &\triangleq \delta_{22} + \frac{2}{\varepsilon_3^2}, \\ u_2^+ &= A^\top L b_1 + \frac{\tau_3}{2} c_1 + \delta_{12} c_2, & \tau_3 &\triangleq \delta_{11} + \frac{2}{\varepsilon_2^2}. \end{aligned}
$$

Выразим γ через τ_s и добавим τ_4:

$$
\text{(П.3)} \quad \gamma = \frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2} = \frac{1}{2}\left(\tau_1 - \tau_3\right), \quad \tau_4 \triangleq \frac{2}{\varepsilon_6^2}.
$$

В обозначениях (П.2) и (П.3) МН (П.1) в точности совпадает с МН $\widetilde{\widetilde{I}} < 0$ из (4.10).

Теорема 3 доказана.

Доказательство леммы 2. Применим лемму А4 [17, с. 253] к неравенству Цыпкина (3.14)

$$
\text{(П.4)} \quad I_{Ts} < 0 \cong \widehat{I}_{Ts} = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \begin{pmatrix} u_1^+(\varepsilon_1) \\ \delta_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+(\varepsilon_1)^\top & \delta_{12} \end{pmatrix} < 0.
$$

Получим, что из $\widehat{I}_{Ts} < 0$ следует $\widetilde{I}_3 < 0 \cong \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\varepsilon_2^2/2 \end{pmatrix} < 0$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что из выполнения неравенства Цыпкина (3.14) следует существование ε_4, при котором выполнено $\widetilde{\widetilde{I}}_1 < 0$. Преобразуем дальше $\widehat{I}_{Ts}$ из (П.4)

$$\widehat{I}_{Ts} = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \begin{pmatrix} u_1^+(\varepsilon_1)u_1^+(\varepsilon_1)^\top & \delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1) \\ \delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1)^\top & \delta_{12}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 + \dfrac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(\varepsilon_1)u_1^+(\varepsilon_1)^\top & \dfrac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2) \\ \dfrac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1)^\top + u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon_2^2} + \dfrac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Введем обозначения $\xi \triangleq \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\delta_{12}^{\,2}$, $\gamma_1 \triangleq \dfrac{2\varepsilon_2^2}{4-\xi}$, т.е. $-\dfrac{1}{\gamma_1} = -\dfrac{2}{\varepsilon_2^2} + \dfrac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}^2$ ($4-\xi > 0$ является следствием $\widehat{I}_{Ts} < 0$). По лемме Шура получим

$$\widehat{I}_{Ts} < 0 \cong \widehat{\widehat{I}}_{Ts} = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(\varepsilon_1)u_1^+(\varepsilon_1)^\top +$$
$$+ \gamma_1\left(\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2)\right)\left(\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2)\right)^\top < 0,$$

где $\alpha_1 \triangleq (\varepsilon_1^2\delta_{12})/2$. Таким образом, разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам $\widehat{\widehat{I}}_{Ts}$ и $\widetilde{\widetilde{I}}_1$ из (4.5), представляет собой разность квадратов. Введем еще упрощающие обозначения

$$\text{(П.5)} \qquad \alpha_2 \triangleq \varepsilon_1\varepsilon_4^-/2\,, \quad \beta_2 \triangleq \varepsilon_2\varepsilon_4^+/2 > 0\,, \quad \gamma_2 \triangleq \varepsilon_4^2/2 > 0\,,$$

тогда

$$\widetilde{\widetilde{I}}_1 - \widehat{\widehat{I}}_{Ts} \triangleq \Delta_1 = \gamma_2\left(\alpha_2 u_1^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^+(\varepsilon_2)\right)\left(\alpha_2 u_1^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^+(\varepsilon_2)\right)^\top -$$
$$- \gamma_1\left(\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2)\right)\left(\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2)\right)^\top.$$

Неравенство $\Delta_1 \leqslant 0$ для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2) = \lambda\left(\alpha_2 u_1^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^+(\varepsilon_2)\right),$$
$$u_1^+(\alpha_1 - \lambda\alpha_2) = u_3^+(-1 + \lambda\beta_2).$$

Векторы u_1^+ и u_3^+, вообще говоря, произвольные, поэтому последнее равенство возможно, только если $\alpha_1 - \lambda\alpha_2 = 0$ и $1 - \lambda\beta_2 = 0$, т.е. $\lambda = \alpha_1/\alpha_2 = 1/\beta_2$.

Вернемся к значениям α_s и β_s, получим

$$\frac{\varepsilon_1^2\delta_{12}}{2}\frac{2}{\varepsilon_1\varepsilon_4^-}=\frac{\varepsilon_1\delta_{12}}{\varepsilon_4^-}=\frac{2}{\varepsilon_2\varepsilon_4^+};\quad \left(1-\frac{1}{\varepsilon_4^2}\right)\frac{1}{\varepsilon_1\delta_{12}}=\left(1+\frac{1}{\varepsilon_4^2}\right)\frac{\varepsilon_2}{2};$$

$$\frac{1}{\varepsilon_4^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1\delta_{12}}+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)=\frac{1}{\varepsilon_1\delta_{12}}-\frac{\varepsilon_2}{2};\quad \frac{1}{\varepsilon_4^2}\frac{2+\sqrt{\xi}}{2\varepsilon_1\delta_{12}}=\frac{2-\sqrt{\xi}}{2\varepsilon_1\delta_{12}};$$

$$\varepsilon_4^2=\frac{2+\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}}\,.$$

Случай $\alpha_1=\alpha_2=0$ особый, он означает, что $\varepsilon_4=1$ и $\delta_{12}=0$. Напомним, что $\delta_{12}=b_1^\top Lb_2$ и случай $\delta_{12}=0$ возможен. В этом случае линейные формы автоматически пропорциональны.

Перейдем к вопросу о существовании ε_5, при котором выполнено $\tilde{\tilde{I}}_2<0$. Сначала представим неравенство Цыпкина в другой эквивалентной форме. Для этого неравенство (3.13) представим в виде ($\hat{\tilde{I}}_2$ определена в (3.11))

$$\tilde{\tilde{I}}=\hat{\tilde{I}}_2+\frac{\varepsilon_2^2}{2}\left(\tilde{p}-\frac{1}{\varepsilon_2^2}\tilde{q}\right)\left(\tilde{p}-\frac{1}{\varepsilon_2^2}\tilde{q}\right)^\top<0.$$

Далее, действуя по аналогии, получим неравенство Цыпкина в форме, отличной от (3.14):

$$\tilde{\tilde{I}}<0\cong\tilde{I}_{Ts}=\begin{pmatrix} I_3 & u_2^+(\varepsilon_1) & u_3^-(\varepsilon_2)\\ u_2^+(\varepsilon_1)^\top & -\dfrac{2}{\varepsilon_1^2} & \delta_{12}\\ u_3^-(\varepsilon_2)^\top & \delta_{21} & -\dfrac{2}{\varepsilon_2^2}\end{pmatrix}<0.$$

Проделав с $\tilde{I}_{Ts}$ те же преобразования, что проделаны выше с I_{Ts} из (3.14), а затем с $\hat{I}_{Ts}$ из (П.4), получим

$$\tilde{I}_{Ts}<0\cong\tilde{\tilde{I}}_{Ts}=I_3+\frac{\varepsilon_1^2}{2}u_2^+(\varepsilon_1)u_2^+(\varepsilon_1)^\top+$$
$$+\gamma_1\left(\alpha_1u_2^+(\varepsilon_1)+u_3^-(\varepsilon_2)\right)\left(\alpha_1u_2^+(\varepsilon_1)+u_3^-(\varepsilon_2)\right)^\top<0.$$

Таким образом, разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам $\tilde{\tilde{I}}_{Ts}$ и $\tilde{\tilde{I}}_2$ из (4.6), представляет собой разность квадратов

$$\tilde{\tilde{I}}_2-\tilde{\tilde{I}}_{Ts}\triangleq\Delta_2=\gamma_2\left(\alpha_2u_2^+(\varepsilon_1)+\beta_2u_3^-(\varepsilon_2)\right)\left(\alpha_2u_2^+(\varepsilon_1)+\beta_2u_3^-(\varepsilon_2)\right)^\top-$$
$$-\gamma_1\left(\alpha_1u_2^+(\varepsilon_1)+u_3^-(\varepsilon_2)\right)\left(\alpha_1u_2^+(\varepsilon_1)+u_3^-(\varepsilon_2)\right)^\top,$$

где коэффициенты α_2, β_2 и γ_2 теперь определяются соотношением (П.5), в котором нужно заменить ε_4 на ε_5. Повторяя для анализа неравенства $\Delta_2\leqslant 0$

рассуждение о пропорциональности линейных форм, приведенное выше при анализе $\Delta_1 \leqslant 0$, получим, что $\Delta_2 \leqslant 0$ при

$$\varepsilon_5^2 = \frac{2+\sqrt{\xi}}{2-\sqrt{\xi}}\,.$$

Вычисление Δ_1 и Δ_2 при найденных ε_4 и ε_5 дает $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Получим другое эквивалентное представление для $\widetilde{\widetilde{I}}_1 < 0$ из (4.5). Для этого сначала применим лемму Шура к неравенствам первого уровня (4.2) и (4.4):

$$\text{(П.6)}\qquad \begin{aligned} \widetilde{I}_1 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ \\ (u_1^+)^\top & -2/\varepsilon_1^2 \end{pmatrix} < 0, \\ \widetilde{I}_3 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_3 = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ \\ (u_3^+)^\top & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Матрица разности имеет вид

$$\widehat{\widetilde{I}}_3 - \widehat{\widetilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & 2/\varepsilon_1^2 - 2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения $\widehat{p}_1 \triangleq u_3^+ - u_1^+$ и $\gamma_{13} \triangleq 1/\varepsilon_1^2 - 1/\varepsilon_3^2$, тогда легко видеть, что

$$\widehat{\widetilde{I}}_2 - \widehat{\widetilde{I}}_1 = \widetilde{p}_1\,\widetilde{q}_1^{\,\top} + \widetilde{q}_1\,\widetilde{p}_1^{\,\top},\ \ \widetilde{p}_1 = \begin{pmatrix} \widehat{p}_1 \\ \gamma_{13} \end{pmatrix},\ \ \widetilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. к системе (П.6) применима теорема 2, на основании которой получим, что разрешимость системы (П.6) эквивалентна существованию такого $\varepsilon_4 > 0$, что разрешимо одно МН

$$\text{(П.7)}\qquad \widetilde{\widetilde{I}}_1 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2}\left(\widetilde{p}_1 + \frac{1}{\varepsilon_4^2}\widetilde{q}_1\right)\left(\widetilde{p}_1 + \frac{1}{\varepsilon_4^2}\widetilde{q}_1\right)^\top < 0.$$

По лемме Шура МН (П.7) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$\text{(П.8)}\qquad \widetilde{\widetilde{I}}_1 < 0 \cong \widehat{\widetilde{\widetilde{I}}}_1 = \begin{pmatrix} \widehat{\widetilde{I}}_1 & \widetilde{p}_1 + (1/\varepsilon_4^2)\widetilde{q}_1 \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_4^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+(\varepsilon_1) & \widehat{p}_1 \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_1^2 & \gamma_{13} + 1/\varepsilon_4^2 \\ (\bullet)^\top & \gamma_{13} + 1/\varepsilon_4^2 & -2/\varepsilon_4^2 \end{pmatrix} < 0.$$

Выразим $\widehat{\overset{\approx}{I}}_1$ из (П.8) в исходных терминах, используя для τ_1 и τ_2 обозначения из (П.2) и полагая $\tau_4 \triangleq 2/\varepsilon_4^2$. В результате получим, что МН (П.8) совпадает с МН (4.11).

Проведем аналогичные выкладки, чтобы получить другое эквивалентное представление для $\overset{\approx}{I}_2 < 0$ из (4.6). Для этого сначала применим лемму Шура к неравенствам первого уровня (4.3) и (4.4) (теперь другое $\widehat{\widetilde{I}}_3$):

$$
\text{(П.9)} \qquad
\begin{aligned}
\widetilde{I}_2 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_2 &= \begin{pmatrix} I_3 & u_2^+ \\ (u_2^+)^\top & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} < 0, \\
\widetilde{I}_3 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_3 &= \begin{pmatrix} I_3 & u_3^- \\ (u_3^-)^\top & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0.
\end{aligned}
$$

Матрица разности имеет вид

$$
\widehat{\widetilde{I}}_3 - \widehat{\widetilde{I}}_2 = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & u_3^- - u_2^+ \\ (\bullet)^\top & 2/\varepsilon_2^2 - 2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix}.
$$

Введем обозначения $\widehat{p}_2 \triangleq u_3^- - u_2^+$ и $\gamma_{23} \triangleq 1/\varepsilon_2^2 - 1/\varepsilon_3^2$, тогда легко видеть, что

$$
\widehat{\widetilde{I}}_3 - \widehat{\widetilde{I}}_2 = \widetilde{p}_2 \widetilde{q}_2^\top + \widetilde{q}_2 \widetilde{p}_2^\top, \quad \widetilde{p}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{p}_2 \\ \gamma_{23} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{pmatrix},
$$

т.е. к системе (П.9) применима теорема 2, на основании которой получим, что разрешимость системы (П.9) эквивалентна существованию такого $\varepsilon_5 > 0$, что разрешимо одно МН

$$
\text{(П.10)} \qquad \overset{\approx}{I}_2 < 0 \cong \widehat{\widetilde{I}}_2 + \frac{\varepsilon_5^2}{2}\left(\widetilde{p}_2 + \frac{1}{\varepsilon_5^2}\widetilde{q}_2\right)\left(\widetilde{p}_2 + \frac{1}{\varepsilon_5^2}\widetilde{q}_2\right)^\top < 0.
$$

По лемме Шура МН (П.10) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$
\text{(П.11)} \quad \overset{\approx}{I}_2 < 0 \cong \widehat{\overset{\approx}{I}}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{\widetilde{I}}_2 & \widetilde{p}_2 + (1/\varepsilon_5^2)\widetilde{q}_2 \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_5^2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} I_3 & u_2^+(\varepsilon_2) & \widehat{p}_2 \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_2^2 & \gamma_{23} + 1/\varepsilon_5^2 \\ (\bullet)^\top & \gamma_{23} + 1/\varepsilon_5^2 & -2/\varepsilon_5^2 \end{pmatrix} < 0.
$$

Выразим $\widehat{\approx}{I}_2$ из (П.11) в исходных терминах, используя для τ_2 и τ_3 обозначения из (П.2) и полагая $\tau_5 \triangleq 2/\varepsilon_5^2$. В результате получим, что МН (П.11) совпадает с МН (4.12).

Поскольку система двух МН (4.5) и (4.6) эквивалентна результирующему МН (4.7), то система двух МН (4.11) и (4.12) тоже эквивалентна МН (4.7), а следовательно, и исходной системе (3.4).

Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shorten R., Wirth F., Mason O. et al.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. No. 4. P. 545–592.
2. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results // IEEE Trans. Autom.Control. 2009. V. 54. No. 2. P. 308–322.
3. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). May 12–15. 2020. Saint Petersburg. Russia. P. 762–768. https://ieeexplore.ieee.org/document/9143937.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.

   Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
5. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями // АиТ. 2016. № 5. С. 37–49.

   Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V. On Stability of Solutions for a Class of Nonlinear Difference Systems with Switching // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 779–788.
6. *Проскурников А.В., Матвеев А.С.* Критерии Цыпкина и Джури-Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // АиТ. 2018. № 6. С. 119–139.

   Proskurnikov A.V., Matveev A.S. Tsypkin and Jury-Lee Criteria for Synchronization and Stability of Discrete-Time Multiagent Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1057–1073.
7. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // АиТ. 2018. № 8. С. 3–26.

   Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Discrete-Time Switched Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 8. P. 1371–1389.
8. *Каменецкий В.А.* Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // АиТ. 2019. № 8. С. 9–28.

   Kamenetskiy V.A. Switched Systems, Lur'e Systems, Absolute Stability, Aizerman Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1375–1389.
9. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. № 10. С. 77–121.

   Gusev S.V., Likhtarnikov A.L. Kalman-Popov-Yakubovich Lemma and the S-Procedure: A Historical Essay // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.

10. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
11. *Каменецкий В.А.* Абсолютная устойчивость дискретных систем управления с нестационарными нелинейностями // Аит. 1985. № 8. С. 172–176.
12. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I, II // АиТ. 1967. № 9. С. 59–72; 1968. № 2. С. 81–101.

    Yakubovich V.A. Absolute Stability of Pulsed Systems with Several Nonlinear or Linear but Nonstationary Blocks. I, II // Autom. Remote Control. 1967. V. 28. No. 9. P. 1301–1313; 1968. V. 29. No. 2. P. 244–263.
13. *Шепелявый А.И.* Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно-импульсных систем управления. Частотные критерии // АиТ. 1972. № 6. 49–56.

    Shepel'yavi A.I. Absolute Instability of Nonlinear Pulse-Amplitude Control Systems. Frequency Criteria // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 6. P. 929–935.
14. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости гибридных систем // АиТ. 2017. № 12. С. 3–25.

    Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Hybrid Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 12. P. 2101–2119.
15. *Молчанов А.П.* Функции Ляпунова для нелинейных дискретных систем управления // АиТ. 1987. № 6. С. 26–35.

    Molchanov A.P. Lyapunov Functions for Nonlinear Discrete-Time Control Systems // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 6. P. 728–736.
16. *Kamenetskiy V.* Stability Conditions for Systems with Switching Between Four Linear Discrete Subsystems / Proceedings of the 15th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference) (STAB-2020, Moscow). New York: IEEE Catalog Number CFP20E79-ART, 2020. С. 1–4. https://ieeexplore.ieee.org/document/9140572.
17. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 21.02.2022

После доработки 28.04.2022

Принята к публикации 10.06.2022