Автоматика и телемеханика, № 9, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. В.А. МОЗЖЕЧКОВ, д-р техн. наук (v.a.moz@yandex.ru)
(Тульский государственный университет)

СИНТЕЗ ПРОСТЫХ РЕЛЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача синтеза релейных регуляторов с простой структурой в составе автоколебательной системы с линейным объектом управления. Структура регулятора считается простой, если ее невозможно упростить, поскольку упрощение, состоящее в исключении из нее любого элемента, приводит к невозможности выполнить все требования, предъявляемые к системе. Необходимо обеспечить наличие в системе автоколебаний с заданной частотой и амплитудой и приблизить ее поведение к желаемому. Предложен метод решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: структурный синтез, автоколебания, релейный регулятор.

DOI: 10.31857/S0005231022090045, **EDN:** AIMROJ

1. Введение

Релейные регуляторы отличаются от непрерывных ступенчатым изменением формируемой ими кусочно-постоянной управляющей величины, которая может принимать только два или три значения. Им часто отдают предпочтение в сравнении с непрерывными регуляторами, в частности, благодаря простоте их технической реализации, низкой стоимости и высокой надежности. Управляющая величина, формируемая в таких регуляторах, является выходом релейного элемента, основанного на применении, например, электронных или электромагнитных ключей, пневматических или гидравлических запорных клапанов.

Важным и широко распространенным классом систем управления с релейным регулятором являются релейные автоколебательные системы. В них автоколебания являются установившимся рабочим режимом, в котором регулируемая величина колеблется в окрестности требуемого значения в допустимом для целей регулирования диапазоне. Релейные системы в ряде случаев способны обеспечить лучшие динамические свойства по сравнению с иными типами систем управления. При малых отклонениях регулируемой величины от требуемого значения поведение таких систем с приемлемой точностью аппроксимируется линейными динамическими моделями, что интерпретируют как результат линеаризации автоколебаниями релейного элемента системы управления. Это позволяет для синтеза таких систем использовать понятийный аппарат и математические методы теории линейных систем управления.

Релейным автоколебательным системам управления посвящено значительное число публикаций, их обзор представлен, в частности, в [1–6]. В большей части они посвящены методам анализа таких систем. Наиболее широко распространенным методом анализа автоколебательных систем управления является метод гармонической линеаризации [5–7]. Методы синтеза, излагаемые в [2, 3, 8, 9], различаются главным образом математическим инструментарием определения частоты, амплитуды автоколебаний и свойств синтезируемой системы. Используемая в них процедура синтеза предполагает задание фиксированной структуры регулятора и выбор значений его параметров на основе оптимизационных методов нелинейного программирования с целью придания синтезируемой системе желаемых свойств. Такой подход к синтезу системы обладает рядом недостатков. Во-первых, в таком случае решается задача параметрического, но не структурного синтеза. Как следствие, конструктор системы, получив решение, не располагает информацией о том, насколько оно выигрышно или проигрышно в сравнении с решениями, основанными на применении альтернативных структур. В частности, при этом не удается получить ответ на вопрос об отсутствии либо наличии избыточности в структуре регулятора. Во-вторых, методы нелинейного программирования не гарантируют нахождение решения, достаточно близкого к оптимальному. Для их эффективной работы необходимо задание хорошего начального приближения значений параметров регулятора к оптимальным. Получив решение, конструктор не знает, насколько оно близко к глобально оптимальному. В-третьих, указанный выше подход к синтезу требует больших вычислительных затрат, что ограничивает размерность решаемых задач и, как следствие, сужает сферу его применения.

Рассматриваемая в настоящей работе математическая постановка задачи и предлагаемый метод ее решения обладают перечисленными ниже положительными отличиями.

1. Структура регулятора определяется в результате решения задачи синтеза и исходно считается неизвестной. В статье показана возможность автоматически находить структуры релейных регуляторов, обеспечивающие решение задачи синтеза и не обладающие избыточностью, т.е. простые структуры [10], при этом производится исчерпывающий анализ возможных вариантов структур.

2. Процедура синтеза сводится в основном к решению систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, что позволяет использовать эффективные методы линейной алгебры, которые по сравнению с методами нелинейного программирования гарантируют нахождение точного решения поставленной задачи и не требуют задания начальных приближений.

3. Предлагаемый метод синтеза релейных регуляторов автоколебательных систем позволяет решать задачи большой размерности в короткое время с высокой точностью.

2. Постановка задачи

Объект управления описывается системой уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

$$y = Cx, \tag{2}$$

где x — вектор состояния объекта управления, $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, t — время, u — скалярное управляющее воздействие, y — вектор выходов, все его компоненты могут использоваться в регуляторе в качестве сигналов обратных связей, его первая компонента y_1 — регулируемая переменная — является выходом синтезируемой системы, значения переменных t, u, элементов векторов x, y, элементов заданных постоянных матриц A, C и вектора B — действительные числа, пара (A, B) является управляемой, а пара (A, C) — наблюдаемой.

Регулятор описывается системой уравнений

$$\dot{z} = A_z z - B_y y + B_g g, \tag{3}$$

$$u^* = C_z z - D_y y + D_g g, \tag{4}$$

$$u = U\mathrm{sgn}(u^*). \tag{5}$$

Уравнения (3), (4) [11–14] описывают линейную часть регулятора. В них z — вектор состояния регулятора, $\dot{z} = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, g — скалярное задающее воздействие (вход системы), u^* — скалярный выход линейной части регулятора, значения переменных u^*, g, элементов вектора z, элементов постоянных векторов B_g, D_g и матриц A_z, B_y, C_z, D_y — действительные числа. Уравнение (5) описывает релейный элемент (реле) регулятора, $\mathrm{sgn}(\cdot)$ — функция знака, u — выход регулятора. Амплитуду U выхода реле, частоту ω_0 и амплитуду U^* автоколебаний на входе реле считаем заданными положительными действительными числами.

Из системы (1), (2), используя преобразование Лапласа, получим уравнение

$$a(p)y(p) = b(p)u(p), \tag{6}$$

отражающее зависимость изображения $y(p)$ вектора выходов объекта управления от изображения $u(p)$ управляющего воздействия, в нем $a(p)$ — характеристический полином объекта управления, $b(p)$ — вектор, компоненты которого — полиномы числителей передаточных функций (ПФ) $y(p)/u(p)$, p — переменная преобразования Лапласа.

Из (3), (4) аналогично [11–13] получим уравнение, отражающее зависимость изображения $u^*(p)$ выхода линейной части регулятора от изображения $g(p)$ задающего воздействия и от изображения $y(p)$ вектора выходов:

$$r(p)u^*(p) = q_g(p)g(p) - \ell^\top(p)y(p), \tag{7}$$

где $r(p)$ — характеристический полином линейной части регулятора, $q_g(p)$ — числитель ПФ линейной части регулятора по задающему воздействию, $\ell(p)$ — вектор, компоненты которого — полиномы числителей ПФ линейной части регулятора по сигналам обратных связей. Считаем, что задан нижний предел μ допустимых значений индекса (относительной степени) ПФ линейной части регулятора.

Пусть задана ПФ $W^*(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$, определяющая желаемое поведение системы (1)–(5), в ней

$$\deg(h_g^*(p)) \leq \deg(h_s^*(p)),$$
$$\deg(h_s^*(p)) \geq \deg(a(p))(1 + 1/\dim(y)) + \mu - 3,$$
$$h_g^*(p) = h_g'(p)b_1(p),$$

$h_s^*(p)$ — гурвицев полином, $\deg(\cdot)$ — степень полинома (целое число), $\dim(\cdot)$ — размерность вектора.

Требуется выбрать значения коэффициентов линейной части (3), (4) регулятора так, чтобы в системе (1)–(5) имели место автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой U^*, а ее реакция $y_1(t)$ на каждое задающее воздействие $g(t)$ из назначенного набора была достаточно близкой к реакции $y_L(t)$ на то же воздействие линейной стационарной системы с ПФ $y_L(p)/g(p) = W^*(p)$. Структура регулятора должна быть простой, что означает [10] присутствие в ней только тех коэффициентов, выбор отличных от нуля значений которых необходим и достаточен для придания системе требуемых свойств. Необходимо найти структуры регуляторов, соответствующие перечисленным требованиям.

3. Метод решения

Следуя методу гармонической линеаризации [5–7] и принимая свойственные ему допущения, заменим описание реле регулятора (5) приближенным описанием:

$$u(p) = Ku^*(p), \tag{8}$$

где K — коэффициент гармонической линеаризации реле. Известно [5], что для рассматриваемого двухпозиционного реле в установившемся режиме автоколебаний

$$K = 4U/(\pi U^*). \tag{9}$$

Согласно (9) значение K однозначно определено заданными значениями U и U^*.

Из (6)–(8) следуют уравнения [11–13], отражающие зависимость изображения $y_1(p)$ выхода гармонически линеаризованной системы (ГЛС) от изображения $g(p)$ задающего воздействия:

$$h_s(p)y_1(p) = h_g(p)g(p), \tag{10}$$

$$h_g(p) = b_1(p)q_g(p)K, \tag{11}$$

$$h_s(p) = a(p)r(p) + \ell^\top(p)b(p)K, \tag{12}$$

где $h_s(p)$ и $h_g(p)$ — характеристический полином и полином числителя ПФ ГЛС, значение K считаем постоянным, равным его значению в установившемся режиме автоколебаний.

Из (11), полагая $h_g(p) = h_g^*(p)$, получим

$$q_g(p) = h_g'(p)/K. \tag{13}$$

Для существования в системе (1)–(5) автоколебаний с частотой ω_0 согласно методу гармонической линеаризации [5–7] необходимо обеспечить наличие у полинома $h_s(p)$ пары чисто мнимых корней $\pm j\omega_0$ и отрицательность действительной части остальных корней. Для приближения реакции $y_1(t)$ на задающие воздействия системы (1)–(5) к реакции $y_L(t)$ на те же воздействия системы с ПФ $W^*(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$ необходимо, чтобы полином $h_s(j\omega)$ был близок к $h_s^*(j\omega)$. Для выполнения указанных условий обеспечим равенство

$$h_s(p) = h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1), \tag{14}$$

которое в силу свойств полиномов $h_s^*(p)$ и $(p^2/\omega_0^2 + 1)$ гарантирует наличие у $h_s(p)$ требуемых корней и обеспечивает близость полинома $h_s(j\omega)$ к полиному $h_s^*(j\omega)$ в области значений ω меньших, чем ω_0, т.е в области частот полезных сигналов.

Приравняв правые части (12) и (14), получим уравнение

$$a(p)r(p) + \ell^\top(p)b(p)K = h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1), \tag{15}$$

которое с учетом (9) позволяет определить $r(p)$ и $\ell(p)$, обеспечивающие выполнение необходимых условий существования автоколебаний с частотой ω_0 и амплитудой U^*, а также близость полиномов $h_s(j\omega)$, $h_s^*(j\omega)$ в области частот полезных сигналов. Уравнение (15) линейно относительно $r(p)$ и $\ell(p)$ и сводится [11–13] в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной p к системе линейных уравнений

$$G\alpha = h, \tag{16}$$

где вектор неизвестных α составлен из коэффициентов искомых полиномов, а вектор h из коэффициентов полинома $h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1)$. Элементы матрицы G — числа, определяемые значениями коэффициентов полиномов объекта управления (6) и значением коэффициента K. Матрица G имеет [13] $\sigma + \deg(a(p)) + 1$ строк и $\sigma + 1 + (\sigma + 1 - \mu)\dim(y)$ столбцов, где $\sigma = \deg(r(p))$ — порядок регулятора. Для совместности системы (16) необходимо, чтобы число строк матрицы G было равно размерности вектора h, откуда следует требование

$$\sigma = \deg(h_s^*(p)) - \deg(a(p)) + 2. \tag{17}$$

Равенство (17) однозначно определяет порядок регулятора σ, поскольку значения $\deg(h_s^*(p))$, $\deg(a(p))$ однозначно определены в исходных данных решаемой задачи.

Для того чтобы система (16) имела не менее, чем одно решение, необходимо, чтобы в матрице G число столбцов было больше или равно числу строк, что эквивалентно условию [13]

$$\sigma \geq \deg(a(p))/\dim(y) + \mu - 1. \tag{18}$$

Совместность требований (17), (18) достигается выполнением при назначении ПФ $W^*(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$ условия

$$\deg(h_s^*(p)) \geq \deg(a(p))(1 + 1/\dim(y)) + \mu - 3.$$

Максимальную структуру [10] линейной части регулятора опишем уравнением (7), в котором порядок $\sigma = \deg(r(p))$ линейной части регулятора выбран согласно (17), $\deg(\ell_k(p)) = \sigma - \mu$, $k = 1, \ldots, \dim(y)$, $\deg(q_g(p)) = \sigma - \mu$, а значения всех коэффициентов полиномов могут свободно выбираться. Максимальной структуре соответствует система (16), решения которой будем использовать для определения $r(p)$ и $\ell(p)$. Она, согласно теореме Кронекера–Капелли, совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы G равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. когда $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(G|h)$. Если $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(G|h) = \dim(\alpha)$, система (16) имеет единственное решение, однозначно определяющее $r(p)$ и $\ell(p)$, при этом максимальная структура не избыточна и соответствует определению простой структуры [10]. Если $\operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(G|h) < \dim(\alpha)$, максимальная структура избыточна и система (16) имеет бесконечное множество решений. Для выделения конечного множества предпочтительных решений и исключения избыточности в структуре регулятора потребуем, чтобы решение было простым [10] или, что эквивалентно, чтобы решение имело простую структуру [10]. Для нахождения решений системы (16) с простой структурой (простых решений), однозначно определяющих $r(p)$ и $\ell(p)$, можно воспользоваться алгоритмом, изложенным в [10].

Будем рассматривать случай, когда допустимо ограниченное отклонение коэффициентов полинома $h_s(p)$ от их заданных значений. Для выполнения при этом требования равенства частоты автоколебаний заданному значению добавим в (16) два уравнения, описывающие условие равенства нулю при $p = \pm j\omega_0$ мнимой и действительной частей полинома, представленного в правой части уравнения (12), и сформируем векторы h^-, h^+, определяющие диапазоны допустимых значений компонент вектора h. Требование (16) замещается условием

$$h^- \leq G\alpha \leq h^+. \tag{19}$$

Для поиска простых решений системы (19) будем использовать метод, изложенный в [10].

Для устойчивости автоколебаний в системе (1)–(5) необходимо, чтобы при положительном приращение амплитуды U^* размах колебаний убывал, а при отрицательном увеличивался, стремясь к значению U^*. Из представленного условия следует критерий устойчивости автоколебаний [6, с. 229], применяемый в методе гармонического баланса: характеристический полином ГЛС (12), при подстановке в него возмущенного значения K, соответствующего согласно (9) значению амплитуды $U^* + \Delta U^*$, $\Delta U^* > 0$, должен быть гурвицевым, а в случае $\Delta U^* < 0$ должен иметь корень с положительной вещественной частью. Указанный критерий устойчивости выражается формулой

$$\rho(h_s(p, U^* + \varepsilon)) < 0, \quad \rho(h_s(p, U^* - \varepsilon)) > 0, \tag{20}$$

где $\rho(\cdot)$ — максимальное значение действительной части корней (спектральный радиус) полинома, ε — малое положительное число. Более строгий критерий устойчивости автоколебаний [15, с. 227; 16, с. 238] состоит в выполнении условия

$$(\Psi_{Ru}/\Psi_{R\omega} - \Psi_{Iu}/\Psi_{I\omega})/(\Psi_{I\xi}/\Psi_{I\omega} - \Psi_{R\xi}/\Psi_{R\omega}) < \ 0, \tag{21}$$

в котором

$$\Psi_{Ru} = \partial \mathrm{Re}\left(h_s\left(\xi + j\omega_0, U^*\right)\right)/\partial U^*; \quad \Psi_{R\xi} = \partial \mathrm{Re}\left(h_s\left(\xi + j\omega_0, U^*\right)\right)/\partial \xi;$$
$$\delta\Psi_{R\omega} = \partial \mathrm{Re}\left(h_s\left(\xi + j\omega_0, U^*\right)\right)/\partial \omega_0;$$
$$\Psi_{Iu} = \partial \mathrm{Im}\left(h_s\left(\xi + j\omega_0, U^*\right)\right)/\partial U^*; \quad \Psi_{I\xi} = \partial \mathrm{Im}\left(h_s\left(\xi + j\omega_0, U^*\right)\right)/\partial \xi;$$
$$\delta\Psi_{I\omega} = \partial \mathrm{Im}\left(h_s\left(\xi + j\omega_0, U^*\right)\right)/\partial \omega_0,$$

все производные берутся при $\xi = 0$.

Решение рассматриваемой задачи выполняется в следующей последовательности. Согласно (13) находим полином $q_g(p)$. Находим $r(p)$ и $\ell(p)$, решая соответствующую максимальной структуре систему (16) либо (19) при помощи методов поиска простых решений систем уравнений и неравенств, предложенных в [10]. Из множества вариантов регуляторов, соответствующих найденным $q_g(p)$, $r(p)$, $\ell(p)$, исключаются те, которые не обеспечивают выполнение условий устойчивости (20), (21). Для оставшихся вариантов проводится проверка их приемлемости численными методами с использованием системы уравнений (1)–(5) (проверяется наличие автоколебаний с частотой ω_0 и амплитудой U^*, близкой к заданным значениям, а также близость реакции $y_1(t)$ на задающие воздействия системы (1)–(5) к реакции $y_L(t)$ на те же воздействия системы с ПФ $y_L(p)/g(p) = W^*(p)$). Регуляторы, успешно прошедшие указанную проверку, составляют искомое множество регуляторов с простой структурой.

4. Примеры

Пример 1. Решим задачу синтеза простых релейных регуляторов автоколебательной системы управления электроприводом. Объект управления, включающий в себя двигатель постоянного тока с неизменным потоком возбуждения, редуктор и инерционную нагрузку, описывается уравнениями (1)–(2), в которых

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C_m/J \\ 0 & -C_e/L & -R/L \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/k_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где R, L — сопротивление и индуктивность якорной обмотки двигателя; C_e, C_m — коэффициент противо ЭДС и коэффициент момента двигателя; k_r — коэффициент передачи редуктора; J — момент инерции подвижных частей, приведенный к валу двигателя. В международной системе единиц: $R = 0{,}475$; $L = 5{,}7 \cdot 10^{-4}$; $C_e = C_m = 6{,}83 \cdot 10^{-2}$; $k_r = 2$; $J = 9{,}43 \cdot 10^{-5}$. Вектор состояний $x = (x_1, x_2, x_3)$, где x_1 и x_2 — угловое положение и угловая скорость вращения вала двигателя, x_3 — ток в якорной обмотке. Вектор выходов $y = (y_1, y_2, y_3) = (x_1/k_r, x_2, x_3)$, в нем y_1 — угловое положение выходного вала электропривода является выходом синтезируемой системы. Управляющим воздействием u является напряжение на якорной обмотке, его амплитуда $U = 27$ В. Назначим $U^* = 4U/(100\pi)$, что согласно (9) соответствует значению $K = 100$. Полагаем $\mu = 0$.

Электропривод должен соответствовать следующим требованиям:

1) амплитуда ε автоколебаний регулируемой переменной y_1 должна быть не более 0,5 мрад;

2) при единичном ступенчатом воздействии $g_1(t)$ перерегулирование должно быть не более 15%, время переходного процесса — не более 0,075 с (время, после которого модуль ошибки регулирования не превышает 0,01 рад); установившееся значение $y_1(t)$ должно быть равно $1 \pm \varepsilon$;

3) при воздействии $g_2(t)$, возрастающем с постоянной скоростью 5 градусов в секунду, установившееся значение ошибки регулирования должна быть не более $1 + \varepsilon$ мрад.

Из анализа амплитудно-частотных характеристик объекта управления следует, что требование к амплитуде автоколебаний ($\varepsilon \leq 0{,}5$ мрад) обеспечивается, если частота автоколебаний $\omega_0 \geq 6 \cdot 10^3$ рад/с, поэтому принимаем $\omega_0 = 6 \cdot 10^3$ рад/с.

Заданные требования к точности отработки задающих воздействий $g_1(t)$, $g_2(t)$ выполняются, если реакция $y_1(t)$ привода на эти воздействия будет близкой к реакции $y_L(t)$ линейной системы, описываемой ПФ $W^*(p) = y_L(p)/g(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$, в которой $h_g^*(p) = 7{,}84 \cdot 10^{-3}p + 1$, $h_s^*(p) = p^3/\omega_s^3 + 1{,}44 \cdot 10^{-4}p^2 + 1{,}69 \cdot 10^{-2}p + 1$, $\omega_s = 118$. Корни $h_s^*(p)$: $(-118,\ 0 \cdot j)$, $(-59,\ \pm 102 \cdot j)$. Значения коэффициентов и степени полиномов $h_g^*(p)$, $h_s^*(p)$

выбраны из условия выполнения требований к точности отработки задающих воздействий, а также из условия минимизации значения ω_s, традиционно используемого при выборе желаемой ПФ [6, с. 99] с целью минимизации потребной полосы пропускания системы и, таким образом, потребной области частот полезных сигналов. Получено значение $\omega_s \ll \omega_0$. Степени полиномов $h_g^*(p)$, $h_s^*(p)$ последовательно наращивались начиная с единицы до значений, при которых удается выполнить все требования к системе. Степень полинома $h_s^*(p)$ обеспечивает совместность условий (17), (18). Допустимо отклонение ω_0 и U^* от заданных значений не более чем на $\pm 10\%$ и $\pm 15\%$. Среднеквадратическое отклонение $y_1(t)$ от $y_L(t)$ при воздействиях $g_1(t)$, $g_2(t)$ не должно превышать 1%. Завершив постановку задачи синтеза, приступим к ее решению.

Поскольку $\deg(h_s^*(p)) = 3$, то из (17) находим $\sigma = 2$.

Из (1), (2) получаем уравнение (6), в котором

$$\begin{aligned}&a(p) = p^3/Q + R/(LQ)p^2 + C_e p, \quad b(p) = (1/k_r, p, p^2/(LQ)),\\ &\text{где} \quad Q = C_m/(JL).\end{aligned}$$

Из равенства $h_g^*(p) = h_g'(p) b_1(p)$ следует:

$$h_g'(p) = h_g^*(p) k_r = \left(7{,}84 \cdot 10^{-3} p + 1\right) \cdot 2.$$

Согласно (13) находим: $q_g(p) = h_g'(p)/K = 15{,}68 \cdot 10^{-5} p + 2 \cdot 10^{-2}$.

Значения $r(p)$ и $\ell(p)$ найдем, решив систему (16), соответствующую максимальной структуре регулятора с $\sigma = 2$. В ней вектор неизвестных будет $\alpha = (\ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{12},\ \ell_{20}, \ell_{21}, \ell_{22},\ \ell_{30}, \ell_{31}, \ell_{32},\ r_0, r_1, r_2)^\top$, где ℓ_{ki} — коэффициент при сомножителе p^i в полиноме $\ell_k(p)$, являющимся k-й компонентой вектора $\ell(p)$; r_0, r_1, r_2 — коэффициенты полинома $r(p)$. Ее матрица

$$G = \begin{pmatrix} \frac{K}{k_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{k_r} & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{k_r} & 0 & K & 0 & \frac{K}{(LQ)} & 0 & 0 & \frac{R}{(LQ)} & C_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 & \frac{K}{(LQ)} & 0 & 1/Q & \frac{R}{(LQ)} & C_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{(LQ)} & 0 & \frac{1}{Q} & \frac{R}{(LQ)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Q} \end{pmatrix}.$$

Вектор ее правой части

$$h = \left(1,\ 1{,}69 \cdot 10^{-2},\ 1{,}44 \cdot 10^{-4},\ 6{,}00 \cdot 10^{-7}\ , 3{,}83 \cdot 10^{-12},\ 1{,}62 \cdot 10^{-14}\right)$$

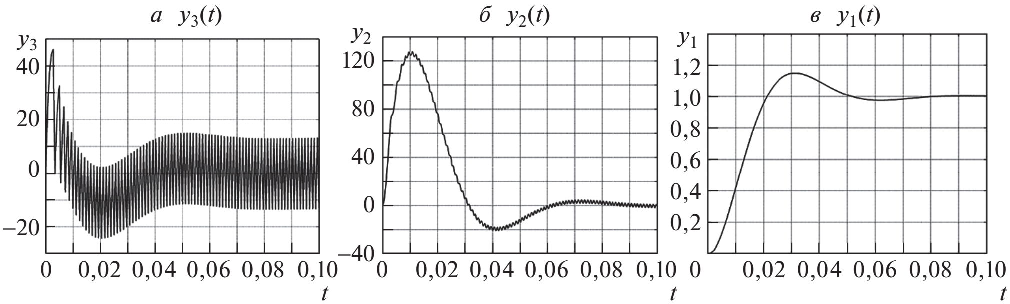

Рис. 1. Графики реакции системы (1)–(5) с регулятором № 1(табл. 1) на единичное ступенчатое воздействие.

составлен из коэффициентов полинома $h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1)$. Система (16) имеет не единственное решение, поскольку в ней $\mathrm{rank}\,(G) = \mathrm{rank}\,(G|h) = 6 < \dim(\alpha) = 12$. Согласно [10] находим простые решения системы (16), определяющие $r(p)$, $\ell(p)$. Им соответствует $h_s(p)$, имеющий корни $(0,\ \pm 6000\cdot j)$, $(-118,\ 0\cdot j)$, $(-59,\ \pm 102\cdot j)$, удовлетворяющие условию существования автоколебаний с частотой $\omega_0 = 6000$ рад/с. Найденные полиномы $q_g(p)$, $r(p)$, $\ell_k(p)$, $k = 1, \ldots, 3$ определяют варианты регуляторов, для которых проводим проверку условий устойчивости (20), (21) и проверку соответствия системы (1)–(5) назначенным требованиям. Уравнения линейной части регуляторов с простой структурой, успешно прошедших указанные проверки, представлены в табл. 1.

На рис. 1 представлены графики реакции системы (1)–(5) с релейным регулятором, линейная часть которого описывается уравнением, представленным вариантом № 1 в табл. 1, на единичное ступенчатое воздействие. Для указанного варианта отклонение параметров ω_0 и U^* от заданных значений составляет -9 и $+15\%$, среднеквадратическое отклонение $y_1(t)$ от $y_L(t)$ при отработке воздействий $g_1(t)$, $g_2(t)$ не превышает 0,3%, графики реакций $y_1(t)$, $y_L(t)$ на единичное ступенчатое воздействие в данном случае визуально неразличимы.

Пример 2. Допустим возможность ослабления требования минимизации потребной полосы пропускания системы в задаче примера 1, заменив равен-

Таблица 1

№	Уравнение линейной части регулятора
1	$r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{11}p + \ell_{12}p^2)y_1 - \ell_{22}p^2y_2 - \ell_{32}p^2y_3$
2	$r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{11}p)y_1 - (\ell_{21}p + \ell_{22}p^2)y_2 - \ell_{32}p^2y_3$
3	$r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{11}p)y_1 - (\ell_{30} + \ell_{31}p + \ell_{32}p^2)y_3$
4	$r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{11}p)y_1 - \ell_{21}py_2 - (\ell_{31}p + \ell_{32}p^2)y_3$
5	$r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{11}p + \ell_{12}p^2)y_1 - (\ell_{31}p + \ell_{32}p^2)y_3$
6	$r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - \ell_{10}y_1 - (\ell_{20} + \ell_{21}p + \ell_{22}p^2)y_2 - \ell_{32}p^2y_3$

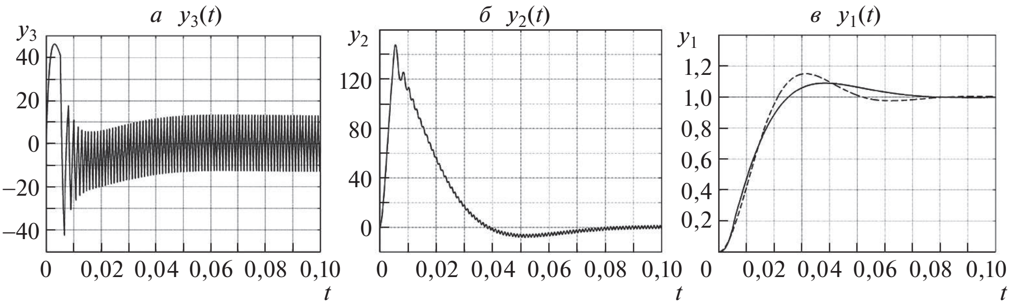

Рис. 2. Графики реакции системы (1)–(5) с регулятором № 1(табл. 2) на единичное ступенчатое воздействие, на рис. 2,*в* пунктиром показан график реакции $y_L(t)$ на единичное ступенчатое воздействие системы с ПФ $W^*(p)$.

ство $\omega_s = 118$ условием $118 \leq \omega_s \leq 700$, что эквивалентно условию $3 \cdot 10^{-9} \leq \leq h^*_{s3} \leq 6 \cdot 10^{-7}$. Требования к остальным коэффициентам $h^*_s(p)$ остаются неизменными, в таком случае полином $h^*_s(p)$ остается гурвицевым, система с ПФ $W^*(p)$ отрабатывает контрольные воздействия с заданной точностью. Увеличим до 5% допустимое среднеквадратическое отклонение $y_1(t)$ от $y_L(t)$ при отработке контрольных воздействий системой (1)–(5). В данном случае система уравнений (16) замещается неравенствами (19). Согласно [10] находим простые решения системы (19), определяющие $r(p)$, $\ell(p)$. Им соответствует $h_s(p)$, имеющий корни $(0,\ \pm 6000 \cdot j)$, $(-5{,}3 \cdot 10^4,\ 0 \cdot j)$, $(-59,\ \pm 61 \cdot j)$, удовлетворяющие необходимому условию существования автоколебаний с частотой $\omega_0 = 6000$ рад/с. Полиномы $q_g(p)$, $r(p)$, $\ell_k(p)$, $k = 1, \ldots, 3$ определяют варианты регуляторов, для которых проводим проверку условий устойчивости (20), (21) и проверку соответствия системы (1)–(5) назначенным требованиям. Уравнения линейной части регуляторов с простой структурой, успешно прошедших указанные проверки, представлены в табл. 2.

Из сопоставления табл. 1 и 2 следует, что результатом расширения диапазона допустимых значений h_{s3} явилось сокращение на единицу числа коэффициентов в уравнении регулятора.

На рис. 2 представлены графики реакции системы (1)–(5) с релейным регулятором, линейная часть которого описывается уравнением, представленным вариантом № 1 в табл. 2, на единичное ступенчатое воздействие. Для указанного варианта отклонение параметров ω_0 и U^* от заданных значений

Таблица 2

№	Уравнение линейной части регулятора
1	$r_1p + r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{11}p + \ell_{12}p^2)y_1$
2	$r_1p + r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{11}p)y_1 - \ell_{21}py_2$
3	$r_1p + r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - (\ell_{10} + \ell_{12}p^2)y_1 - \ell_{20}py_2$
4	$r_1p + r_2p^2u^* = (q_{g0} + q_{g1}p)g - \ell_{10}y_1 - (\ell_{20} + \ell_{21}p^2)y_2$

составляет -5 и $+12\%$, среднеквадратическое отклонение $y_1(t)$ от $y_L(t)$ при отработке воздействий $g_1(t)$, $g_2(t)$ не превышает 4,5%.

5. Заключение

В статье предложен новый подход к синтезу релейных регуляторов с простой структурой в составе автоколебательной системы с линейным объектом управления, позволяющий автоматически находить структуры релейных регуляторов, обеспечивающие решение задачи синтеза и не обладающие избыточностью. При этом производится исчерпывающий анализ возможных вариантов структур. Процедура синтеза сводится в основном к решению систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, что позволяет использовать эффективные методы линейной алгебры, которые гарантируют нахождение точного решения поставленной задачи и не требуют задания начальных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
2. *Фалдин Н.В.* Релейные системы автоматического управления // Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ. 2004.
3. *Boiko I.* Discontinuous Control Systems. Boston: Birkhauser, 2009.
4. *Boiko I.M., Kuznetsov N.V., Mokaev R.N., Akimova E.D.* On asymmetric periodic solutions in relay feedback systems // J. Franklin Institut. 2021. V. 358. (1). P. 363–383.
5. *Попов Е.П., Пальтов И.П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1960.
6. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1975.
7. *Леонов Г.А.* О методе гармонической линеаризации // АиТ. 2009. № 5. С. 65–75.

   Leonov G.A. On the method of harmonic linearization // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 5. P. 800–810.
8. *Руднев С.А., Фалдин Н.В.* О расширении области применимости условий устойчивости релейных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 5. С. 193–196.
9. *Фалдин Н.В., Руднев С.А.* Синтез релейных систем методом фазового годографа // Изв. Вузов. Приборостроение. 1982. № 7. С. 32–36.
10. *Мозжечков В.А.* Синтез линейных регуляторов с простой структурой // АиТ. 2003. № 1. С. 27–41.

    Mozzhechkov V.A. Design of Simple-Structure Linear Controllers // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 1. P. 23–36.
11. *Гайдук А.Р.* Синтез систем автоматического управления по передаточным функциям // АиТ. 1980. № 1. С. 11–16.

    Gajduk A.R. Design of control systems from transfer functions // Autom. Remote Control. 1980. V. 41. No. 1. P. 6–11.

12. *Гайдук А.Р.* О синтезе систем управления при заданной форме воздействий // АиТ. 1984. № 6. С. 13–20.

    Gajduk A.R. On design of control systems with a specified form of exogenous signals // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 6. P. 692–699.

13. *Гайдук А.Р.* Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // АиТ. 1990. № 5. С. 29–37.

    Gajduk A.R. Choice of feedbacks in a control system of minimal complexity // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 5. P. 593–600.

14. *Воевода А.А., Чехонадских А.В.* Оптимизация расположения полюсов системы управления с регулятором пониженного порядка // Автометрия. 2009. Т. 4. № 5. С. 113–123.

15. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1971.

16. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. М.: Высшая школа, 2001.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 16.11.2021

После доработки 25.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022