Автоматика и телемеханика, № 9, 2022

Нелинейные системы

© 2022 г. **В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ОБРАТИМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматриваются обратимые механические системы, обладающие свойством пространственно-временной симметрии и выделяющиеся линейным преобразованием фазового пространства. Предполагается, что система допускает невырожденное симметричное периодическое движение. Решается задача стабилизации колебания управляемой обратимой механической системы. Находятся управления, строится притягивающий цикл. Приводится пример.

Ключевые слова: обратимая механическая система, симметричное периодическое движение, семейство, управление, притягивающий цикл, естественная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231022090057, **EDN:** AIPBRB

1. Введение

Для гамильтоновой системы на плоскости Л.С. Понтрягин доказал [1] теорему, обеспечивающую существование предельного цикла: в систему вводятся малые автономные негамильтоновые слагаемые. Этот результат в [2] интерпретируется как естественное решение задачи стабилизации колебания путем использования малого гладкого автономного управления. Особенность постановки задачи стабилизации заключается в том, что стабилизируется не колебание исходной системы, а близкое ему колебание управляемой системы, что, однако, достаточно для приложений.

В подходе к решению задачи стабилизации выбранного колебания динамической системы путем конструирования асимптотически орбитально устойчивого цикла меняются свойства модели. Идея естественной коррекции модели, уже с выбранным явно управлением, ранее была (см. [2]) реализована в уравнении Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x},$$

в котором управлением $\mu(1 - x^2)\dot{x}$ корректируется линейный осциллятор, что приводит к притягивающему циклу управляемой системы.

Подход Понтрягина в [2] разрабатывался для отдельной системы общего вида, множества динамических систем, а также динамической модели, содержащей слабо связанные подсистемы (МССП). При этом для МССП устанавливается принципиальная возможность решения задачи стабилизации колебания выбором надлежащих связей между подсистемами. В этом подходе корректируются связи между подсистемами. В результате получается естественное решение задачи стабилизации без применения иных управлений. В [2] построено управление для стабилизации колебаний консервативной системы с одной степенью свободы: для линейного осциллятора таким образом получается уравнение Ван Дер Поля.

В осцилляторе Ван дер Поля управление дается нелинейной силой — диссипацией, действующей в каждой текущей точке траектории: управление реализуется в контуре с триодом в мягком режиме его функционирования [3, с. 63]. В [4, 5] показано, что сила носит универсальный характер, доставляя универсальное управление для стабилизации колебания механической системы.

Постановки задачи управления колебаниями отличаются целями. Задачи решаются разными методами (см., например, [6–10]). Как правило, применяются управления, зависящие явно от времени. В подходе Понтрягина стабилизация достигается путем конструирования притягивающего цикла — орбитально асимптотического устойчивого изолированного периодического решения управляемой автономной системы. Автономное управление действует с малым коэффициентом усиления сигнала генератора. Найденным в [4] управлением достигается, к примеру, устойчивый колебательный режим маятника с желаемой энергией. В данной статье результаты [4] обобщаются на обратимую механическую систему.

Обратимые системы обладают фундаментальным свойством пространственно-временной симметрии (см. [11]). В частности, они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обратимые механические системы выделяются симметрией фазового пространства относительно линейного преобразования. К ним относятся основные модели аналитической механики: уравнения Лагранжа второго рода с позиционными силами, уравнения Воронца для неголомонной системы, уравнения в квазикоординатах, задача трех тел, задача о вращении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и др. В общем случае система не консервативна.

2. Обратимая механическая система

Обратимая механическая система записывается в виде

$$\begin{aligned} &\dot{u} = U(u,v), \quad \dot{v} = V(u,v), \\ &U(u,-v) = -U(u,v), \quad V(u,-v) = V(u,v), \\ &u \in \mathrm{R}^l, \quad v \in \mathrm{R}^n, \quad l \geqslant n. \end{aligned} \tag{1}$$

В моделях аналитической механики за u обычно принимается вектор обобщенных координат (квазикоординат), а за v — вектор обобщенных скоростей (квазискоростей). Исследуется гладкая система (1).

Для системы (1) вводится неподвижное множество $M = \{u, v : v = 0\}$. Фазовое пространство системы симметрично относительно множества M. Поэтому траектории, пересекающие M, будут симметричными относительно M. Траектории, дважды пересекающие M, называются симметричными периодическими движениями (СПД). На них $u(t) = u(-t),\ v(t) = -v(-t)$.

Симметричное решение $v = v(u_1^0, \dots, u_l^0, t)$ зависит только от начальной точки u^0 на неподвижном множестве M. Поэтому необходимые и достаточные условия существования СПД периода T даются равенствами

$$v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2; \quad s = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Условия (2) приводят к n равенствам, полученным при $\tau = T/2$. Пусть система (2) допускает решение

$$u_1^0 = u_1^*, \dots, u_l^0 = u_l^*, \quad T = T^*. \tag{3}$$

Тогда формируется матрица

$$A(u^0, T/2) = ||a_{sj}|| = \left\| \frac{\partial v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, T/2)}{\partial u_j^0} \right\|,$$

в которой частные производные вычисляются для значений (3). В [12] вводится понятие.

Определение 1. Случай $\operatorname{rank} A(u^0, T/2) = n$ *называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД — невырожденным.*

Семейство СПД является k-параметрическим, $k \geqslant l - n + 1$. Для семейства невырожденных СПД: $k = (l - n + 1)$. Невырожденное СПД продолжается по T в фазовом пространстве на глобальное семейство Σ невырожденных СПД размерности k (см. [13]), причем продолжение происходит в направлениях увеличения и уменьшения периода. Сам период $T(\hat{h})$ на Σ меняется монотонно с параметром $\hat{h}$ (закон зависимости периода СПД от одного параметра, см. [12]). Для системы (1), содержащей параметры, семейство Σ продолжается по параметрам: Σ устойчиво относительно параметрических возмущений системы [12, разд. 3, свойство 2]. Семейство Σ заполняет инвариантное многообразие $\hat{\Sigma}$.

Замечание 1. Для обратимой механической системы (1) с первыми интегралами семейство невырожденных СПД может принадлежать интегральным поверхностям, образуя при этом в системе семейство размерности $k > (l - n + 1)$ при $l = n > 1$ (см. [13]).

Отметим, что отклонения Δ_u, Δ_v от СПД описываются системой уравнений, инвариантной относительно преобразования

$$(\Delta_u, \Delta_v, t) \to (\Delta_u, -\Delta_v, -t).$$

3. Редукция системы на многообразие $\hat{\Sigma}$

На многообразии $\hat{\Sigma}$ семейство Σ описывается редуцированной обратимой механической системой.

Лемма 1. На многообразии $\hat{\Sigma}$ семейство Σ описывается редуцированной обратимой механической системой вида (1)*, в которой $u \in \mathrm{R}^k$, $k = l - n + 1$, а $v \in \mathrm{R}$.*

Доказательство. Из равенств (2), как следствие, при $\tau = T/2$ получаются линейные равенства

$$\xi_s \equiv a_{s1}(u^0, \tau) du_1^0 + \ldots + a_{sl}(u^0, \tau) du_l^0 + b_s(u^0, \tau) d\tau = 0,$$
$$b_s = \partial v_s(u^0, \tau)/\partial t; \; s = 1, \ldots, n,$$

выполняющиеся на $\tilde{\Sigma}$. Для семейства Σ справедливо условие $\operatorname{rank} A = n$, поэтому линейным преобразованием $\eta = P\xi$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с постоянной матрицей P в векторной форме η выделяется форма η_1: формы $\eta_2, \ldots, \eta_n$ тождественно равны нулю. Преобразование справедливо для любой точки (q^0, τ), поэтому выделение происходит на всем $\tilde{\Sigma}$. В силу существования в (1) семейства Σ размерности k на $\hat{\Sigma}$ оно описывается обратимой механической системой вида (1) с векторами $u \in \mathrm{R}^k$ и $v \in \mathrm{R}$.

Следствие 1. В консервативной системе семейство Σ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

В самом деле, в консервативной системе $l = n$, поэтому в редуцированной системе $l = n = 1$; сами траектории остаются траекториями консервативной системы. Результат установлен ранее.

Замечание 2. Для обратимой механической системы (1) с первыми интегралами редуцированная система выделяется на уровне постоянной интеграла.

Согласно лемме 1 редуцированная система описывается обратимой механической системой вида (1), в которой $u \in \mathrm{R}^k$, $v \in \mathrm{R}$. Эта система допускает k-параметрическое семейство T-периодических СПД по параметру $h = (h_1, \ldots, h_k)$. Для невырожденного СПД период зависит только от одного параметра [12]. Без ограничения общности принимается, что период $T(\hat{h})$ является функцией переменной $\hat{h} = h_k$. Семейство невырожденных СПД редуцированной системы дается формулами

$$\begin{aligned} &u_1 = \varphi_1(h, t), \ldots, u_k = \varphi_k(h, t), \; v = \psi(h, t), \\ &\varphi_s(h, -t) = \varphi_s(h, t), \; \psi(h, t) = -\psi(h, t), \; s = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{4}$$

Поэтому система уравнений в вариациях обладает системой из k периодических решений

$$\begin{aligned}\delta u_s^{(j)}(h,t) &= \frac{\partial\varphi_s(h,t)}{\partial h_j}, \quad \delta v^{(j)}(h,t) = \frac{\partial\psi(h,t)}{\partial h_j}, \quad j=1,\dots,k-1,\\ \delta u_s^{(k)}(h,t) &= \dot u_s(h,t), \quad \delta v^{(k)}(h,t) = \dot v(h,t).\end{aligned} \tag{5}$$

4. Условия существования цикла на $\hat\Sigma$

На $\hat\Sigma$ рассматривается управляемая обратимая механическая система

$$\dot u_s = U_s(u,v) + \bar F_s, \quad \dot v = V(u,v) + \bar G, \quad s=1,\dots,k. \tag{6}$$

Предполагается, что при $\bar F \equiv 0$, $\bar G \equiv 0$ система (6) допускает k-семейство невырожденных СПД (4). Система (6) исследуется в окрестности решения (4), отвечающего значению параметра $h = h^*$. Ставится задача нахождения гладких управлений

$$\bar F = \varepsilon F, \quad F = (F_1,\dots,F_k), \quad \bar G = \varepsilon G \tag{7}$$

с малым коэффициентом ε усиления регулятора таких, чтобы система (6) допускала притягивающий цикл, близкий к СПД с $h = h^*$: $T^* = T(h^*)$.

В ε-окрестности СПД с $h = h^*$ записывается линейная неоднородная система уравнений, полученная из (6):

$$\begin{aligned}\delta\dot u_s &= \sum_{j=1}^k a_{sj}^-(h^*,t)\delta u_j + a_s^+(h^*,t)\delta v + F_s,\\ \delta\dot v &= \sum_{j=1}^k b_j^+(h^*,t)\delta u_j + b^-(h^*,t)\delta v + G, \quad s=1,\dots,k.\end{aligned} \tag{8}$$

В (8) через $(\cdot)^+(t)$ и $(\cdot)^-(t)$ обозначаются четные и нечетные T^*-периодические функции. Система в вариациях для СПД будет однородной частью системы (8). Вследствие инвариантности системы (1) относительно преобразования $(u,v,t) \to (u,-v,-t)$ и симметричности СПД эта система будет инвариантной относительно преобразования $(\delta u, \delta v, t) \to (\delta u, -\delta v, -t)$.

Для краткости записи далее используются матричные и векторные обозначения

$$a^- = ||a_{sj}^-||, \quad a^+ = (a_1^+,\dots,a_k^+)^T, \quad b^+ = (b_1^+,\dots,b_k^+), \quad f_+ = ||f_{sj}^+||.$$

В них верхний или нижний символы $+$ и $(-)$ означают четную (нечетную) функцию переменной t: матрица f_+ вводится ниже. Применяется преобразование

$$\delta u = f_+(h^*,t)\xi, \quad f_+(h^*,t) \neq 0, \quad \dot f_+(h^*,t) = a^-(h^*,t),$$

в котором в силу нечетности функций в матрице $a^-(h^*,t)$ матрица $f_+(h^*,t)$ находится с точностью до постоянной матрицы f_c. Тем самым невырожденность матрицы $f_+(h^*,t)$ при любом t гарантируется выбором f_c. В результате получается

$$\dot\xi = a^+(h^*,t)\, f_+^{-1}(h^*,t)\delta v + f_+^{-1}(h^*,t)F,$$
$$\delta\dot v = b^+(h^*,t)\, f_+(h^*,t)\,\xi + b^-(h^*,t)\,\delta v + G.$$

Вторым преобразованием

$$\delta v = g_+(h^*,t)\eta, \quad g_+(h^*,t)\neq 0, \quad \dot g_+(h^*,t) = b^-(h^*,t),$$

в котором $g_+(h^*,t)$ выбирается так же, как ранее $f_+(h^*,t)$, уравнения (8) приводятся к виду

$$\begin{aligned}\dot\xi &= a^+(h^*,t)f_+^{-1}(h^*,t)g_+(h^*,t)\eta + f_+^{-1}(h^*,t)F,\ \xi\in \mathrm{R}^k,\\ \dot\eta &= b^+(t)f_+(h^*,t)g_+^{-1}(h^*,t)\xi + g_+^{-1}(h^*,t)G,\ \eta\in\mathrm{R}.\end{aligned} \tag{9}$$

Система

$$\begin{aligned}\dot z &= -b^+(t)f_+(h^*,t)g_+^{-1}(h^*,t)w, \quad z\in\mathrm{R},\\ \dot w &= -a^+(t)f_+^{-1}(h^*,t)g_+(h^*,t)z, \quad w\in\mathrm{R}^k,\end{aligned} \tag{10}$$

сопряженная к однородной части системы (9), не меняет вида при преобразовании $(z,w,t)\to(\pm z,\mp w,-t)$. Поэтому ее T^*-периодические решения $(z^{(j)}(h^*,t),\ w^{(j)}(h^*,t))$ общим числом k обладают свойством четности и нечетности:

$$z^{(j)}(h^*,-t) = \pm z^{(j)}(h^*,t), \quad w^{(j)}(h^*,-t) = \mp w^{(j)}(h^*,t).$$

В переменных $\xi=w$, $\eta=-z$ уравнения (9) совпадают с уравнениями (10), если $F\equiv 0$, $G\equiv 0$. Следовательно, сопряженная система (10) имеет k периодических решений

$$z^{(j)}(h^*,t) = -g_+^{-1}(h^*,t)\frac{\partial\psi(h^*,t)}{\partial h_j}, \quad w^{(j)}(h^*,t) = f_+^{-1}(h^*,t)\frac{\partial\varphi(h^*,t)}{\partial h_j},$$
$$j=1,\dots,k-1,$$
$$z^{(k)}(h^*,t) = -g_+^{-1}(h^*,t)\dot\psi_k(h^*,t), \quad w^{(k)}(h^*,t) = f_+^{-1}(h^*,t)\dot\varphi_k(h^*,t).$$

Выражениями

$$x_j = \eta z^{(j)}(h^*,t) + \xi w^{(j)}(h^*,t), \quad j=1,\dots,k \tag{11}$$

даются первые интегралы уравнений в вариациях. Поэтому для неоднородной системы (8) получается

$$\dot x_j = g_+^{-1}(h^*,t)Gz^{(j)}(h^*,t) + f_+^{-1}(h^*,t)Fw^{(j)}(h^*,t), \quad j=1,\dots,k. \tag{12}$$

Из формул (11) видно, что при $(\xi,\eta)\to(\xi,-\eta)$ переменные x_j не меняют знаки. Поэтому этими переменными, дополненными переменной y (формула для y приводится в разд. 6), однородная часть системы (9) преобразовывается к виду, сохраняющему обратимость системы.

Выполненные преобразования справедливы для произвольного значения параметра h. С учетом этого обстоятельства записываются необходимые и достаточные условия

$$
(13)\quad I_j(h)\equiv\int\limits_0^{T^*}\Big[g_+^{-1}(h,t)Gz^{(j)}(h,t)+f_+^{-1}(h,t)Fw^{(j)}(h,t)\Big]\,dt=0,\ j=1,\dots,k
$$

существования изолированного T^*-периодического решения в системе (9). При этом управления $F(u,v)$ и $G(u,v)$ вычисляются на СПД, выделенного параметром h.

Лемма 2. Необходимым условием существования цикла в управляемой обратимой механической системе будут равенства (13).

Доказательство. В самом деле, равенствами (13) доставляются необходимые и достаточные условия существования T-периодического решения в первом по ε приближении, что означает необходимые условия существования такого решения в системе (6). Так как цикл есть изолированное периодическое решение автономной системы (6), то (13) необходимо выполняются для цикла.

Система (13) состоит из k уравнений с k неизвестными $h_1,\dots,h_k$. Достаточное условие существования цикла дается теоремой 1.

Теорема 1. Достаточное условие существования в системе (6) *цикла, ε-близкого к СПД* (4) *с параметром $h=h^*$, дается неравенством*

$$
(14)\qquad \det\mathrm{G}\neq 0,\quad \mathrm{G}=\left\|\frac{\partial I_j(h^*)}{\partial h_i}\right\|.
$$

Если все собственные значения матрицы G *принадлежат левой полуплоскости, то цикл — притягивающий.*

Доказательство. Для системы (6) в окрестности решения (4) с $h=h^*$ строится отображение $t:0\to T$ на периоде T^*. Далее применяется стандартная техника для гладкого отображения. Тогда условие (14) гарантирует существование единственной неподвижной точки отображения. Для собственных значений матрицы G, принадлежащих левой полуплоскости, цикл становится притягивающим.

5. Случай $l=n$

Для обратимой механической системы с размерностями $l=n$ число $k=1$. Такими будут уравнения Лагранжа второго рода для голономной механической системы, подверженной действию позиционных сил, а также уравнения в квазикоординатах. Редуцированная система описывается на плоскости системой (1), в которой $l = n = 1$. Она допускает однопараметрическое по $\hat{h}$ семейство СПД

$$u = \varphi(\hat{h}, t), \quad v = \psi(\hat{h}, t). \tag{15}$$

Семейству СПД отвечает семейство периодических решений уравнений в вариациях, которая получается из системы

$$\dot{\delta u} = a^{-}(\hat{h}, t)\delta u + a^{+}(\hat{h}, t)\delta v + F, \quad \dot{\delta v} = b^{+}(\hat{h}, t)\delta u + b^{-}(\hat{h}, t)\delta v + G \tag{16}$$

при $F \equiv 0$, $G \equiv 0$. Эти уравнения служат для нахождения необходимых и достаточных условий притягивающего цикла, которые даются первым приближением уравнений движения, составленных в окрестности выделенного СПД семейства (15).

Уравнениям в вариациях отвечает сопряженная система

$$\dot{z} = -a^{-}(\hat{h}, t)z - b^{+}(\hat{h}, t)w, \quad \dot{w} = -a^{+}(\hat{h}, t)z - b^{-}(\hat{h}, t)w.$$

При этом решению уравнений в вариациях

$$\delta u = \dot{\varphi}(\hat{h}, t), \quad \delta v = \dot{\psi}(\hat{h}, t)$$

отвечает решение

$$z = -g_{+}^{-1}(\hat{h}, t)\dot{\psi}(\hat{h}, t), \quad \delta w = f_{+}^{-1}(\hat{h}, t)\dot{\varphi}(\hat{h}, t)$$

сопряженной системы. Поэтому необходимые и достаточные условия существования T-периодического решения в системе (16) сводятся к равенству

$$I(\hat{h}) \equiv \int\limits_0^T \left[-g_{+}^{-1}(\hat{h}, t)G\dot{\psi}(\hat{h}, t) + f_{+}^{-1}(\hat{h}, t)F\dot{\varphi}(\hat{h}, t)\right] dt = 0, \tag{17}$$

в котором согласно формулам перехода

$$f_{+}(\hat{h}, t) = \int a^{-}(\hat{h}, t)dt, \quad g_{+}(\hat{h}, t) = \int b^{-}(\hat{h}, t)dt.$$

В системе (16) одна из пар (F, G) управлений

$$\left(\sigma(1 - Ku^2)\hat{V}, 0\right), \quad \left(0, \sigma(1 - Ku^2)\hat{U}, 0)\right),$$

с функциями $\hat{U}(u, v), \hat{V}(u, v)$ и постоянной K вполне решает задачу существования притягивающего цикла; число σ равно $+1$ или (-1). Тем не менее, следуя (5), в первой паре рассматривается конкретная функция

$$F = \sigma(1 - Ku^2)\hat{V} = \sigma(1 - Ku^2)\dot{u} = \sigma(1 - Ku^2)U(u, v).$$

Тогда получается амплитудное уравнение

$$\int\limits_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h},t)\left[1-K\varphi^2(\hat{h},t)\right]\dot{\varphi}^2(\hat{h},t)dt=0.$$

Отсюда выводится формула

$$K=\frac{\int\limits_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h}^*,t)\dot{\varphi}^2(\hat{h}^*,t)dt}{\int\limits_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h}^*,t)\varphi^2(\hat{h}^*,t)\dot{\varphi}^2(\hat{h}^*,t)dt}$$

для вычисления числа $K(\hat{h}^*)$. При этом задается функция $K(\hat{h})$, а производная для функции $I(\hat{h})$ в точке $\hat{h}^*$ дается формулой

$$\frac{dI(\hat{h}^*)}{dh}=\sigma\frac{dK(\hat{h}^*)}{dh}\int\limits_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h}^*,t)\varphi^2(\hat{h}^*,t)\dot{\varphi}^2(h^*,t)dt.$$

В результате справедлива теорема 2.

Т е о р е м а 2. *Для обратимой механической системы* (1) *с размерностями $l=n$ в любой точке $\hat{h}=\hat{h}^*$ семейства СПД, в которой $dK(\hat{h}^*)/dh\neq 0$, строится управляемая система с $K=K(\hat{h}^*)$, допускающая притягивающий цикл.*

З а м е ч а н и е 3. Число σ выбирается противоположным по знаку производной $dK(\hat{h}^*)/dh$.

З а м е ч а н и е 4. Для обратимой механической системы с одной степенью свободы результат впервые анонсирован в [2]: в [2] применялось управление, в котором $F=0$, $G=\sigma(1-Ku^2)V(u,v)$.

З а м е ч а н и е 5. С учетом возможности приведения системы в вариациях на многообразиии $\hat{\Sigma}$ к виду (9) теоремой 2 обосновывается использование на $\hat{\Sigma}$ управляемой системы (6) в исходных переменных.

6. Выбор управления

В первой группе из $k-1$ уравнений системы (13) функция $z^{(j)}$ — нечетная, а функция $w^{(j)}$ — четная. В последнем уравнении $z^{(j)}$ — четная, а функция $w^{(j)}$ — нечетная. На решении (4) функции F и G становятся T-периодическими. Поэтому при $k>1$ условия (13) не могут выполняться, если $F\equiv 0$. При четной функции G первые слагаемые в интегралах I_j, $j=1,\dots,k-1$ равны нулю. Поэтому F_j — четные функции, для $j=1,\dots,k-1$. В интеграле I_k функция G — четная (или равна) нулю, а функция F_k будет нечетной (или равной нулю).

Согласно проведенному анализу в системе амплитудных уравнений (13) полагается $G \equiv 0$. Также используются функции

$$
\begin{aligned}
&F_s = \sigma_s \left(1 - K_s ||u||^2\right) \hat{U}_s(u,v), \quad F_k = \sigma_k \left(1 - K_k ||u||^2\right) \hat{V}(u,v),\\
&\hat{U}_s(u,v) = \hat{U}_s(u,-v), \quad \hat{V}(u,v) = -\hat{V}(u,-v),\\
&||u||^2 = \sum_{i=1}^{k} u_i^2,\ K_s = \text{const}, \quad s = 1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Ими дается обобщение предложенного в [4] универсального управления для обратимой механической системы: числа σ_s принимают значение $+1$ или (-1).

Лемма 3. Для СПД с параметром $h = h^*$ набор чисел $(K_1,\dots,K_k)$ существует.

Доказательство. Вводится обозначение: $f_+^{-1}(h,t) = ||{c^+}_{is}(h,t)||$. Тогда для $T^* = T(h^*)$-периодического решения условия (13) с функциями (18) записываются в виде системы амплитудных уравнений

$$
\begin{aligned}
I_j(h) \equiv \int_0^{T^*} \sum_{s=1}^{k-1} \sigma_s {c^+}_{js}(h,t) \left[1 - K_s ||\varphi(h,t)||^2\right] \hat{U}_s(h,t) w^{(j)}(h,t) dt +\\
+ \int_0^{T^*} \sigma_k {c^+}_{jk}(h,t) \left[1 - K_k ||\varphi(h,t)||^2\right] \hat{V}(h,t) w^{(k)}(h,t) dt = 0, \quad j = 1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Тогда числа K_s находятся из условия совместности системы линейных уравнений (19) при $h = h^*$.

Подынтегральные функции в (19) — четные. При каждом значении t ранг подынтегральной расширенной матрицы равен рангу подынтегральной основной матрицы. При разложении элементов матрицы — четных функций, в ряды Фурье, такое равенство сохраняется для матриц из средних значений функций на периоде. Следовательно, система линейных уравнений (19) с неизвестными $K_1,\dots,K_k$ имеет решение.

Замечание 6. С набором чисел $(K_1,\dots,K_k)$ система амплитудных уравнений (13) имеет корень $h = h^*$.

Числа K_s находятся для значения параметра $h = h^*$. При изменении h получаются функции $K_s(h)$. Числами $K_s(h^*)$ гарантируется выполнение необходимых условий существования цикла. По теореме 1 задача конструирования притягивающего цикл в управляемой обратимой механической системе (6) завершается выбором функций $\hat{U}_s, \hat{V}$.

Нахождение функций $K_s(h)$ в общем виде представляет собой отдельную задачу, сложность которой увеличивается с ростом размерности $k > 1$. Поэтому в качестве альтернативы предлагается подход, использующий управления (18), основанный на приведении уравнений в вариациях к системе с постоянными коэффициентами. При этом само преобразование дается формулами (12), дополненными выражением для переменной y

$$y = \eta\dot{\psi}(h,t) + \xi\dot{\varphi}(h,t). \tag{20}$$

В результате из (8) получается система

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= g_+^{-1}\bar{G}z^{(j)}(h,t) + f_+^{-1}(h,t)Fw^{(j)}(h,t), \quad j = 1,\ldots,k, \\ \dot{y} &= x_k + g_+^{-1}\bar{G}\dot{\psi}(h,t) + f_+^{-1}(h,t)F\dot{\varphi}(h,t). \end{aligned} \tag{21}$$

Далее используются функции

$$\begin{aligned} F_j &= -\sigma\left(1 - K||u||^2\right)\xi^{(j)}, \quad j = 1,\ldots,k-1; \\ F_k &= -\sigma\left(1 - K||u||^2\right)z^{(j)}, \quad G \equiv 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда из системы (21) выводятся уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= -\varepsilon\sigma f_+^{-1}(h,t)\left(1 - K||u(h,t)||^2\right)x_j, \quad j = 1,\ldots,k, \\ \dot{y} &= x_k - \varepsilon\sigma f_+^{-1}(h,t)(1 - K||u(h,t)||^2)y. \end{aligned} \tag{23}$$

Уравнения с номерами $j = 1,\ldots,k-1$ отделяются от подсистемы, включающей два последних уравнения. Согласно анализу в разделе 5 и теореме 2 последняя подсистема допускает единственное T^*-периодическое решение. Решение отвечает циклу, ε-близкому к СПД с $h = h^*$. При надлежащем выборе знака σ цикл будет орбитально асимптотически устойчивым.

В указанном решении $x_k = 0$, и нулевое решение уравнения по x_k — асимптотически устойчиво. В силу идентичности всех уравнений по переменным x_j система (21) допускает единственное асимптотически устойчивое T^*-периодическое решение. На нем $x_j = 0$, $j = 1,\ldots,k$. Переходом к системе (6) и выбором $K = K(h^*)$ строится орбитально асимптотически устойчивый цикл системы (6), близкий к СПД с параметром $h = h^*$.

Теорема 3. *Управление* (22) *гарантирует существование и орбитально асимптотическую устойчивость цикла управляемой обратимой механической системы* (6).

Таким образом, теоремой 3 завершается решение задачи нахождения управлений, гарантирующей существование притягивающего цикла, близкого к СПД, для редуцированной обратимой механической системы.

7. Стабилизация цикла

Решение задачи о притягивающем цикле в редуцированной системе в общем случае, когда $l \geqslant n > 1$ не приводит к стабилизации цикла в обратимой механической системе (1). Для стабилизации необходимо обеспечить притяжение траекторий к $\hat{\Sigma}$.

Согласно [14] невырожденному СПД семейства Σ отвечает $k+1$ нулевых характеристических показателей (ХП). При этом $k-1$ ХП — простые, а два ХП образуют жорданову клетку. Оставшиеся ХП образуют пары $\pm\kappa$. При действии соответствующего ε-малого управления эти пары ХП становятся ненулевыми. Поэтому необходимым условием стабилизации цикла управляемой обратимой механической системы будет принадлежность указанных пар $\pm\kappa$ ХП мнимой оси.

Согласно теореме 1 цикл редукцированной системы стабилизируется естественным образом самим фактом его существования. Вывод справедлив для системы (8), в которой размерности $l \geqslant n$. Применим к такой системе лемму 1. Тогда на $(k+1)$-многообразии строится управляемая система (6). Переменные, описывающие динамику вне $\hat{\Sigma}$, на $\hat{\Sigma}$ принимают нулевые значения. Значит, эти переменные описывают динамику в окрестности нулевого по этим переменным равновесия. Предполагается, что пары $\pm\kappa$ ХП принадлежат мнимой оси. Тогда ε-диссипация будет обеспечивать притяжение к многообразию $\hat{\Sigma}$.

Таким образом, справедлива теорема 4.

Теорема 4. *Пусть в обратимой механической системе* (1) *размерности $l \geqslant n$, и система допускает семейство Σ невырожденных СПД, заполняющее многообразие $\hat{\Sigma}$. Тогда задача стабилизации цикла управляемой системы решается построением управляемой редуцированной системы на $\hat{\Sigma}$ и обеспечением притяжения траекторий к $\hat{\Sigma}$.*

Замечание 7. Конструктивное решение задачи построения многообразия $\hat{\Sigma}$ и соответствующей редуцированной системы представляет собой нерешенную в общей случае задачу.

8. Пример. Стабилизация колебаний физического маятника

Физический маятник допускает два семейства маятниковых колебаний. Одно из них — плоское — известно с 1884 г. (см. [15]); собственно с этих движений тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой и центром масс, принадлежащим главной плоскости эллипсоида инерции, называется физическим маятником. Другое семейство — пространственное — получается продолжением второго ляпуновского семейства, существующего в окрестности нижнего положения равновесия тела. Многообразие, на котором происходят колебания второго семейства, пока не выделено.

Движение физического маятника описывается обратимой системой уравнений Эйлера–Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B-C)qr + Pz_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\ B\dot{q} &= (C-A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\ C\dot{r} &= (A-B)pq - Px_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь в обозначениях системы (1) вектор $u = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, вектор $v = (p, q, r)$, $l = n = 3$, неподвижное множество $M = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r : p = 0, q = 0, r = 0)$, а A, B, C, x_0, z_0 — параметры.

Система (24) допускает (см. [15]) интегральное многообразие

$$\Psi = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : p = 0, r = 0, \gamma_2 = 0\},$$

которое заполнено движениями физического маятника. Они симметричны относительно множества M и описываются тремя уравнениями

$$B\dot{q} = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \ \dot{\gamma}_1 = -\gamma_3 q, \ \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q. \tag{25}$$

После замены $\gamma_1 = \rho\cos\theta$, $\gamma_3 = \rho\sin\theta$, учитывающей равенство модуля единичного вектора единице (см. [13]), для Ψ получается система третьего порядка

$$\begin{aligned} &\dot{\rho} = 0, \quad (\dot{\theta} = -q), \\ &B\ddot{\theta} + P\rho\sqrt{x_0^2 + z_0^2}\sin(\theta - \alpha) = 0, \quad \sin\alpha = x_0/\sqrt{x_0^2 + z_0^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

При этом для каждого решения $\rho = \rho_0(\mathrm{const})$ имеем колебания математического маятника, которые объединяются при изменении ρ_0 в двумерные семейства СПД ($k = 2 > l - n + 1$). Физическому содержанию задачи отвечает значение $\rho_0 = 1$.

На трехмерном многообразии строится управляемая система

$$\begin{aligned} &\dot{\delta\rho} = \varepsilon\sigma(1 - K\theta^2)\delta\rho, \quad \delta\rho = \rho - 1, \\ &B\ddot{\theta} + P\rho\sqrt{x_0^2 + z_0^2}\sin(\theta - \alpha) = \varepsilon\sigma(1 - K\theta^2)\dot{\theta}, \end{aligned} \tag{27}$$

в которой число $K = K(h^*)$: h^* — значение энергии для цикла. К системе (27) применяется теорема 3. Получается притягивающий цикл, для которого $\delta\rho = 0$. Притяжение траекторий к трехмерному многообразию обеспечивается принадлежностью ХП чисто мнимой оси и применением ε-линейной диссипации. Теорема 4 здесь формально не применяется.

В другом подходе выделяется двумерное многообразие Ψ_2, на котором динамика описывается вторым уравнением системы (26). К колебаниям маятника (СПД) применяется теорема 2, и на Ψ_2 строится притягивающий цикл. Далее учитывается пара простых нулевых ХП СПД, второй из которых отвечает интегралу кинетического момента. Применяется теорема 4. В результате стабилизация цикла всей системы обеспечивается чисто мнимыми ХП пары $\pm\kappa$ СПД.

Оба подхода приводят к притягивающему циклу, близкому к СПД математического маятника. Второй подход применялся ранее, функция для математического маятника $K(h)$ вычислялась.

9. Заключение

Обратимые механические системы обладают фундаментальным свойством пространственно-временной симметрии и выделяются симметрией фазового пространства относительно линейного преобразования. Этими системами описываются основные модели аналитической механики: уравнения Лагранжа второго рода с позиционными силами, уравнения Воронца для неголономной системы, уравнения в квазикоординатах, задача трех тел, задача о вращении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и др.

Задача стабилизации одночастотного колебания управляемой обратимой системы решается следующим образом. Выделяется интегральное многообразие $\hat{\Sigma}$, заполненное семейством невырожденных СПД, На $\hat{\Sigma}$ строится редуцированная управляемая обратимая механическая система. Наконец, обеспечивается притяжение траекторий к $\hat{\Sigma}$. Задача решается конструктивно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.

   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
4. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.

   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Automation and Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
5. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АиТ. 2020. № 9 . С. 93–104.

   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an N Degree of Freedom Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
6. *Fradkov A.L* Swinging Control of Nonlinear Oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202.
7. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems: Virtual Constraints Approach // IEEE T. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176.
8. *Boubaker O.* The Inverted Pendulum Benchmark in Nonlinear Control Theory: a Survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. 233–242.
9. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of Energy Level Sets of Underactuated Mechanical Systems Exploiting Impulsive Braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293.
10. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., Mei R., Wang Z., Huynh V. Th.* Robust Stabilizing Control for Oscillatory Base Manipulators by Implicit Lyapunov Method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–2262.

11. *Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.* Time-reversal Symmetry in Dynamical Systems: a Survey // Physica D. 1998. V. 112. No. 1–2. P. 1–39.
12. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // Прикл. матем. и механ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
13. *Тхай В.Н.* Колебания и равновесия в обратимой механической системе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Матем. Механ. Астрон. 2021. Вып. 4. С. 709–715.
14. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // Прикл. матем. и механ. 2000. Т. 64. Вып 5. С. 848–857.
15. *Млодзиевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки// Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этнограф. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 17.03.2022

После доработки 18.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022