

## Стохастические системы

© 2022 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frcsc.ru),  
А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (A.Bosov@frcsc.ru)  
(Федеральный исследовательский центр  
“Информатика и управление” РАН, Москва)

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СКАЧКООБРАЗНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ДРЕЙФОМ ПО КОСВЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ<sup>1</sup>

Исследуются вопросы реализации стратегии оптимального управления, полученного в [1] и дополненного в [2]. Алгоритм оптимальной стабилизации линейной стохастической дифференциальной системы в положении, определяемом кусочно-постоянным марковским дрейфом, опробован на значительном числе модельных экспериментов. Значение дрейфа наблюдается косвенно, т.е. задача управления решается в постановке с неполной информацией. Практическая реализация осложняется неустойчивостью численных схем Эйлера–Маруямы, реализующих фильтр Вонэма, который является ключевым элементом оптимальной стратегии управления. Для выполнения расчетов фильтр Вонэма аппроксимируется устойчивыми схемами, основанными на оптимальной фильтрации марковских цепей по дискретизованным наблюдениям [3]. Эти схемы имеют разную сложность реализации и порядки точности. В статье проведен сравнительный анализ качества управления для различных устойчивых аппроксимаций фильтра Вонэма и его типовой реализации с помощью схемы Эйлера–Маруямы. Помимо этого, выполнено сравнение трех вариантов дискретизованных фильтров и даны финальные рекомендации по их применению в задаче стабилизации системы со скачкообразно изменяющимся дрейфом.

*Ключевые слова:* управление линейной дифференциальной системой, марковская цепь с непрерывным временем, квадратичный функционал качества, фильтр Вонэма, схема Эйлера–Маруямы, дискретизованный фильтр.

DOI: 10.31857/S0005231022090069, EDN: AJBXXKL

#### 1. Введение

Отправной точкой для постановки задачи, исследованной в работе, является один прикладной пример из [4]. Он представляет собой специальный

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-28-00588, <https://rscf.ru/project/22-28-00588/>. Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН, Москва).

случай задачи оптимальной квадратичной стабилизации состояния линейной стохастической дифференциальной системы. Особенность этого примера состоит в представлении системы в форме “вход-выход”, где вход является внешним неуправляемым процессом, а задача заключается в стабилизации выхода. Важнейшим фактором, влияющим на управление в таких задачах, является наличие или отсутствие полной информации о входных воздействиях. Управление по неполной информации всегда значительно сложнее, но интереснее с прикладной точки зрения. К обобщениям упомянутой задачи стабилизации состояния линейной стохастической системы по квадратичному критерию на случай неполной информации следует относить статьи [5–7]. В них использовался частный случай критерия, включающий только слагаемые с управлением. Наиболее общий результат получен в [8] для случая классического квадратичного критерия и произвольных марковских входных воздействий. Отметим, что упомянутые работы носят чисто теоретический характер без акцента на практическую реализацию.

Для аналогичной модели в [1, 2] предложена конструктивная интерпретация входа как воздействия, требующего ответной управляемой реакции. Для этого в квадратичный функционал включены слагаемые с разностью между входными и выходными переменными, т.е. дана возможность ставить задачу слежения за траекторией входа. Постановка с неполной информацией, в которой процесс выхода представляет наблюдения входного процесса, приводит к вспомогательной задаче фильтрации. В обсуждаемой модели использование в качестве входа цепи Маркова с конечным числом состояний привело к фильтру Вонэма [9]. В сочетании с универсальными свойствами квадратичного критерия для решаемой задачи в [1] удалось доказать теорему разделения и получить замкнутые уравнения для оптимальной стратегии стабилизации, обеспечивающей эффективный алгоритм отслеживания изменяющегося дрейфа линейной системы, а в [2] — дополнить решение для случая полной информации, получив в том числе референсные характеристики управления. Кроме того, в [1, 2] приведен содержательный прикладной пример использования предложенной модели для описания простого механического привода. В численных экспериментах использовалась простая аппроксимация фильтра Вонэма методом Эйлера–Маруямы [10]. Для иллюстрации результатов была опубликована лишь небольшая часть выполненных экспериментов. Большинство же экспериментов оказалось не слишком удачным из-за неустойчивости использованной схемы Эйлера–Маруямы для реализации фильтра Вонэма.

Трудности с практическим применением фильтра Вонэма известны [11, 12], равно как и способы их преодоления. Пример такого рода кратко обсуждается в [2] и состоит в использовании численных схем дискретизованных фильтров [3]. Степень целесообразности и эффективности применения этих алгоритмов при реализации решения задачи стабилизации требует проведения масштабных сравнительных экспериментов и анализа их результатов, который и представлен в статье.

## 2. Модель и оптимальное управление

Кратко сформулируем основной результат статей [1, 2]. На каноническом вероятностном пространстве с фильтрацией  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ ,  $t \in [0, T]$ , рассматривается задача управления для линейной дифференциальной стохастической системы с управляемым вектором выхода  $z_t \in \mathbb{R}^{n_z}$  вида

$$(1) \quad dz_t = a_t y_t dt + b_t z_t dt + c_t u_t dt + \sigma_t dw_t, \quad z_0 = Z,$$

и входом, задаваемым марковской цепью  $y_t$  с конечным числом состояний и значениями во множестве  $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$ , состоящем из единичных координатных векторов в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n_y}$ . Распределение начального состояния  $y_0 = Y$  обозначается как  $\pi_0$ , матрица интенсивностей переходов — как  $\Lambda_t$ . Остальные величины в уравнении (1):

- $w_t \in \mathbb{R}^{n_w}$  — стандартный векторный винеровский процесс;
- $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$  — гауссовская случайная величина с известными математическим ожиданием и ковариацией,  $w_t, y_t, Y, Z$  независимы в совокупности;
- $u_t \in \mathbb{R}^{n_u}$  — управление — случайный процесс с конечным вторым моментом;
- $a_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $b_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $c_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ ,  $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$  — заданные матричные функции.

Управление  $u_t$  выбирается из класса допустимых управлений вида  $u_t = U_t(z_t)$ , т.е. в форме обратной связи по выходу. Закон управления  $U_t = U_t(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ , является результатом оптимизации функционала качества вида

$$(2) \quad J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \|P_t y_t + Q_t z_t + R_t u_t\|_{S_t}^2 dt + \|P_T y_T + Q_T z_T\|_{S_T}^2 \right\},$$

где  $U_0^T = \{U_t(z), 0 \leq t \leq T\}$ ,  $P_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_y}$ ,  $Q_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_z}$ ,  $R_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_u}$ ,  $S_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_J}$ ,  $S_t \geq 0$ ,  $S_t = S'_t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , — заданные ограниченные матричные функции,  $\|x\|_S^2 = x' S x$  — весовая функция, заданная симметричной неотрицательно определенной матрицей  $S$ , единичной матрице  $S$  соответствует евклидова норма  $|x|^2$ ,  $x'$  — транспонированная матрица,  $\mathbb{E}\{y\}$  — математическое ожидание  $y$ .

При выполнении стандартных условий для параметров (1), (2) (ограниченность, кусочная непрерывность, невырожденность  $R'_t S_t R_t > 0$  и  $\sigma_t \sigma'_t > 0$ ) решением задачи оптимизации

$$\hat{U}_0^T = \left\{ \hat{U}_t(z), 0 \leq t \leq T \right\} \in \operatorname{argmin} J(U_0^T)$$

является стратегия управления  $\hat{u}_t = \hat{U}_t(\hat{z}_t)$  вида

$$(3) \quad \hat{u}_t = -\frac{1}{2} (R'_t S_t R_t)^{-1} (c'_t (2\alpha_t \hat{z}_t + \beta_t \hat{y}_t) + 2R'_t S_t (P_t \hat{y}_t + Q_t \hat{z}_t)),$$

где

$$(4) \quad \frac{d\alpha_t}{dt} - (M_t^\alpha \alpha_t + \alpha_t'(M_t^\alpha)') + N_t^\alpha - \alpha_t' c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t' \alpha_t = 0, \quad \alpha_T = Q_T' S_T Q_T,$$

$$(5) \quad \frac{d\beta_t}{dt} + \beta_t \Lambda_t' + M_t^\beta - N_t^\beta \beta_t = 0, \quad \beta_T = 2Q_T' S_T P_T,$$

$$(6) \quad d\hat{y}_t = \Lambda_t' \hat{y}_t dt + (\text{diag}(\hat{y}_t) - \hat{y}_t \hat{y}_t') a_t' (\sigma_t \sigma_t')^{-1} \times \\ \times (d\hat{z}_t - a_t \hat{y}_t dt - b_t z_t dt - c_t \hat{u}_t dt), \quad \hat{y}_0 = \mathbb{E}\{Y\},$$

и через  $\hat{z}_t$  обозначена оптимальная траектория выхода, т.е. решение (1), отвечающее  $u_t = \hat{u}_t$ .

Соотношения для параметров уравнений (4) и (5):

$$M_t^\alpha = Q_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t', \quad N_t^\alpha = Q_t' (S_t - S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t) Q_t, \\ M_t^\beta = 2 \left( (a_t' - P_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t') \alpha_t + P_t' (S_t - S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t) Q_t \right), \\ N_t^\beta = Q_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t' + \alpha_t c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t'.$$

Таким образом, оптимальное управление является линейной функцией выхода  $z_t$  и оценки фильтрации  $\hat{y}_t$  входа  $y_t$ , которую определяет фильтр Вонэма [9]. Надо отметить, что уравнение (6), записанное для оценки  $\hat{y}_t = \mathbb{E}\{y_t | \mathcal{F}_t^z\}$ , имеет такой же вид для любого другого управления  $u_t$  и соответствующего ему выхода  $z_t$ , т.е.  $\hat{y}_t = \mathbb{E}\{y_t | \mathcal{F}_t^z\}$ . Здесь через  $\mathcal{F}_t^z$  обозначена  $\sigma$ -алгебра, порожденная наблюдаемыми величинами  $\{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$ , так что  $\mathcal{F}_t^z \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}\{y | \mathcal{F}\}$  — условное математическое ожидание  $y$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ .

Приведенные соотношения означают, что для практической реализации оптимальной стратегии стабилизации  $\hat{u}_t$ , в частности для проведения компьютерного моделирования, требуется:

- приближенно решать обыкновенные дифференциальные уравнения (4) и (5), для чего подойдет любая устойчивая численная схема,
- моделировать траектории цепи  $y_t$ , для чего достаточно уметь моделировать экспоненциально распределенные случайные величины с малыми интенсивностями, что также не представляет трудностей,
- моделировать траектории для решений уравнения Ито (1), здесь вполне подойдет простая схема метода Эйлера–Маруямы,
- приближенно вычислять решения соответствующего уравнения фильтра Вонэма (6).

Именно с последней задачей связаны действительные трудности, с которыми столкнулись авторы при подготовке численных примеров для статей [1, 2]. В итоге были выбраны наборы параметров, для которых фильтр Вонэма успешно аппроксимировался приближенным решением по схеме Эйлера–Маруямы. Анализ остальных экспериментов и варианту преодоления трудностей численной реализации оптимальной оценки фильтрации в них посвящена данная статья. Используется та же модель. Ее более подробное, чем в [1, 2], описание приведено в следующем разделе.

### 3. Модель механического привода и результативность управления

Образцом технической системы для предлагаемой модели привода является мостовой кран или кран-балка. Приводом обеспечивается перемещение по рельсу тележки с закрепленным талем для подъема груза. Перемещаемая тележка обладает значительной инерцией. Размещать ее требуется в конечном числе определенных положений на рельсе, например напротив линий погрузки-разгрузки или железнодорожных путей. В модели состояние привода описывается скалярной переменной  $x_t$ , задающей положение тележки на балке, и скоростью  $v_t$ , которая может регулироваться. Скорость определяется силой, которая линейно зависит от текущих положения и скорости, неконтролируемого входного воздействия  $y_t$  (номера линии погрузки) и управления  $u_t$ :

$$(7) \quad \begin{aligned} dx_t &= v_t dt, \quad t \in (0, T], \\ dv_t &= ax_t dt + bv_t dt - cy_t dt + hu_t dt + \sqrt{g} dw_t. \end{aligned}$$

В примерах, рассмотренных в [1, 2], марковская цепь  $y_t$  имеет три состояния, т.е.  $n_y = 3$ ,  $y_t \in \{e_1, e_2, e_3\}$ , и является однородной, т.е.  $\Lambda_t = \Lambda = \text{const}$ , начальное распределение  $\pi_0 = (1, 0, 0)'$ , т.е.  $y_0 = Y = e_1$ . Все примеры, обсуждаемые далее, используют цепь такой же размерности. Скаляры  $a, b, h, g$  и строка  $(c_1, c_2, c_3)$  — известные постоянные;  $w_t$  — стандартный винеровский процесс. Начальные условия  $x_0$  и  $v_0$  предполагаются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_x^2 = 1$  и  $\sigma_v^2 = 1$ .

Нетрудно видеть, что система (7) является устойчивой, если  $b < 0$  и  $b^2 + 4a < 0$ , поскольку  $b$  и  $b^2 + 4a$  — собственные числа матрицы  $a_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ . Принципиальная возможность применения обсуждаемой стратегии стабилизации в условиях неустойчивой модели некоторый академический интерес представляет, но более важны реалистичные модели, поэтому большая часть расчетов представляется для исходной модели, использованной в [1]. Набор параметров таков:

$$(8) \quad \begin{aligned} a &= -1; \quad b = -0,5; \quad T = 10; \quad h = 10; \quad g = 0,01; \\ (c_1, c_2, c_3) &= (1, 0, -1); \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что однородная цепь  $y_t$  с такой матрицей интенсивностей является эргодической и ее предельное распределение  $\pi_\infty = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})'$ . Интегрирование в представленных далее расчетах для системы (7) и соответствующих уравнений (4) и (5) выполнялось методом Эйлера с шагами  $\delta = 0,005; 0,001; 0,0001$ . Дискретная цепь, аппроксимирующая  $y_t$ , моделировалась независимыми экспоненциальными величинами для 100 интервалов для каждого интервала интегрирования длины  $\delta$ , например для  $\delta = 0,001$  моделировалась выборка из распределения  $E(0,00001)$ . Для моделирования вы-

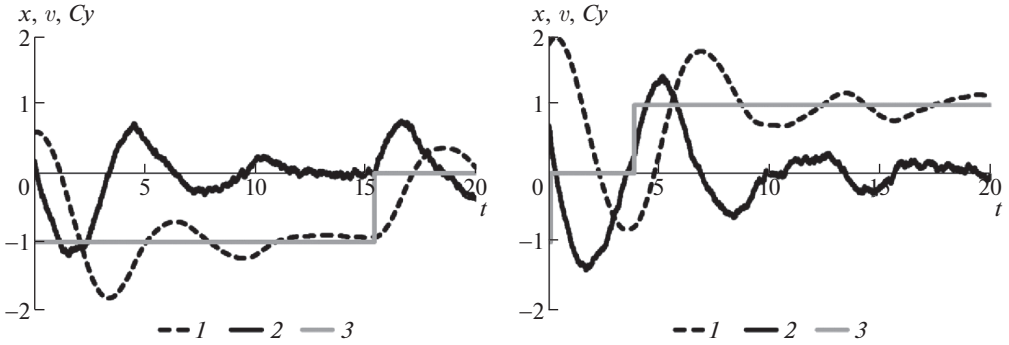


Рис. 1. Характерные траектории для модели привода с “медленным” дрейфом без управления: 1 — положение  $x_t$ , 2 — скорость  $v_t$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ .

ходных переменных  $x_t$ ,  $v_t$  шаг интегрирования  $\delta$  также разбивался на 100 интервалов длины  $\frac{\delta}{100}$ .

Для начальной иллюстрации работы привода исключим из набора параметров (8) управление  $u_t$ , положив  $u_t = 0$ . Нетрудно видеть, что данный устойчивый привод будет стремиться стабилизировать положение  $x_t$  около направлений дрейфа выхода, определяемых вектором  $Cy_t$ , где  $C = (\frac{c_1}{a}, \frac{c_2}{a}, \frac{c_3}{a})$ , а скорость  $v_t$  — около нуля. Для набора параметров (8) имеем  $C = (-1, 0, 1)$ . Графическая иллюстрация работы такого привода дана на рис. 1. При этом вместо матрицы интенсивностей из (8) использованы: на

первом графике рис. 1 — матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,05 & 0 \\ 0,005 & -0,01 & 0,005 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ , а на вто-

ром графике — матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0,005 & -1,005 & 1,0 \\ 0 & 0,005 & -0,005 \end{pmatrix}$ . Первая матрица  $\Lambda$

обеспечивает большинству траекторий цепи  $y_t$  на интервале  $T = 20$  длительное пребывание в начальном состоянии  $e_1$  и один скачок из  $e_1$  в  $e_2$ , вторая матрица  $\Lambda$  обеспечивает два скачка из  $e_1$  в  $e_2$  и следом в  $e_3$  с дальнейшим длительным пребыванием в  $e_3$ . Это единственный расчет, выполненный для горизонта  $T = 20$ , который нужен, чтобы дать системе время установиться.

Показанные на рис. 1 траектории  $v_t$ , реагируя на смену состояния  $y_t$ , действительно направляют  $x_t$  в сторону дрейфа  $Cy_t$ . Используемые матрицы интенсивностей позволяют показать, как завершается каждый промежуточный переходной процесс.

Работа такого неуправляемого привода может быть сделана более эффективной с помощью управления  $u_t$ , если цель управления задать функционалом вида

$$(9) \quad J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (|Cy_t - x_t|^2 + R|u_t|^2) dt \right\}.$$

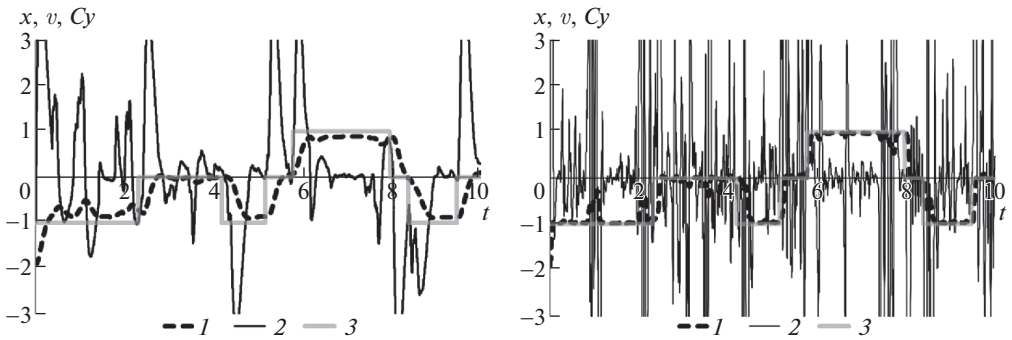


Рис. 2. Характерные траектории для модели привода с дрейфом в условиях обычного и малого штрафа за величину управления: 1 — положение  $x_t$ , 2 — скорость  $v_t$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ .

В исходном примере в [1] полагалось  $R = 0,01$ . Иллюстрация работы управляемого в соответствии с целевым функционалом (9) привода для набора параметров (8) показана на первом графике рис. 2. На втором иллюстрируется потенциал стратегии стабилизации  $\hat{u}_t$ , для чего тот же расчет выполнен для  $R = 0,00001$  и изображена та же траектория дрейфа.

Как и следовало ожидать, фактическое отсутствие штрафа за управление делает его очень активным, что позволяет стабилизировать привод значительно эффективнее.

Основным недостатком использованной в этих расчетах схемы Эйлера–Маруямы является ее неустойчивость, приводящая к расхождению некоторых траекторий оценок фильтрации. В зависимости от величины  $\delta$  практически в каждой траектории оценки  $\hat{y}_t$  присутствовали точки, в которых нарушались условия неотрицательности  $(\hat{y}_t)_1 \geq 0$ ,  $(\hat{y}_t)_2 \geq 0$ ,  $(\hat{y}_t)_3 \geq 0$  и/или нормировки  $(\hat{y}_t)_1 + (\hat{y}_t)_2 + (\hat{y}_t)_3 = 1$ . Число таких точек в разных расчетах составляло от нескольких штук (5–10) до всех траекторий в моделируемом пучке. Во многих случаях такие ситуации приводят к взрывной расходимости оценки и невозможности синтеза управления. Причем чем больше в расчете таких точек, тем вероятнее расходимость оценки. Если такие ситуации достаточно редки, то для борьбы с ними в численную процедуру были внесены простые эвристические модификации.

В качестве признака расходимости оценки  $\hat{y}_t$  использовалось условие  $|(\hat{y}_t)_k| > 1$  для любого  $k = 1, 2, 3$ . При выполнении этого условия оценка фильтрации  $\hat{y}_t$  возвращалась в предельное состояние:  $\hat{y}_\tau = \pi_\infty = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})'$  для момента времени  $\tau$ , в который были нарушены эти условия. Скорректированную таким образом оценку схемы Эйлера–Маруямы будем далее обозначать как  $\hat{y}_t^{lim}$ , подчеркивая применение предельного распределения  $\pi_\infty$ . Второй прием в такой же ситуации оценку  $\hat{y}_t$  заменяет оценкой предыдущего шага, т.е.  $\hat{y}_\tau = \hat{y}_{\tau-\delta}$ . Скорректированную таким образом оценку схемы Эйлера–Маруямы будем далее обозначать как  $\hat{y}_t^{del}$ , подчеркивая ее “запаздывание”.

В ряде случаев вычисляемые при этом значения целевого функционала показали, что такие приемы достаточно эффективны. Однако для других комбинаций параметров методы могут оказаться и оказываются нерезультативными. Этот тезис подробно иллюстрируется в разделе 5. Продемонстрированная ограниченная применимость предложенных эвристик означает, что для численной реализации стратегии оптимальной стабилизации  $\hat{u}_t$  требуется гарантированно устойчивая процедура аппроксимации оценки  $\hat{y}_t$ . Возможному решению этой задачи посвящен следующий раздел.

#### 4. Устойчивые фильтры по дискретизованным наблюдениям

В данном разделе представлены использованные далее устойчивые аппроксимации фильтра Вонэма [3], адаптированные к исследуемой задаче.

Алгоритм фильтрации, как и алгоритм оптимальной стабилизации, численно реализуется с заданным временным шагом. Используется схема дискретизации с постоянным шагом  $\delta$ , таким что  $\frac{T}{\delta}$  — целое и

$$0 = t_0, t_1 = t_0 + \delta, \dots, t_i = t_{i-1} + \delta, \dots, t_{\frac{T}{\delta}-1} + \delta = t_{\frac{T}{\delta}} = T.$$

Кроме того, без ограничения общности будем считать, что  $a_t \equiv \text{const}$ ,  $b_t \equiv \text{const}$ ,  $\sigma_t \equiv \text{const}$  на интервалах дискретизации  $[t_{i-1}, t_i]$ . В противном случае  $a_t$ ,  $b_t$ ,  $\sigma_t$  должны аппроксимироваться кусочно-постоянными функциями на интервалах дискретизации, что на цели данной работы не влияет.

Рассмотрим процесс  $z_t^0$ , являющийся неупреждающим преобразованием исходного наблюдаемого выхода  $z_t$ :

$$z_t^0 = \int_0^t (dz_\tau - (b_\tau z_\tau + c_\tau u_\tau) d\tau) = \int_0^t (a_\tau y_\tau d\tau + \sigma_\tau dw_\tau).$$

Процесс  $z_t^0$  может рассматриваться в качестве преобразованных наблюдений, не зависящих от стратегии управления, и в силу тождества

$$\mathcal{F}_t^z = \sigma \{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\} \equiv \sigma \{z_\tau^0, 0 \leq \tau \leq t\} = \mathcal{F}_t^{z^0}$$

выполнено равенство  $\hat{y}_t = \mathbb{E} \{y_t \mid \mathcal{F}_t^z\} = \mathbb{E} \{y_t \mid \mathcal{F}_t^{z^0}\}$ .

Поскольку управляющие воздействия  $u_t$  вырабатываются в дискретные моменты времени  $t_i = i\delta$ , то и оценки марковского дрейфа  $y_t$  должны вычисляться в эти же моменты. Будем использовать для этого новые наблюдения  $z_t^0$ , дискретизованные по времени с шагом  $\delta$ :

$$\Delta z_{t_i}^0 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (a_\tau y_\tau d\tau + \sigma_\tau dw_\tau).$$



Эти наблюдения являются приращениями  $z_i^0$  на интервалах дискретизации, они порождают  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_i^{\Delta z^0} = \sigma \left\{ \Delta z_{t_j}^0, 1 \leq j \leq i \right\}$ .

Если обозначить через  $\mu_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y_\tau d\tau = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^{n_y})'$  случайный вектор, компоненты которого равны времени пребывания марковской цепи  $y_t$  в каждом из возможных состояний на интервале времени  $(t_{i-1}, t_i]$ , а через  $\mathcal{N}(z; m, \sigma^2)$  гауссовскую плотность вероятности со средним  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ , вычисленную в точке  $z$ , то оценка  $\hat{y}_{t_i} = \mathbb{E} \left\{ y_t \mid \mathcal{F}_i^{\Delta z^0} \right\}$  находится с помощью следующей рекуррентной процедуры [3]:

$$(10) \quad \hat{y}_{t_i} = (\mathbf{1} \hat{q}'_{t_i} \hat{y}_{t_{i-1}})^{-1} (\hat{q}'_{t_i} \hat{y}_{t_{i-1}}),$$

где  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор из единиц, начальное условие  $\hat{y}_0 = \pi_0$ , матрица  $\hat{q}_{t_i} = \left\| \hat{q}_{t_i}^{k,j} \right\|_{k,j=1}^{n_y}$  состоит из случайных элементов

$$(11) \quad \hat{q}_{t_i}^{k,j} = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0; a\mu_i, \delta\sigma\sigma') y_{t_i}^j \mid y_{t_{i-1}} = e_k \right\}.$$

Условные математические ожидания  $\hat{q}_{t_i}^{k,j}$  представляют собой интегралы — масштабно-сдвиговые смеси гауссиан, где в качестве смешивающего выступает распределение вектора  $\mu_i$ . Принципиальной проблемой является то, что это распределение не является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега и сами интегралы (11) не могут быть вычислены аналитически. Для аппроксимации оценки  $\hat{y}_{t_i}$  эти интегралы вычисляются приближенно. В данной статье с этой целью используются и сравниваются между собой следующие схемы вычисления  $\hat{q}_{t_i}^{k,j}$  (далее через  $\Delta_{kj}$  обозначен символ Кронекера):

$$\hat{q}_{t_i}^{k,j} \approx \left( \hat{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}} \right)_{kj} = \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0; \delta a e_k, \delta\sigma\sigma') (\Delta_{kj} + \delta\lambda_{kj})$$

— схема “левых” прямоугольников порядка точности  $\frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{t_i}^{k,j} \approx \left( \hat{q}_{t_i}^{\delta} \right)_{kj} &= \Delta_{kj} e^{\lambda_{kk}\delta} \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0, \delta a e_k, \delta\sigma\sigma') + \\ &+ (1 - \Delta_{kj}) \delta \lambda_{kj} e^{\frac{\delta}{2}(\lambda_{kk} + \lambda_{jj})} \mathcal{N}\left(\Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{2} a(e_k + e_j), \delta\sigma\sigma'\right) \end{aligned}$$

— схема “средних” прямоугольников порядка точности 1,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{t_i}^{k,j} \approx \left( \hat{q}_{t_i}^{\delta^2} \right)_{kj} &= \Delta_{kj} e^{\lambda_{kk}\delta} \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0, \delta a e_k, \delta\sigma\sigma') + \\ &+ (1 - \Delta_{kj}) \frac{\delta}{2} \left( e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj}) \frac{(\sqrt{3}-1)\delta}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(\Delta z_{t_i}^0, \frac{(\sqrt{3}-1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_k + \frac{(\sqrt{3}+1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_j, \delta\sigma\sigma'\right) + \right. \\ &\left. + e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj}) \frac{(\sqrt{3}+1)\delta}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(\Delta z_{t_i}^0, \frac{(\sqrt{3}+1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_k + \frac{(\sqrt{3}-1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_j, \delta\sigma\sigma'\right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i:i \neq j i \neq k} \frac{\delta^2}{6} \left( e^{\frac{\delta}{6}(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})+\frac{\delta}{6}(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})} \mathcal{N} \left( \Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{6} a(e_k + e_i + 4e_j), \delta \sigma \sigma' \right) + \right. \\
& \quad + e^{\frac{2\delta}{3}(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})+\frac{\delta}{6}(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})} \mathcal{N} \left( \Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{6} a(e_k + 4e_i + e_j), \delta \sigma \sigma' \right) + \\
& \quad \left. + e^{\frac{\delta}{6}(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})+\frac{2\delta}{3}(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})} \mathcal{N} \left( \Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{6} a(4e_k + e_i + e_j), \delta \sigma \sigma' \right) \right)
\end{aligned}$$

— схема, основанная на квадратурах Гаусса порядка точности 2.

Отметим, что в исследуемой модели привода  $k, j = 1, 2, 3$  и  $\left( \check{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}} \right)_{13} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}} \right)_{31} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta} \right)_{13} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta} \right)_{31} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta^2} \right)_{13} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta^2} \right)_{31} = 0$ , так как в матрице интенсивностей  $\lambda_{13} = \lambda_{31} = 0$ , что существенно упрощает вычисления в сравнении с записанным общим случаем.

Итак, в сравнительном анализе, представленном в следующем разделе, участвуют аппроксимации  $\check{y}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}}, \check{y}_{t_i}^{\delta}, \check{y}_{t_i}^{\delta^2}$ , вычисляемые с помощью алгоритма (10), (11), в котором матрицы  $\hat{q}_{t_i}$  вычисляются приближенно одним из трех приведенных способов  $\check{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}}, \check{q}_{t_i}^{\delta}, \check{q}_{t_i}^{\delta^2}$  соответственно.

## 5. Экспериментальное исследование дискретизованных фильтров

Выполненный практический эксперимент включал большой комплекс расчетов, направленных на изучение влияния точности аппроксимации фильтра Вонэма на итоговое качество управления системой (7). Все расчеты, как указано в разделе 3 статьи, были выполнены для  $\delta = 0,005; 0,001; 0,0001$ . Отметим, что в анализе не участвовали модели с  $\delta = 0,01$ , как это было в исходном примере в [1], чтобы обеспечить единообразие во всех представляемых расчетах и исключить трудности при приближенном вычислении коэффициентов  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  из (4) и (5), которые возникали при  $\delta = 0,01$ . Кроме того, существенно детализированы и расширены примеры, представленные в [2].

В каждом расчете моделировалось по 1000 траекторий системы (7) с оптимальной стратегией стабилизации  $u_{t_i} = \hat{u}_{t_i}$  из (3), причем наборы случайных величин, формирующих пучки траекторий, одинаковы во всех расчетах для заданного  $\delta$ . Это обеспечивает корректность сравнения качества разных алгоритмов. Для иллюстрации некоторых результатов дополнительно рассчитывалось управление  $u_{t_i} = u_{t_i}^*$  — оптимальное решение задачи стабилизации для случая полной информации о состоянии цепи  $y_t$  (в [2] показано, что это управление определяется тем же соотношением (3) с заменой оценки  $\hat{y}_t$  на состояние  $y_t$ , т.е. имеет место сильное разделение [8]).

Все расчеты, результаты которых представлены в статье, выполнены на средствах ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН. Для их выполнения использовался сервер Huawei XH 622 V3 (2\*CPU Intel Xeon E5-2683V4 (2.1 GHz, 16 Core), 512 Gb RAM, 2\*10G Ethernet, 2\*16G FibreChannel, Intel Xeon Phi

7120P), входящий в состав инфраструктуры Гибридного высокопроизводительного вычислительного кластера архитектуры Intel x86\_64. На данном сервере использовалась виртуальная среда с гостевой операционной системой Windows 10, для которой выделялось 32 Gb RAM и до 4 ядер. Программы для расчетов написаны на языке Python и реализованы в среде PyCharm 2021.2 (Community Edition). Это свободно распространяемое программное обеспечение хорошо зарекомендовало себя в научной среде и очень широко применяется именно в исследовательских целях. Временные ресурсы на проведение экспериментов на использованном оборудовании оказались не слишком велики. Расчеты пучка из 1000 траекторий всех алгоритмов фильтрации и управления на одном ядре для величин  $\delta = 0,005$  и  $0,001$  занимали порядка 10–12 и 35–40 мин соответственно. Для  $\delta = 0,0001$  один расчет требовал порядка 6 ч компьютерного времени. Довольно большие временные затраты не должны вызывать сомнения в практической пригодности исследованных методов по той причине, что большая часть компьютерного времени (по субъективной оценке, более 75%) затрачивалась на выгрузку результатов расчетов в файлы электронных таблиц, с помощью которых выполнялся качественный и визуальный анализ, в том числе графическими инструментами. Возможность параллельного применения нескольких ядер использовалась авторами для ускорения расчетов за счет реализации расчетов для нескольких моделей одновременно. На весь комплекс расчетов, выполненных при подготовке статьи, в том числе не упомянутых здесь явно, потребовалось не более 1 мес.

Результаты расчетов далее представлены в табличной форме, при необходимости дополнительно даны графические иллюстрации. Для удобства каждая таблица в заголовке содержит набор параметров модели. Кроме того, наиболее важные результаты выделены полужирным шрифтом. Для характеристики качества оценок фильтрации  $\hat{y}_{t_i}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^2}$  рассчитывались интегральные квадратичные ошибки  $\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$ ,  $\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$ ,  $\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$ ,  $\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$  для

$$\hat{D}(\check{y}_{t_i}) = \hat{\mathbb{E}} \left\{ \frac{\delta}{T} \sum_{i=1}^{\frac{T}{\delta}} (cy_{t_i} - c\check{y}_{t_i})^2 \right\},$$

где  $\hat{\mathbb{E}}$  обозначает усреднение по пучку.

В тех расчетах, когда хотя бы одна траектория оценки  $\hat{y}_{t_i}$ , вычисленной с помощью схемы Эйлера–Маруямы, оказывалась расходящейся и синтезировать управление с ее помощью было невозможно, использовались оценки  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$  и  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ . Там, где это потребовалось, в таблицы внесена дополнительная информация.

Для характеристики качества стабилизации системы рассчитывались целевые функционалы  $\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$ ,  $\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$ ,  $\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$ ,  $\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$ , в которых  $\hat{u}_{t_i}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta^2}$  — оптимальные управления, вычисленные с помощью оценок фильтрации

$\hat{y}_{t_i}, \check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}, \check{y}_{t_i}^{\delta}, \check{y}_{t_i}^{\delta^2}$  соответственно,

$$\hat{J}(u_{t_i}) = \widehat{\mathbb{E}} \left\{ \delta \sum_{i=1}^{\frac{T}{\delta}} \left( (Cy_{t_i} - x_{t_i})^2 + R(u_{t_i})^2 \right) \right\}.$$

Результаты первого расчета представлены в табл. 1. Использовалась модель привода с параметрами (8), т.е. модель исходного примера из [1]. Графических иллюстраций данный пример не требует, достаточно рис. 2.

**Таблица 1**

$a = -1; b = -0,5; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,01;$ $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, -1); \Lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$ <b>0,22689</b> <b>0,39545</b>	<b>0,04955</b>	0,04955	0,04955	$\infty$ <b>3,18759</b> <b>4,53704</b>	<b>1,59087</b>	1,59126	1,59124
0,001	$\infty$ <b>0,05386</b> <b>0,04924</b>	<b>0,04851</b>	0,04851	0,04851	$\infty$ <b>1,60354</b> <b>1,56307</b>	<b>1,55757</b>	1,55756	1,55757
0,0001	<b>0,04927</b>	<b>0,04923</b>	0,04923	0,04923	<b>1,54318</b>	<b>1,54306</b>	1,54307	1,54307

Результаты в табл. 1 приводят к двум выводам. Во-первых, использование дискретизованных фильтров действительно дает преимущества, гарантируя устойчивость и высокое качество оценки фильтрации в любых условиях. И это преимущество тем больше, чем больше шаг  $\delta$ . Предложенные эвристические схемы обеспечения устойчивости простой численной схемы для фильтра Вонэма дают вполне предсказуемый результат. Для больших  $\delta$ , когда расходящихся траекторий много, результативность обеих эвристик крайне низкая. С уменьшением  $\delta$  и, соответственно, сокращением числа “проблемных” траекторий эвристики работают вполне эффективно, но ожидаемо проигрывают дискретизованному фильтру. Для малых  $\delta$  в смоделированном пучке вовсе не оказалось расходящихся траекторий, эвристики оказываются ненужными, а схема Эйлера обеспечивает оценке фильтра Вонэма точность, совпадающую с точностью дискретизованных фильтров вплоть до четвертого знака.

Второй вывод из табл. 1 — это отсутствие для дискретизованных фильтров иерархии качества, отвечающей скорости сходимости. Можно считать, что все три оценки дают один и тот же результат.

Давая оценку этим выводам и результатам расчета в целом, прежде всего напомним, что даже одной расходящейся траектории достаточно, чтобы вели-

чина  $\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$  оказалась сколь угодно большой. Для наименьшего значения  $\delta$  в моделируемых пучках расходящихся траекторий не было, но гарантировать, что так будет для пучка любого размера нельзя. Более того, эксперименты подтверждают, что при увеличении размера пучка до нескольких десятков миллионов неустойчивые траектории появляются и для малых  $\delta$ . При этом предложенные в разделе 3 эвристические приемы для оценки  $\hat{y}_{t_i}$  успешно работают.

Чтобы разнообразить условия применения стратегии стабилизации, нужно “ухудшать” модель. В следующем расчете для этого были сделаны два изменения. Во-первых, сохраняя физическую реализуемость, т.е. устойчивости модели привода (7), можно уменьшать абсолютные значения параметров  $a$  и  $b$  вплоть до нуля. В следующем расчете система рассматривается на границе устойчивости со значениями  $a = b = 0$ . Для этих параметров уже нельзя использовать определение для состояний стабилизации  $C = (\frac{c_1}{a}, \frac{c_2}{a}, \frac{c_3}{a})$ . Воспользуемся этим поводом, чтобы внести в модель второе изменение и избавиться от симметрии состояний цепи. Положим  $c = (-1,5; -0,5; 0,5)$  и сохраним состояния стабилизации  $C = (-1, 0, 1)$ . Качество наблюдений остается как в первом расчете  $g = 0,01$ . Результаты выполненного эксперимента приведены в табл. 2.

**Таблица 2**

$a = 0; b = 0; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,01;$ $(c_1, c_2, c_3) = (-1,5; -0,5; 0,5); (C_1, C_2, C_3) = (-1, 0, 1); \Lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i}^{\frac{1}{2}})$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i}^{\frac{1}{2}})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$ <b>0,67763</b> <b>1,13598</b>	0,05573	0,05575	0,05572	$\infty$ <b>4,41541</b> <b>5,10793</b>	1,66704	1,66719	1,66714
0,001	$\infty$ <b>0,35003</b> <b>0,07415</b>	<b>0,05283</b>	0,05283	0,05283	$\infty$ <b>1,60354</b> <b>1,56307</b>	1,61349	1,61354	1,61354
0,0001	<b>0,05273</b> <b>0,05274</b> <b>0,05273</b>	<b>0,05230</b>	0,05230	0,05230	<b>1,61684</b> <b>1,61685</b> <b>1,61684</b>	<b>1,61581</b>	1,61582	1,61582

К табл. 2 следует сделать три замечания. Сначала отметим, что исследуемая стратегия стабилизации в модели на границе устойчивости оказывается столь же эффективной, как и в аналогичном устойчивом варианте табл. 1. Ни асимметрия состояний цепи  $y_t$ , ни отсутствие нативной помощи системы в стабилизации принципиального влияния на эффективность управления не оказали.

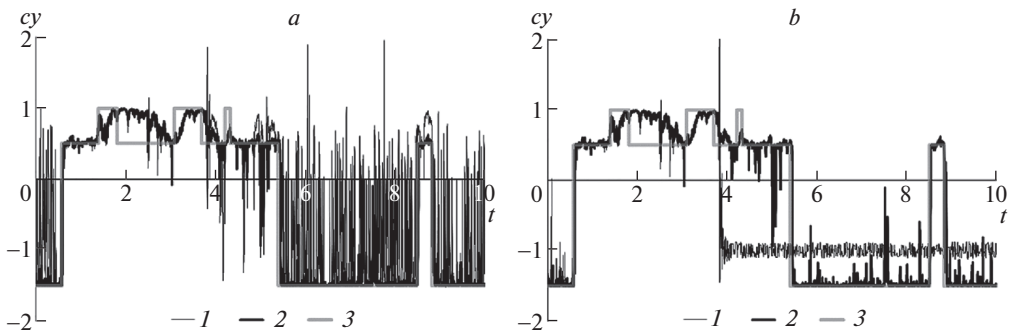


Рис. 3. Траектории эвристических оценок, на которых выполняются условия расходимости схемы Эйлера–Маруямы: а): 1 — оценка  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ , 2 — оценка  $\hat{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — цепь  $c_{y_t}$ ; б): 1 — оценка  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ , 2 — оценка  $\hat{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — цепь  $c_{y_t}$ .

Второе замечание — это безусловное преимущество дискретизованных фильтров над любыми вариантами аппроксимаций фильтра Вонэма. И в первом расчете, и здесь это преимущество растет с ростом  $\delta$ . В частности, при “больших”  $\delta = 0,005; 0,001$  проигрыш оценки Эйлера–Маруямы с обеими эвристиками  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$  и  $\hat{y}_{t_i}^{del}$  становится катастрофическим. Еще обращает на себя внимание то, что предсказать поведение этих оценок невозможно.

Наконец третье. В этом расчете столкнулись с ситуацией, когда в “хорошем” пучке с “маленьким”  $\delta = 0,0001$  все-таки оказалось несколько “плохих” траекторий оценки  $\hat{y}_{t_i}$ , т.е. таких, для которых хотя бы раз нарушалось упомянутое выше условие  $|(\hat{y}_t)_k| > 1$ . Таких траекторий было пять и существенного влияния на результат они не оказали, но важен сам факт их наличия, как основание для использования гарантированно устойчивых оценок дискретизованных фильтров, эффективных в любом случае. При этом различия между оценками  $\hat{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\hat{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\hat{y}_{t_i}^{\delta^2}$  не выявлено.

Кроме того, данный расчет дал возможность проиллюстрировать поведение предложенных в разделе 3 эвристических оценок  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ ,  $\hat{y}_{t_i}^{del}$  в случаях, когда они существенно отличаются от оценок дискретизованных фильтров. В рассматриваемом примере такие случаи есть, например для  $\delta = 0,001$ , о чем свидетельствует видимая разница в качестве оценок, вычисленных по схеме Эйлера–Маруямы, и оценок дискретизованных фильтров, представленных в табл. 2. На рис. 3 показаны траектории оценок  $\hat{c}_{y_{t_i}}^{lim}$ ,  $\hat{c}_{y_{t_i}}^{del}$ ,  $\hat{c}_{y_{t_i}}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$  и состояние цепи  $c_{y_{t_i}}$ , на которых существенно повлияло выполнение условий  $|(\hat{y}_t)_k| > 1$ . Именно такие траектории внесли основной вклад, обеспечив существенный проигрыш оценкам Эйлера–Маруямы.

Дополняет рис. 3 следующий рис. 4, на котором показаны траектории положения для той же реализации системы.

Итак, главный итог третьего расчета — это подтверждение эффективности управления на основе оценок дискретизованных фильтров в задаче стабили-

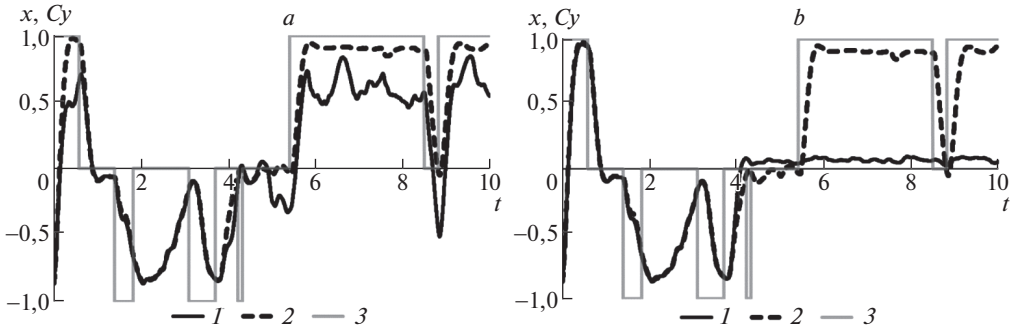


Рис. 4. Траектории положения для эвристических оценок, на которых выполняются условия расходимости схемы Эйлера–Маруямы: а): 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}$  с оценкой  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ ; б): 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}$  с оценкой  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ .

зации для модели привода на границе устойчивости. Ясно, что и при существенном нарушении условий устойчивости, т.е. при положительных  $a$ ,  $b$ , исследуемая стратегия стабилизации будет столь же эффективна. Это подтверждают и другие выполненные эксперименты, в том числе последний пример в [2]. Здесь же более важно сравнить оценки дискретизованных фильтров между собой, поэтому следующим шагом “ухудшения” модели будет существенное изменение параметров цепи  $y_t$ .

Еще один вывод из выполненных расчетов — отсутствие перспектив дальнейшего исследования эвристических оценок  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ ,  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ . Нецелесообразность их использования подтверждена в достаточной степени, поскольку предугадать и избежать ситуаций, аналогичных тем, что проиллюстрированы на рис. 3 и рис. 4, невозможно.

Усложняя условия работы привода в следующих расчетах, значительно увеличим интенсивности смены состояний цепью  $y_t$ . Тем самым будет проверено предположение о том, что систематическая разница в качестве оценок фильтрации  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^2}$  будет обнаруживаться в моделях, допускающих возможность реализации непрерывной цепью  $y_t$  более чем одного скачка на интервале дискретизации длины  $\delta$ . Чем вероятнее появление таких реализаций на интервалах  $(t_{i-1}, t_i]$ , тем точнее должны оказываться аппроксимации  $\check{q}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{q}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{q}_{t_i}^{\delta^2}$  условных математических ожиданий  $\hat{q}_{t_i}$ . Добиться этого эффекта можно, увеличивая значения интенсивностей переходов в матрице  $\Lambda$ . Более частые смены состояния входной цепи  $y_t$  с точки зрения решаемой задачи стабилизации, очевидно, потребуют более активного поведения от управления. Если при этом штрафовать за активное управление также, как в примерах с небольшими интенсивностями, то стратегия стабилизации будет вырождаться, стремясь к некоторому постоянному значению, не реагирующему на об-

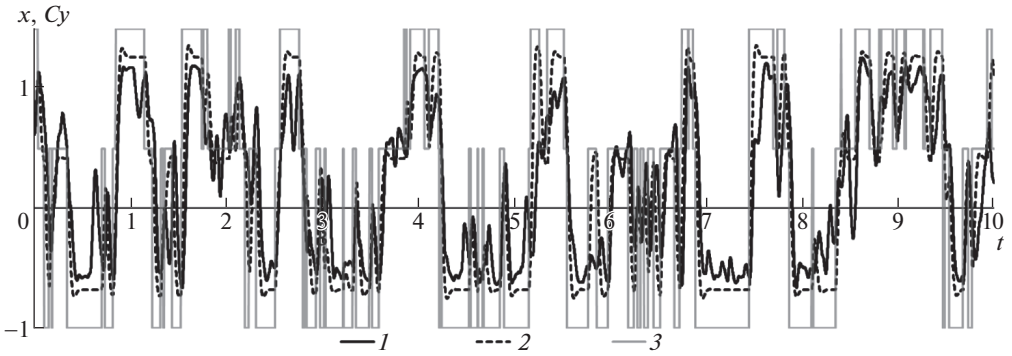


Рис. 5. Характерные траектории положения привода для модели с увеличенной до 10 интенсивностью скачков: 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $u_{t_i}^*$ , 3 — дрейф  $Cy_{t_i}$ .

ратную связь. Поэтому в расчетах далее используется  $R = 0,00001$ , как в примере из раздела 3, иллюстрирующем работу привода в “идеальных” условиях (рис. 2).

В табл. 3 и 4 приведены результаты двух расчетов, выполненных с увеличенными до 10 и 50 интенсивностями изменения значений дрейфа.

**Таблица 3**

$a = -1; b = -0,5; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,00001;$ $(c_1, c_2, c_3) = (-1,5; -0,5; 0,5); \Lambda = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 10 & -20 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$	<b>0,37441</b>	<b>0,37347</b>	<b>0,37333</b>	$\infty$	<b>7,15385</b>	<b>7,11694</b>	<b>7,11460</b>
0,001	$\infty$	<b>0,34302</b>	<b>0,34299</b>	<b>0,34298</b>	$\infty$	<b>6,49080</b>	<b>6,48944</b>	<b>6,48942</b>
0,0001	0,33543	0,33565	0,33565	0,33565	6,30794	6,30954	6,30954	6,30954

Результаты табл. 3 соответствуют ожиданиям. Для  $\delta = 0,005$  и  $\delta = 0,001$  качество оценок дискретизационных фильтров выстроено в соответствии с их теоретической скоростью сходимости. Разница, надо заметить, довольно мала и видна только в третьей-четвертой значащей цифре. Вариант с  $\delta = 0,0001$  уже можно считать предельным.

Графическая иллюстрация исследуемой стратегии управления при увеличении интенсивности смены состояний цепью  $y_t$  до 10 приведена на рис. 5. График типовой траектории положения  $x_{t_i}$  приведен для управления  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , но он такой же, т.е. визуально неотличим, для управлений  $\check{u}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta^2}$ . Чтобы охарактеризовать потенциал стабилизации в этом примере, на рис. 5 выведена траектория положения  $x_{t_i}$ , формируемого управлением  $u_{t_i}^*$ , оптимальным в постановке с полной информацией [2]. Этот график показывает, что принци-



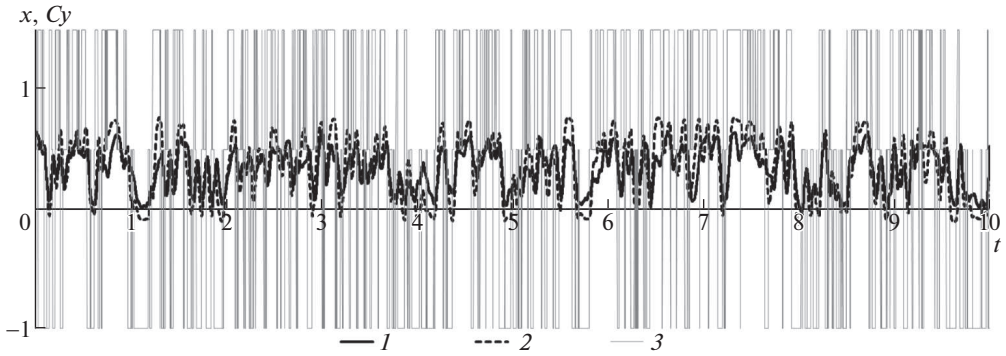


Рис. 6. Характерные траектории положения привода для модели с увеличенной до 50 интенсивностью скачков: 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $u_{t_i}^*$ , 3 — дрейф  $Cy_{t_i}$ .

пиальная возможность эффективной стабилизации в рассматриваемой модели остается за счет увеличения точности оценивания величины входа.

В этом расчете удалось проиллюстрировать отличия между оценками  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^2}$ , но разница видна только в третьей-четвертой значащей цифре. Предполагая, что эта разница может демонстрировать тенденцию к росту с увеличением интенсивности скачков цепи  $y_t$ , продолжим усложнять условия работы привода и увеличим интенсивность изменения величин дрейфа до 50. Параметры и результаты этого расчета приведены в табл. 4, графическая иллюстрация — на рис. 6.

Таблица 4

$a = -1; b = -0,5; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,00001;$ $(c_1, c_2, c_3) = (-1,5; -0,5; 0,5); \Lambda = \begin{pmatrix} -50 & 50 & 0 \\ 50 & -100 & 50 \\ 0 & 50 & -50 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$	<b>0,75826</b>	<b>0,74700</b>	<b>0,74609</b>	$\infty$	<b>10,70809</b>	<b>10,65900</b>	<b>10,65582</b>
0,001	$\infty$	<b>0,64742</b>	<b>0,64701</b>	<b>0,64699</b>	$\infty$	<b>10,31655</b>	<b>10,31497</b>	<b>10,31494</b>
0,0001	0,62598	0,62768	0,62768	0,62768	10,23954	10,24153	10,24152	10,24152

Представленный в табл. 4 расчет отвечает ожидаемым результатам в той же степени, что и предыдущий. Для  $\delta = 0,005$  разница качества оценок дискретизационных фильтров и соответствующих стратегий стабилизации видна во второй-третьей значащей цифре. Для  $\delta = 0,001$  имеется та же разница и та же иерархия качества алгоритмов, но уже в третьей-четвертой значащей цифре. Это значит, что порядок интенсивностей переходов цепи  $y_t$  для таких шагов дискретизации обеспечивает достаточно много реализацией более чем одного скачка на интервале  $\delta$ , что дает преимущество фильтрам старших по-

рядков. Случай  $\delta = 0,0001$  видится уже предельным, и разницы в оценках нет. Преимущество оценки  $\hat{y}_{t_i}$ , напомним, означает, что в смоделированном пучке не оказалось расходящихся траекторий, которые непременно появятся в других реализациях. Добившись этого результата, нельзя не отметить, что согласно рис. 6 эффективность самой стратегии стабилизации даже в случае полной информации о состоянии цепи  $y_t$  крайне низка. Это результат ухудшения условий работы привода до совсем нереалистичных параметров.

Как уже говорилось, приведенными результатами не исчерпывается весь объем выполненного вычислительного эксперимента. Другие модели включали примеры более выраженной асимметрии состояний цепи  $y_t$  и направлений стабилизации  $Sy_t$ , разные интенсивности возмущений выхода  $z_t$ , увеличения размерности цепи  $n_y$ , увеличение интенсивности ошибок наблюдений  $g$ . Эти расчеты вполне согласуются с представленными результатами и подтверждают следующие выводы.

## 6. Выводы

Основным объектом исследования данной статьи являлась задача стабилизации простого механического привода с динамически изменяющимся марковским скачкообразным дрейфом [1, 2], не доступным прямому наблюдению. Для рассмотренной задачи верна теорема разделения, поэтому оптимальное управление выражается через оптимальную оценку, задаваемую фильтром Вонэма. Целью работы являлась выработка рекомендаций по алгоритмам численной реализации оптимального управления и использования в ней устойчивых фильтров [3] вместо неустойчивых численных схем типа Эйлера–Маруямы. Результаты комплекса разнообразных численных экспериментов позволяют сделать вывод об обоснованности применения устойчивых дискретизованных фильтров и общей эффективности численной реализации оптимального управления. Помимо этого основного вывода можно сформулировать ряд практических рекомендаций.

1. Все дискретизованные фильтры демонстрируют корректную работу в качестве устойчивых аппроксимаций фильтра Вонэма.

2. Выбор схемы устойчивой дискретизованной фильтрации зависит от параметров тройки “оцениваемый марковский дрейф — доступные наблюдения — штраф за неточность оценивания в критерии”. Если интенсивность скачков дрейфа умеренная, отношение “сигнал/шум” в наблюдениях достаточно велико и вклад ошибок фильтрации в целевой функционал незначителен, рациональнее использовать схемы малого порядка аппроксимации.

3. Расходимость численных аппроксимаций фильтра Вонэма, реализованного “классическими” схемами, нельзя игнорировать. Вполне реальной является модель, когда расходятся *все* траектории фильтра.

4. По совокупности результатов экспериментов для практического применения предпочтительным является дискретизованный фильтр первого порядка, основанный на схеме “средних” прямоугольников.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borisov A., Bosov A., Miller G.* Optimal Stabilization of Linear Stochastic System with Statistically Uncertain Piecewise Constant Drift // *Mathematics*. 2022. V. 10. No. 2 (84).
2. *Босов А.В.* Стабилизация и слежение за траекторией линейной системы со скачкообразно изменяющимся дрейфом // *АиТ*. 2022. № 4. С. 27–46.  
*Bosov A.V.* Stabilization and Trajectory Tracking of Linear System with Jumping Drift // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 4. P. 1963–1973.
3. *Борисов А.В.* L1-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II: численный анализ конкретных схем // *АиТ*. 2020. № 12. С. 24–49.  
*Borisov A.V.* L1-Optimal Filtering of Markov Jump Processes. II. Numerical Analysis of Particular Realizations Schemes // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 12. P. 2160–2180.
4. *Athans M., Falb P.L.* Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications. N.Y.–Sydney: McGraw-Hill, 1966.
5. *Beneš V.* Quadratic Approximation by Linear Systems Controlled from Partial Observations / *Stochastic Analysis*. Mayer-Wolf E., Merzbach E., Shwartz A., Eds.; Academic Press, 1991. P. 39–50.
6. *Helmes K., Rishel R.* The Solution of a Partially Observed Stochastic Optimal Control Problem in Terms of Predicted Miss // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1992. V. 37. No. 9. P. 1462–1464.
7. *Benes V., Karatzas I., Ocone D., Wang H.* Control with Partial Observations and an Explicit Solution of Mortensen’s Equation // *Appl Math Optim*. 2004. No. 49. P. 217–239. <https://doi.org/10.1007/s00245-003-0788-0>
8. *Rishel R.* A Strong Separation Principle for Stochastic Control Systems Driven by a Hidden Markov Model // *SIAM J. Control and Optimization*. 1994. V. 32. No. 4. P. 1008–1020.
9. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
10. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
11. *Yin G., Zhang Q., Liu Y.* Discrete-time Approximation of Wonham Filters // *J. Control Theory Applications*. 2004. No. 2. P. 1–10.
12. *Кушнер Г.Д.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.*

Поступила в редакцию 05.04.2022

После доработки 15.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022