

Стохастические системы

© 2022 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук
(mmkhrustalev@mail.ru),

К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФфуЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА¹

Рассматривается задача оптимального программного управления линейной по состоянию и нелинейной по управлению стохастической системой диффузионно-скачкообразного типа относительно заданного линейно-квадратичного по состоянию функционала качества. Получены необходимые и достаточные условия локальной оптимальности, разработана численная процедура последовательного улучшения заданной программы управления. В качестве приложений рассмотрены примеры задач оптимизации переключаемой системы со случайными начальными данными и терминальной инвариантности.

Ключевые слова: скачкообразные диффузии, нелинейные управляемые системы, условия локальной оптимальности, последовательное улучшение.

DOI: 10.31857/S0005231022090070, EDN: AJGPGW

1. Введение

В [1, 2] были получены необходимые и достаточные условия локальной оптимальности линейных по состоянию и нелинейных по управлению стохастических систем диффузионного типа относительно линейно-квадратичного по состоянию функционала качества управления. Основным инструментом анализа в этих работах послужил метод моментных характеристик [3], который состоит в том, что исходная стохастическая задача оптимального управления заменяется эквивалентной детерминированной задачей оптимизации моментов управляемого случайного процесса. В [3] было показано, что этот подход может быть обобщен на некоторые случаи нелинейных по состоянию стохастических систем диффузионного типа.

В настоящей статье рассматривается другое обобщение — предлагается исследовать задачу оптимального управления случайным процессом диффузионно-скачкообразного типа [4]. В последние десятилетия скачкообразные

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

диффузии начали активно применять для моделирования разнообразных физических и экономических процессов, на которые существенное влияние оказывают регулярно происходящие в некоторые моменты времени независимые друг от друга события произвольной природы [5, 6]. Дополнительный интерес представляет ситуация, в которой интенсивность происходящих событий можно считать управляемой. Сюда относятся, в частности, задачи оптимального управления переключаемыми системами, в которых выбор моментов переключения (скачкообразного изменения состояния системы) является ресурсом управления. Как правило, такие задачи рассматриваются в полностью детерминированной постановке или как задачи управления пучком траекторий (см., например, [7]). Одна из целей данной работы состоит в изучении возможности включения подобных задач в рамки вопроса оптимизации скачкообразных диффузий. Опустим стремление к максимальной общности и рассмотрим естественную для приложений линейную по состоянию управляемую систему с линейно-квадратичным функционалом качества.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$(1) \quad \begin{aligned} dx(t) = & (A_1(t, u(t))x(t) + B_1(t, u(t))) dt + \\ & + (A_2(t, u(t))x(t) + B_2(t, u(t))) dw(t) + \\ & + (A_3(t, u(t))x(t^-) + B_3(t, u(t))) dP_u(t), \quad x(0) = x_0, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T (x(t)^T D_1(t, u(t))x(t) + S_1(t, u(t))^T x(t) + E_1(t, u(t))) dt + \right. \\ \left. + x(T)^T Qx(T) + R^T x(T) + \right. \\ \left. + \int_0^T (x(t^-)^T D_2(t, u(t))x(t^-) + S_2(t, u(t))^T x(t^-) + E_2(t, u(t))) dP_u(t) \right] \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])}. \end{aligned}$$

Здесь $t \in [0; T] \subset \mathbb{R}_+$ — время; $x(t)$ — n -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t ; начальное состояние x_0 — это случайный вектор с заданными первым и вторым начальными моментами; $u(t)$ — случайный m -мерный вектор программной функции управления в момент t , причем $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$, где принадлежность, как обычно, понимается в смысле классов эквивалентных вектор-функций; $w(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс; $P_u(\cdot)$ — пуассоновский процесс с управляемой неоднородной интенсивностью скачков $\lambda(t, u(t))$; отображения $A_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, 3$, $D_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $E_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, и $\lambda : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ заданы и непрерывны вместе со своими первыми и вторыми частными производными по u на $[0; T] \times \mathbb{R}^m$,

причем $\lambda(t, u) \geq 0 \quad \forall (t, u) \in [0; T] \times \mathbb{R}^m$; $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^n$; здесь и далее в работе используется обозначение $x(t^-) := \lim_{s \rightarrow t-0} x(s)$, $t \in (0; T]$, $x(0^-) := x_0$. Начальное состояние x_0 , винеровский процесс $w(\cdot)$ и пуассоновский процесс $P_u(\cdot)$ независимы в совокупности.

Прокомментируем модель управляемого процесса (1). Предполагается, что помимо детерминированного первого слагаемого и непрерывных (вообще говоря, частично управляемых) случайных внешних воздействий, моделируемых вторым слагаемым в правой части (1), на процесс управления оказывает влияние некоторый случайный поток событий, которые происходят независимо друг от друга с интенсивностью $\lambda(t, u(t))$, т.е. управляющее устройство в известных пределах может воздействовать на текущую частоту их возникновения. Если в момент времени $s \in [0; T]$ произошло одно из событий потока, то вектор состояния системы получает мгновенное (скачкообразное) приращение на величину, зависящую от момента времени s , текущего состояния $x(s^-)$ и значения вектора управления $u(s)$. Характер указанной зависимости определяется структурой третьего слагаемого в (1). В интегральной записи системы (1) первое слагаемое в правой части понимается в средне-квадратичном смысле, второе — как интеграл Ито, третье — как интеграл по случайной мере Пуассона (детальные определения можно найти в [8] или [9]).

Теперь скажем несколько слов о функционале качества (2). Во-первых, он определен и принимает действительное значение при любом $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ ввиду существования сильного решения (1) с конечными первым и вторым моментами [8]. Во-вторых, он включает в себя не только стандартные слагаемые для учета суммарных и конечных отклонений от цели управления, а также суммарных затрат на управляющие воздействия, но и слагаемые для учета затрат на управление в рамках влияния на пуассоновский поток событий. В-третьих, не накладываются никакие излишние требования на отображения D_i , S_i , E_i (помимо указанных выше свойств гладкости), матрицу Q и вектор R , поэтому функционал (2) может не достигать своей точной нижней грани $J^* \geq -\infty$. В этом случае решением задачи (1)–(2) будем считать минимизирующую последовательность $\{u_k\} \subset \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) : \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J^*$, иначе считаем решением функцию $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) : J(u^*) = J^*$.

Замечание 1. В данной работе намеренно опускается естественное, но громоздкое, обобщение задачи (1)–(2) на случай многомерных винеровского и пуассоновского процессов. Также не рассматриваются некоторые допустимые варианты нелинейных по состоянию управляемых систем (см. [3]). Кроме того, в сравнении с работой авторов [10] по задаче терминальной инвариантности управляемой диффузионно-скачкообразной системы из рассмотрения убрана случайная мера Пуассона общего вида. Вместо нее рассмотрен более частный случай в виде пуассоновского процесса. Основное отличие общего случая заключается в наличии дополнительного вектора случайных параметров, влияющего на величину скачков в системе. Для всех указанных здесь обобщений проводимые ниже рассуждения могут быть повторены практически дословно.

Замечание 2. С точки зрения приложений основным частным случаем задачи (1)–(2) является линейно-квадратичная постановка об аффинном регулировании

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A(t)x(t) + B(t)\tilde{u}(t, x(t))) dt + (G(t)x(t) + C(t)) dw(t) + \\ &\quad + (F(t)x(t^-) + V(t)) dP_u(t), \quad x(0) = x_0, \\ J(u) &= \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T (x(t)^T D(t)x(t) + \tilde{u}(t, x(t))^T E(t)\tilde{u}(t, x(t))) dt + x(T)^T Qx(T) + \gamma P_u(T) \right], \end{aligned}$$

где $\tilde{u}(t, x) = L_1(t)x + L_2(t)$, пуассоновский процесс $P_u(\cdot)$ имеет интенсивность скачков $\lambda(t, u(t)) = \lambda_1 u_\lambda(t)^2 + \lambda_0$, $\lambda_i \geq 0$, а вектором управления $u(t)$ является совокупность элементов матрицы $L_1(t)$, вектора $L_2(t)$ и числа $u_\lambda(t)$. Число $\gamma \geq 0$ характеризует величину штрафа за совершение управляемых скачков. Аффинный регулятор $\tilde{u}(t, x)$ может также входить во второе и третье слагаемые стохастического дифференциального уравнения. Примеры таких задач будут рассмотрены в разделе 6.

3. Метод моментных характеристик и обобщенная формула Ито

Начнем с того, что преобразуем функционал качества управления (2). Обозначим $m(t) := \mathbb{E}[x(t)]$, $N(t) := \mathbb{E}[x(t)x(t)^T]$, тогда для всякого $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$

$$\begin{aligned} (3) \quad J(u) &= \int_0^T \left(\text{tr} [D_1(t, u(t))N(t)] + S_1(t, u(t))^T m(t) + E_1(t, u(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda(t, u(t)) (\text{tr} [D_2(t, u(t))N(t)] + S_2(t, u(t))^T m(t) + E_2(t, u(t))) \right) dt + \\ &\quad + \text{tr} [QN(T)] + R^T m(T). \end{aligned}$$

В самом деле, функция $u(\cdot)$ неслучайна, а случайные величины $x(t^-)$ и $P_u(t)$ независимы при каждом $t \in [0; T]$, так как независимы x_0 , $w(\cdot)$ и $P_u(\cdot)$. Следовательно, можно внести линейный оператор математического ожидания под знак каждого из интегралов в (2), при этом второй из них преобразуется к виду интеграла Лебега в силу равенства $\mathbb{E} [\int_r^s dP_u(t)] = \mathbb{E}[P_u(s) - P_u(r)] = \int_r^s \lambda(t, u(t)) dt \quad \forall r, s \in [0; T]$ [8]. В предположении непрерывности функций $m(t)$ и $N(t)$ (будет показано ниже) получаем (3).

Видно, что качество управления определяется по самой функции $u(\cdot)$ и по детерминированным моментным характеристикам случайного процесса $x(\cdot)$. Хорошо известно, что в случае отсутствия пуассоновской компоненты в (1) первый и второй начальные моменты процесса $x(\cdot)$ могут быть последовательно найдены из решения двух линейных задач Коши [1–3], которые не содержат моментов более высокого порядка и потому разрешимы. Установим

аналогичное свойство для систем вида (1), выписав систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $m : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $N : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Для этого потребуется соответствующая обобщенная формула Ито [8].

Пусть $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ и задана функция $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Через $\varphi'(x)$ обозначим строку, составленную из элементов $\partial\varphi(x)/\partial x_i$, $i = \overline{1, n}$, а через $\varphi''(x)$ — $(n \times n)$ -матрицу $\{\partial^2\varphi(x)/\partial x_i\partial x_j\}$. Тогда с вероятностью 1 при всех $t \in [0; T]$ справедливо следующее соотношение [4, теорема 1.16]:

$$\begin{aligned} \varphi(x(t)) &= \varphi(x_0) + \int_0^t \varphi'(x(s)) (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s))) ds + \\ &+ \int_0^t \varphi'(x(s)) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s))) dw(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))^T \varphi''(x(s)) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s))) ds + \\ &+ \int_0^t (\varphi(x(s^-)) + A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s))) - \varphi(x(s^-)) dP_u(s). \end{aligned}$$

Положим $\varphi(x) = x_i$, $i \in \{\overline{1, n}\}$, тогда

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_{i_0} + \int_0^t (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s)))_i ds + \\ &+ \int_0^t (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_i dw(s) + \\ &+ \int_0^t (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_i dP_u(s), \end{aligned}$$

и, учитывая, как и ранее, независимость случайных величин $x(t^-)$ и $P(t)$, $t \in [0; T]$, равенство $\mathbb{E} [\int_r^s dP_u(t)] = \int_r^s \lambda(t, u(t)) dt$, $r, s \in [0; T]$, а также мартингалное свойство интеграла Ито [8], получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [x_i(t)] &= \mathbb{E} [x_{i_0}] + \int_0^t (A_1(s, u(s))m(s) + B_1(s, u(s)))_i ds + \\ &+ \int_0^t \lambda(s, u(s)) (A_3(s, u(s))m(s) + B_3(s, u(s)))_i ds, \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает следующая линейная задача Коши, решением которой является абсолютно непрерывная вектор-функция $m(\cdot)$:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{m}(t) &= A_1(t, u(t))m(t) + B_1(t, u(t)) + \\ &+ \lambda(t, u(t)) (A_3(t, u(t))m(t) + B_3(t, u(t))), \\ m(0) &= \mathbb{E}[x_0]. \end{aligned}$$

Положим $\varphi(x) = x_i x_j$, $i, j \in \{\overline{1, n}\}$, тогда

$$\begin{aligned} x_i(t)x_j(t) &= x_{i_0}x_{j_0} + \\ &+ \int_0^t \left(x_j(s) (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s)))_i + \right. \\ &\quad \left. + x_i(s) (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s)))_j \right) ds + \\ &+ \int_0^t \left(x_j(s) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_i + \right. \\ &\quad \left. + x_i(s) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_j \right) dw(s) + \\ &+ \int_0^t (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_i (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_j ds + \\ &+ \int_0^t \left(x_i(s^-) (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_j + \right. \\ &\quad \left. + x_j(s^-) (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_i + \right. \\ &\quad \left. + (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_i (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_j \right) dP_u(s), \end{aligned}$$

а значит, используя обозначение \mathcal{A}_i для i -й строки матрицы \mathcal{A} , получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_i(t)x_j(t)] &= \mathbb{E}[x_{i_0}x_{j_0}] + \int_0^t \left(A_1(s, u(s))_i \mathbb{E}[x_j(s)x(s)] + m_j(s)B_1(s, u(s))_i + \right. \\ &\quad \left. + A_1(s, u(s))_j \mathbb{E}[x_i(s)x(s)] + m_i(s)B_1(s, u(s))_j \right) ds + \\ &+ \int_0^t \left(A_2(s, u(s))_i \mathbb{E}[x(s)x(s)^T] A_2(s, u(s))_j^T + A_2(s, u(s))_i m(s)B_2(s, u(s))_j + \right. \\ &\quad \left. + A_2(s, u(s))_j m(s)B_2(s, u(s))_i + B_2(s, u(s))_i B_2(s, u(s))_j \right) ds + \\ &+ \int_0^t \lambda(s, u(s)) \left(A_3(s, u(s))_i \mathbb{E}[x_j(s^-)x(s^-)] + m_j(s)B_3(s, u(s))_i + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_3(s, u(s))_j \mathbb{E} [x_i(s^-) x(s^-)] + m_i(s) B_3(s, u(s))_j + \\
& + A_3(s, u(s))_i \mathbb{E} [x(s^-) x(s^-)^T] A_3(s, u(s))_j^T + A_3(s, u(s))_i m(s) B_3(s, u(s))_j + \\
& + A_3(s, u(s))_j m(s) B_3(s, u(s))_i + B_3(s, u(s))_i B_3(s, u(s))_j \Big) ds,
\end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает следующая линейная задача Коши, решением которой является абсолютно непрерывная матричная функция $N(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
\dot{N}(t) = & A_1(t, u(t))N(t) + N(t)A_1(t, u(t))^T + B_1(t, u(t))m(t)^T + \\
& + m(t)B_1(t, u(t))^T + A_2(t, u(t))N(t)A_2(t, u(t))^T + \\
& + A_2(t, u(t))m(t)B_2(t, u(t))^T + B_2(t, u(t))m(t)^T A_2(t, u(t))^T + \\
(5) \quad & + B_2(t, u(t))B_2(t, u(t))^T + \lambda(t, u(t)) \Big(A_3(t, u(t))N(t) + N(t)A_3(t, u(t))^T + \\
& + B_3(t, u(t))m(t)^T + m(t)B_3(t, u(t))^T + A_3(t, u(t))N(t)A_3(t, u(t))^T + \\
& + A_3(t, u(t))m(t)B_3(t, u(t))^T + B_3(t, u(t))m(t)^T A_3(t, u(t))^T + \\
& + B_3(t, u(t))B_3(t, u(t))^T \Big), \quad N(0) = \mathbb{E}[x_0 x_0^T].
\end{aligned}$$

4. Эквивалентная детерминированная задача оптимизации

Рассмотрим полученную задачу оптимального управления системой моментов (4)–(5) относительно функционала качества (3), опустив для краткости записи аргументы всех имеющихся отображений:

$$\dot{m} = A_1 m + B_1 + \lambda(A_3 m + B_3), \quad m(0) = \mathbb{E}[x_0],$$

$$\begin{aligned}
\dot{N} = & A_1 N + N A_1^T + B_1 m^T + m B_1^T + A_2 N A_2^T + A_2 m B_2^T + B_2 m^T A_2^T + B_2 B_2^T + \\
& + \lambda(A_3 N + N A_3^T + B_3 m^T + m B_3^T + A_3 N A_3^T + A_3 m B_3^T + B_3 m^T A_3^T + B_3 B_3^T), \\
& N(0) = \mathbb{E}[x_0 x_0^T],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = & \int_0^T (\text{tr}[D_1 N] + S_1^T m + E_1 + \lambda(\text{tr}[D_2 N] + S_2^T m + E_2)) dt + \\
& + \text{tr}[QN(T)] + R^T m(T).
\end{aligned}$$

Видно, что m и N входят во все соотношения не более чем линейно.

Составим новый вектор состояния $y(t) \in \mathbb{R}^{n(n+3)/2}$ из компонент вектора $m(t)$ и различных компонент симметричной матрицы $N(t)$. С его помощью задача может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) = & \tilde{A}(t, u(t))y(t) + \tilde{B}(t, u(t)), \quad y(0) = y_0, \\
J(u) = & \int_0^T \left(\tilde{D}(t, u(t))^T y(t) + \tilde{E}(t, u(t)) \right) dt + \tilde{Q}y(T) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0;T])}.
\end{aligned}$$

Здесь вектор y_0 составлен из элементов вектора $\mathbb{E}[x_0]$ и матрицы $\mathbb{E}[x_0 x_0^T]$, а отображения \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{D} , \tilde{E} и вектор \tilde{Q} явно выражаются через данные исходно в задаче (1)–(2) (например, с помощью оператора (симметричной) векторизации, как в [2]).

Дополнительно увеличив размерность вектора состояния на единицу, приведем задачу к стандартной форме линейной по состоянию управляемой системы с терминальным линейным функционалом качества

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \hat{A}(t, u(t))y(t) + \hat{B}(t, u(t)), \quad y(0) = y_0, \\ J(u) &= \hat{Q}y(T) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])}. \end{aligned}$$

Эта новая задача теперь может быть исследована независимо от исходной стохастической постановки. К ней, в частности, применимы методы локального и глобального улучшения [11] и классический принцип максимума [12]. В следующем разделе будут сформулированы необходимые и достаточные условия локальной оптимальности, а также описан численный подход к исследованию, важный для практических приложений.

5. Условия оптимальности и процедура улучшения

В предыдущих разделах была получена детерминированная линейная по состоянию задача оптимального управления с терминальным функционалом качества, эквивалентная исходной стохастической линейно-квадратичной оптимизационной проблеме (1)–(2). Для удобства допустим некоторую вольность и перепишем ее в традиционных обозначениях:

$$(6) \quad \dot{x}(t) = A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$(7) \quad J(u) = Q^T x(T) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])}.$$

Здесь по построению A и B — известные непрерывные по t и дважды непрерывно дифференцируемые по u на $[0; T] \times \mathbb{R}^m$ отображения, $Q \in \mathbb{R}^n$.

Для дальнейшего потребуются соотношения для определения градиента функционала (7) в произвольной точке $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$. Перед тем как их выписать, обратим внимание на одну существенную деталь.

Замечание 3. Градиент функционала в точке обычно определяется для дифференцируемых функционалов на гильбертовом пространстве X (например, $X = \mathbb{R}^n$ или $X = \mathcal{L}_2([0; T])$) как тот элемент из X , в который переходит производная функционала в точке при естественном изоморфизме между X^* и X . В случае банахова пространства $\mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ такого изоморфизма нет, но если производная некоторого функционала J в точке $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ имеет вид

$$J'(u)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt, \quad v \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]),$$

где $f \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$, то функция f может быть по определению названа градиентом функционала J в точке u ввиду включения множеств $\mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \subset \mathcal{L}_2^m([0; T])$.

Формулы для записи производной функционала (7) имеют вид, указанный в замечании 3, и в общем нелинейном случае были получены уже в [13–15]. Существует несколько стандартных способов вывода этих формул, которые подробно описаны в известной литературе. К ним относятся вариация функции управления и введение дополнительной сопряженной переменной [16], применение абстрактного правила множителей Лагранжа [17] и непосредственное дифференцирование наиболее подходящей формы функционала Лагранжа [18]. Конкретизируем эти результаты для задачи (6)–(7) в следующем виде. Пусть $\mathcal{AC}^n([0; T])$ обозначает пространство абсолютно непрерывных функций из $[0; T]$ в \mathbb{R}^n .

Теорема 1. Пусть функционал

$$L : \mathcal{AC}^n([0; T]) \times \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \times \mathcal{AC}^n([0; T]) \rightarrow \mathbb{R}$$

имеет вид

$$L(x, u, \psi) = (Q - \psi(T))^T x(T) + \psi(0)^T x_0 + \int_0^T \left(\dot{\psi}(t)^T x(t) + \psi(t)^T (A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t))) \right) dt.$$

Тогда для любого $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ существует пара абсолютно непрерывных вектор-функций (x, ψ) , составляющих единственное решение двух задач Коши

$$(8) \quad \dot{x}(t) = A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$(9) \quad \dot{\psi}(t) = -A(t, u(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = Q,$$

и таких, что для любого $\xi \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ верны равенства

$$L(x, u, \xi) = Q^T x(T) = \psi(0)^T x_0 + \int_0^T \psi(t)^T B(t, u(t)) dt, \quad L'_x(x, u, \psi) = 0.$$

Следствие 1 (градиент функционала). В любой точке $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ компоненты градиента функционала J аналитически определяются соотношениями

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_j(\cdot)}(t) = \psi(t)^T \left(A'_{u_j}(t, u(t))x(t) + B'_{u_j}(t, u(t)) \right), \quad t \in [0; T], \quad j = \overline{1, m},$$

где пара (x, ψ) – решение задач Коши (8)–(9).

Следствие 2 (необходимые условия оптимальности). Пусть $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ — точка минимума в задаче (6)–(7), а пара (x^*, ψ^*) — соответствующее решение задач Коши (8)–(9). Тогда для почти всех $t \in [0; T]$ и всех $j \in \{\overline{1, m}\}$ вектора $\psi^*(t)$ и $A'_{u_j}(t, u^*(t))x^*(t) + B'_{u_j}(t, u^*(t))$ ортогональны в \mathbb{R}^n .

Доказательства этих трех утверждений приведены в Приложении.

Заметим, что на практике аналитическое исследование результата следствия 2, т.е. поиск всех стационарных точек в задаче (6)–(7), в большинстве случаев оказывается затруднительным. В такой ситуации результат следствия 1 может быть использован для решения задачи улучшения данной программы управления. А именно, произвольно или из дополнительных соображений выбирается допустимая программа $u_0(t)$, $t \in [0; T]$, после чего методом градиентного спуска с применением какой-либо процедуры численного интегрирования задач Коши (8)–(9) из этого начального приближения строится локально минимизирующая последовательность программ $\{u_k(t)\}$. При этом значения всех функций и градиента функционала J подсчитываются только в конечном числе узлов выбранной численной сетки интегрирования на $[0; T]$. Малость какой-либо нормы такого конечномерного вектора градиента можно принять за условие останковки расчетов. Решение задачи улучшения естественно считать некоторым приближением к решению задачи (6)–(7), несмотря на то что фактическое приближение не может быть гарантировано.

Если все же удастся отыскать программу управления $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$, удовлетворяющую следствию 2 (см., например, [2, раздел 5]), то для нее могут быть проверены некоторые достаточные условия оптимальности. Предлагается в этих целях использовать следующие известные результаты [2, 18], которые приведем здесь без доказательства. Пусть $\mathcal{AC}^{n \times n}([0; T])$ обозначает пространство абсолютно непрерывных функций из $[0; T]$ в $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Теорема 2. Пусть $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$, (x^*, ψ^*) — соответствующее ему решение задач Коши (8)–(9), а функционал

$$K : \mathcal{AC}^n([0; T]) \times \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \times \mathcal{AC}^{n \times n}([0; T]) \rightarrow \mathbb{R}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} K(x, u, \Sigma) = & (Q - \psi^*(T))^T x(T) + \psi^*(0)^T x_0 - \\ & - \frac{1}{2} (x(T) - x^*(T))^T \Sigma(T) (x(T) - x^*(T)) + \\ & + \int_0^T \left(\dot{\psi}^*(t)^T x(t) + \psi^*(t)^T (A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t))) \right) dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T (x(t) - x^*(t))^T \dot{\Sigma}(t) (x(t) - x^*(t)) dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T (x(t) - x^*(t))^T \Sigma(t) \left(A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)) - \right. \\ \left. - A(t, u^*(t))x^*(t) - B(t, u^*(t)) \right) dt.$$

Тогда для любого $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ и соответствующего ему решения x задачи Коши (8) при любом $\Sigma \in \mathcal{AC}^{n \times n}([0; T])$ верны равенства

$$K(x, u, \Sigma) = Q^T x(T), \quad K'_x(x^*, u^*, \Sigma) = 0, \quad K'_u(x^*, u^*, \Sigma) = \nabla_u J(u^*).$$

Следствие 3 (достаточные условия локальной оптимальности). Пусть задано $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$, а (x^*, ψ^*) — соответствующее ему решение задач Коши (8)–(9). Пусть выполнены условия: для почти всех $t \in [0; T]$ и всех $j \in \{\overline{1, m}\}$ вектора $\psi^*(t)$ и $A'_{u_j}(t, u^*(t))x^*(t) + B'_{u_j}(t, u^*(t))$ ортогональны в \mathbb{R}^n ; функция Σ^* является решением задачи Коши

$$\dot{\Sigma}^*(t) = -\Sigma^*(t)A(t, u^*(t)) - A(t, u^*(t))^T \Sigma^*(t) - \gamma I, \quad \Sigma^*(T) = \gamma_1 I,$$

где γ, γ_1 — положительные числа, I — единичная матрица; для почти всех $t \in [0; T]$ строго положительны последние m угловых миноров матрицы

$$\Omega(t) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma I & \tilde{\Omega}(t) \\ \hline \tilde{\Omega}(t)^T & \hat{\Omega}(t) \end{array} \right),$$

в которой блоки $\tilde{\Omega}$ и $\hat{\Omega}$ составлены из компонент

$$\tilde{\Omega}_{ij}(t) = \sum_{s=1}^n \left[\psi_s^*(t) \frac{\partial A_{si}(t, u^*(t))}{\partial u_j} + \right. \\ \left. + \Sigma_{is}^*(t) \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial A_{sl}(t, u^*(t))}{\partial u_j} x_l^*(t) + \frac{\partial B_s(t, u^*(t))}{\partial u_j} \right) \right], \\ \hat{\Omega}_{jk}(t) = \psi^*(t)^T \left[\frac{\partial^2 A(t, u^*(t))}{\partial u_j \partial u_k} x^*(t) + \frac{\partial^2 B(t, u^*(t))}{\partial u_j \partial u_k} \right].$$

Тогда функционал J имеет в точке u^* локальный минимум.

6. Примеры

Пример 1. На интервале времени $[0; 1]$ рассматривается управляемая динамическая система

$$dx_1(t) = x_2(t)dt + dw(t) + x_2(t^-)dP_u(t), \quad x_1(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ dx_2(t) = u_1(t)x_1(t)dt, \quad x_2(0) = 0,$$

где $P_u(\cdot)$ — процесс Пуассона интенсивности $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)^2$. Функционал качества управления имеет вид

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^1 u_1(t)^2 dt + x_1(1)^2 \right]$$

и подлежит минимизации за счет выбора функций $u_{1,2}(t) \in \mathcal{L}_\infty([0; 1])$.

Запишем эквивалентную детерминированную задачу (3)–(5) оптимального управления моментными характеристиками случайного процесса $x(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= m_2(t) + u_2(t)^2 m_2(t), & m_1(0) &= 0, \\ \dot{m}_2(t) &= u_1(t) m_1(t), & m_2(0) &= 0, \\ \dot{N}_{11}(t) &= 2(1 + u_2(t)^2) N_{12}(t) + u_2(t)^2 N_{22}(t) + 1, & N_{11}(0) &= 1, \\ \dot{N}_{12}(t) &= u_1(t) m_1(t) + u_1(t) N_{11}(t) + (1 + u_2(t)^2) N_{22}(t), & N_{12}(0) &= 0, \\ \dot{N}_{22}(t) &= 2u_1(t) (m_2(t) + N_{12}(t)), & N_{22}(0) &= 0, \\ J(u) &= \int_0^1 u_1(t)^2 dt + N_{11}(1) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^2([0;1])}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие исходные данные для задачи (6)–(7): $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^6$, $u(t) \in \mathbb{R}^2$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 + 2u_2^2 & u_2^2 & 0 \\ u_1 & 0 & u_1 & 0 & 1 + u_2^2 & 0 \\ 0 & 2u_1 & 0 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ u_1^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Использование необходимых условий оптимальности (следствие 2) в этом примере не позволяет аналитически найти стационарные точки функционала J , поэтому будем его исследовать с помощью итерационной процедуры улучшения.

При отсутствии управляющих воздействий ($u_1(t) = u_2(t) \equiv 0$) имеем $J(u) = 2$, и это решение не удовлетворяет необходимым условиям оптимума. Взяв его в качестве начального приближения, получим методом градиентного

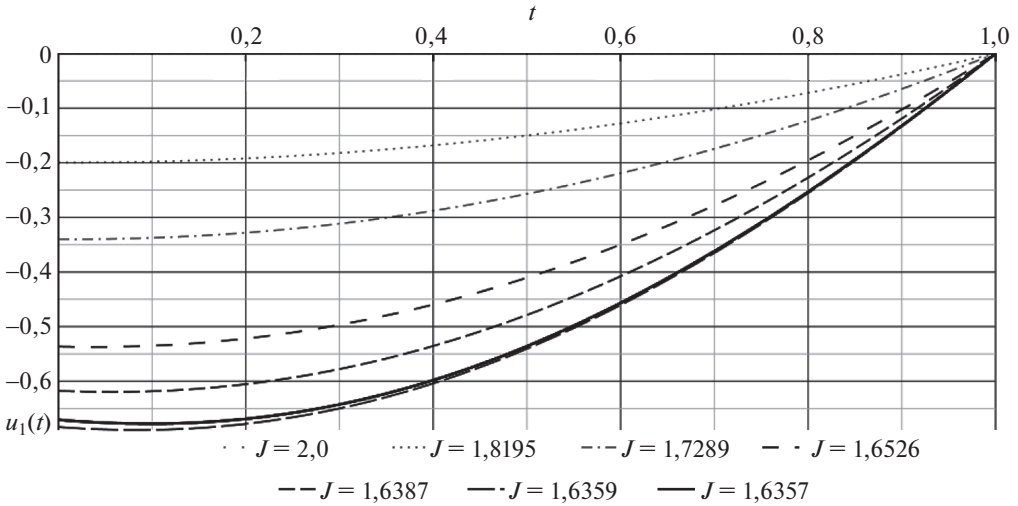


Рис. 1. Градиентный спуск для функции $u_1(t)$ (первое решение).

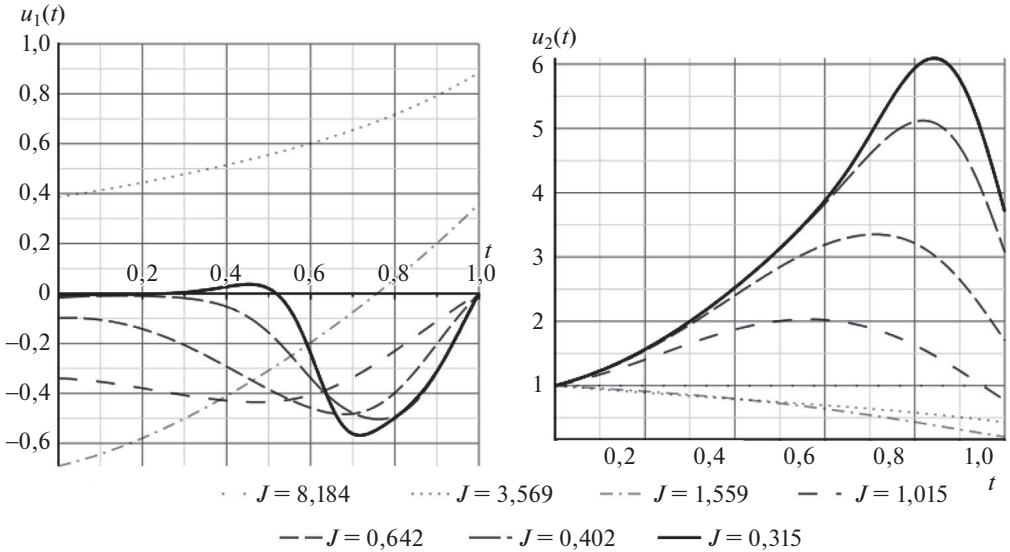


Рис. 2. Градиентный спуск для функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ (второе решение).

спуска (следствие 1) решение с $u_2(t) \equiv 0$ и ненулевой функцией $u_1(t)$, со значением $J(u) \approx 1,636$ (см. рис. 1). Однако и оно не является близким к оптимальному. Так, взяв в качестве начального приближения точку $u_1(t) = u_2(t) \equiv 1$ (в ней $J(u) \approx 8$), после градиентного спуска получаем решение со значением $J(u) \approx 0,315$ (см. рис. 2). Таким образом, в данном примере имеется возможность сильно улучшить некоторую произвольным образом выбранную программу управления и в несколько раз повысить качество в сравнении с отсутствием управляющих воздействий.

Пример 2. На интервале времени $[0; 3]$ рассматривается управляемая динамическая система

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= u_1(t)dt + (x_2(t^-) - x_1(t^-)) dP_u(t), \\ dx_2(t) &= x_2(t)dt + (x_1(t^-) - x_2(t^-)) dP_u(t), \end{aligned}$$

где $P_u(\cdot)$ — процесс Пуассона интенсивности $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)^2$, а начальное состояние $x(0)$ имеет равномерное распределение на квадрате $[7, 8; 8, 2] \times [2; 4]$. Последнее, в частности, означает, что известны первый и второй начальные моменты случайного вектора $x(0)$:

$$m(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad N(0) \approx \begin{pmatrix} 64,01 & 24 \\ 24 & 9,33 \end{pmatrix}.$$

Функционал качества управления имеет вид

$$J(u) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \int_0^3 (u_1^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt + \gamma P_u(3) \right], \quad \gamma = 100,$$

и подлежит минимизации за счет выбора функций $u_{1,2}(t) \in \mathcal{L}_\infty([0; 3])$.

Эта задача в форме проблемы управления пучком траекторий переключаемой системы с полностью управляемыми моментами скачков (переключений) была рассмотрена в [7]. Там был получен следующий результат: оптимальным является одноразовое переключение в момент времени $t_1 \approx 0,7$. Изучим, возможно ли получить приближение к этому решению или иные результаты за счет какого-либо управления интенсивностью случайно происходящих переключений. Отметим, что точное соответствие с результатами работы [7] невозможно, так как в [7] рассматриваемая задача решается на другом множестве допустимых управлений. В частности, ни одна из функций $u_2(t) \in \mathcal{L}_\infty([0; 3])$ не позволяет получить δ -образную интенсивность пуассоновского процесса, которую можно было бы считать соответствующей детерминированному одноразовому переключению.

Эквивалентная детерминированная задача управления моментами (3)–(5) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= u_1(t) + (m_2(t) - m_1(t)) u_2(t)^2, & m_1(0) &= 8, \\ \dot{m}_2(t) &= m_2(t) + (m_1(t) - m_2(t)) u_2(t)^2, & m_2(0) &= 3, \\ \dot{N}_{11}(t) &= 2u_1(t)m_1(t) + u_2(t)^2 (N_{22}(t) - N_{11}(t)), & N_{11}(0) &\approx 64,01, \\ \dot{N}_{12}(t) &= N_{12}(t) + u_1(t)m_2(t), & N_{12}(0) &= 24, \\ \dot{N}_{22}(t) &= 2N_{22}(t) + u_2(t)^2 (N_{11}(t) - N_{22}(t)), & N_{22}(0) &\approx 9,33, \end{aligned}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^3 (u_1(t)^2 + \tilde{\gamma} u_2(t)^2 + N_{11}(t) + N_{22}(t)) dt \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^2([0; 3])}, \quad \tilde{\gamma} = 200.$$

Отсюда получаем следующие исходные данные для задачи (6)–(7): $t \in [0; 3]$, $x(t) \in \mathbb{R}^6$, $u(t) \in \mathbb{R}^2$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} -u_2^2 & u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2^2 & 1 - u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & -u_2^2 & 0 & u_2^2 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2^2 & 0 & 2 - u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t, u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5u_1^2 + 100u_2^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 64,01 \\ 24 \\ 9,33 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применение необходимых условий оптимальности дает следующие результаты: либо почти всюду

$$(10) \quad u_1(t) = \frac{8}{1 + e^6} (e^t - e^{6-t}), \quad u_2(t) \equiv 0, \quad J(u) \approx 970,53,$$

либо на некоторых интервалах выполняются соотношения

$$(11) \quad \begin{aligned} u_1(t) &= -\psi_1(t) - 2x_1(t)\psi_3(t), \\ (\psi_2(t) - \psi_1(t))(x_2(t) - x_1(t)) + (\psi_5(t) - \psi_3(t))(x_5(t) - x_3(t)) &= 100, \end{aligned}$$

где $\psi(t)$ — вектор сопряженных переменных. Ясно, что решение системы алгебраических уравнений (11) совместно с прямой и сопряженной системами дифференциальных связей и краевыми условиями затруднительно. В то же время аналитическое решение вида (10) едва ли является оптимальным, так как, например, полученное в [7] решение с одним неслучайным моментом переключения $t_1 \approx 0,7$ имеет значение $J(u) \approx 178$. Попробуем улучшить результат, используя градиентный спуск.

Отметим, что $\partial J(u_1, 0)/\partial u_2(\cdot) = 0$ при любом $u_1 \in \mathcal{L}_\infty([0; 3])$, поэтому итерационный поиск решений с ненулевой интенсивностью необходимо начинать из начального приближения с $u_2 \neq 0$. Так, взяв за начальное приближение функцию u_1 из (10) и $u_2(t) \equiv 1$, находим решение со значением $J(u) \approx 500$. Сравнение найденного управления $u_1(t)$ с соответствующим из решения [7] приведено на рис. 3 слева. В свою очередь, вид найденного $u_2(t)$ показан на рис. 3 справа. Ясно, что такая функция интенсивности есть не что иное, как приближение к интенсивности «импульсного» типа в момент времени $t_1 = 0,64$, что соответствует детерминированному переключению в этот момент. Подчеркнем, что выбранное начальное приближение никак не соотно-

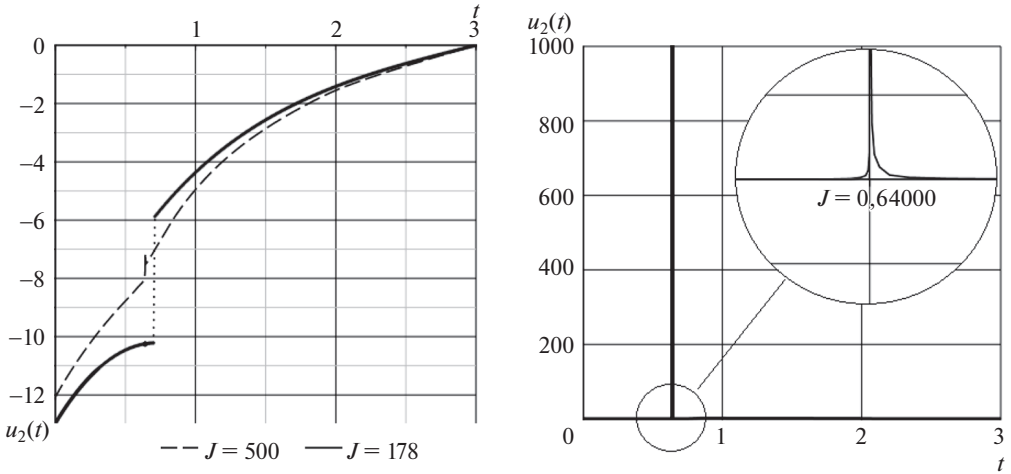


Рис. 3. Сравнение управлений $u_1(t)$ и график $u_2(t)$ для найденного решения.

сится с решением из [7], и тем не менее получена качественно схожая программа управления с фактически одним неслучайным переключением, несмотря на то что она сильно отличается от оптимальной.

Близкое к оптимальному значение $J(u) \approx 178$ может быть также получено с использованием заранее подобранной ограниченной интенсивности. Соответствующий численный результат получается при $u_1(t)$, взятом из [7] (см. рис. 3, сплошная линия слева), и $u_2(t)$, взятом в виде непрерывной ломаной со значениями $u_2(t_k) = 0$ при $t_k \neq 0,7$ и $u_2(0,7) = 1/h$, на равномерной сетке численного интегрирования с достаточно малым шагом дискретизации $h > 0$. Этот результат уже не может быть улучшен за счет градиентного спуска.

Пример 3. В рамках заключительного примера рассмотрим адаптацию задачи о терминальной инвариантности из [19]. На интервале времени $[0; 1]$ рассматривается управляемая система

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= (x_2(t) + u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t))dt + x_2(t^-)dP_u(t), \\ dx_2(t) &= -x_1(t)dt + u_3(t)x_2(t^-)dP_u(t), \end{aligned}$$

где $P_u(\cdot)$ — процесс Пуассона интенсивности $\lambda(t, u(t)) \equiv 5$, а начальное состояние $x(0)$ имеет нормальное распределение с характеристиками $m(0) = 0$, $N(0) = 10I$, где I — единичная матрица. Функционал качества управления имеет вид

$$J(u) = \mathbb{E}[x_2(1)^2].$$

Результат, полученный в [19], можно интерпретировать так: сингулярная на правом конце интервала времени программа управления

$$u_1(t) = \frac{A}{t-1}, \quad u_2(t) = \frac{Actg(t-1)}{t-1}, \quad u_3(t) = -tg(t-1), \quad A > 0,$$

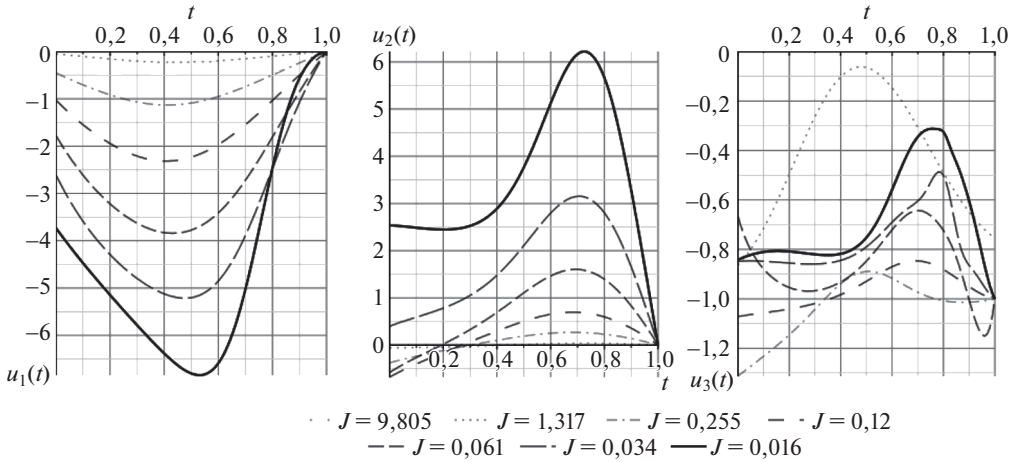


Рис. 4. Градиентный спуск и приближение к оптимальному решению $u(t)$.

обеспечивает минимальное значение функционала $J(u) = 0$. Естественно ожидать приближения к этому результату при решении задачи рассматриваемыми здесь методами.

Эквивалентная детерминированная задача управления моментами (3)–(5) записывается в виде

$$\dot{m}_1(t) = u_1(t)m_1(t) + (u_2(t) + 6)m_2(t), \quad m_1(0) = 0,$$

$$\dot{m}_2(t) = -m_1(t) + 5u_3(t)m_2(t), \quad m_2(0) = 0,$$

$$\dot{N}_{11}(t) = 2u_1(t)N_{11}(t) + 2(u_2(t) + 6)N_{12}(t) + 5N_{22}(t), \quad N_{11}(0) = 10,$$

$$\dot{N}_{12}(t) = -N_{11}(t) + (u_1(t) + 5u_3(t))N_{12}(t) + (u_2(t) + 5u_3(t) + 6)N_{22}(t), \quad N_{12}(0) = 0,$$

$$\dot{N}_{22}(t) = -2N_{12}(t) + 5(u_3(t))^2 + 2u_3(t)N_{22}(t), \quad N_{22}(0) = 10,$$

$$J(u) = N_{22}(1) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_{\infty}^3([0;1])}.$$

Ясно, что первый момент $m(t)$ тождественно равен нулю и не влияет на решение задачи, поэтому первые два уравнения можно исключить и записать следующие исходные данные для задачи (6)–(7): $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in \mathbb{R}^3$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 2u_2 + 12 & 5 \\ -1 & u_1 + 5u_3 & u_2 + 5u_3 + 6 \\ 0 & -2 & 5u_3^2 + 10u_3 \end{pmatrix}, \quad B(t, u) \equiv 0,$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Градиентный спуск из начального приближения $u(t) \equiv 0$ позволяет получить программу управления со значением $J(u) \approx 0,016$ (см. рис. 4). Заметим

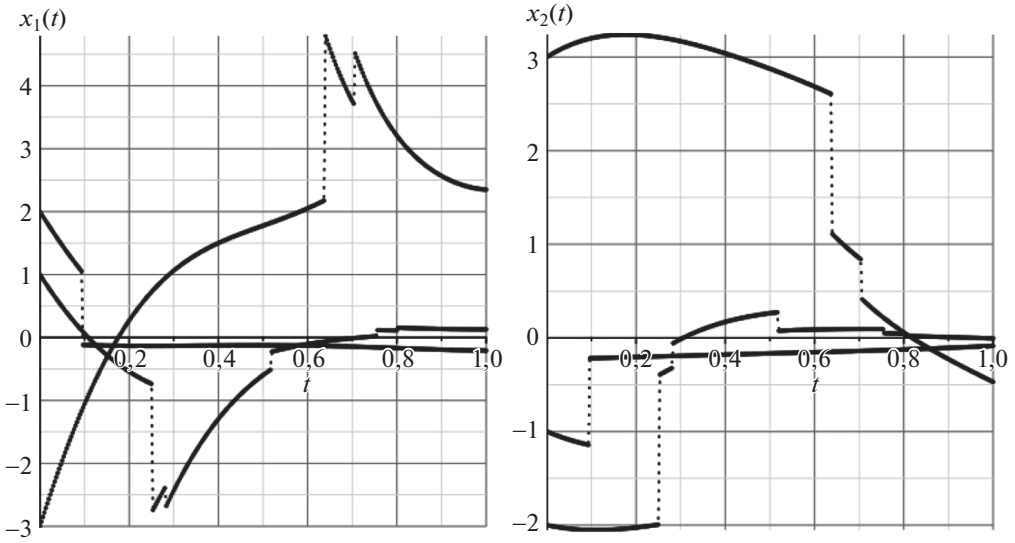


Рис. 5. Реализации случайного процесса $x(t)$.

при этом, что она не близка к решению из [19] и вообще не близка к сингулярному управлению, ее аналитическое выражение затруднительно, однако эта программа достаточно точно решает поставленную задачу оптимизации, а следовательно, приближенно обеспечивает терминальную инвариантность [19] системы по переменной x_2 . Последнее можно наглядно продемонстрировать, выполнив численное моделирование нескольких реализаций случайного процесса $x(t)$ при фиксированных начальных условиях (см. рис. 5). Однако здесь, в отличие от терминально инвариантной системы в [19], выбор начального условия влияет на степень приближения реализации случайной величины $x_2(1)$ к нулю.

7. Заключение

Полученные в работе результаты показывают принципиальную возможность содержательного исследования задач оптимального программного управления стохастическими системами диффузионно-скачкообразного типа. Прикладная значимость результатов проистекает из того обстоятельства, что в настоящее время эффективные математические модели реальных управляемых процессов все чаще содержат элементы «событийной» природы. В различных областях приложений в роли независимых друг от друга однотипных случайных событий выступают скачки напряжения, обрывы связи, порывы ветра, малые метеоритные воздействия, поломки, чрезвычайные происшествия на производстве, корпоративные дефолты, страховые случаи и т.п. Изученная в работе диффузионно-скачкообразная модель является одной из наиболее распространенных моделей подобного рода. В связи с этим создание

методов оптимизации управления для нее открывает новые возможности в соответствующих прикладных проблемах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Пусть $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$. Тогда задачи Коши (8), (9) имеют на $[0; T]$ единственное решение (x, ψ) [20, стр. 63]. Первое равенство $L(x, u, \xi) = Q^T x(T)$ вытекает из легко проверяемого интегрированием по частям соотношения

$$L(x, u, \xi) = Q^T x(T) + \xi(0)^T (x_0 - x(0)) - \int_0^T \xi(t)^T (\dot{x}(t) - A(t, u(t))x(t) - B(t, u(t))) dt,$$

а второе равенство

$$Q^T x(T) = \psi(0)^T x_0 + \int_0^T \psi(t)^T B(t, u(t)) dt$$

следует из первого при $\xi = \psi$ и определения функционала L . Также из определения L вытекает эквивалентность равенства $L'_x(x, u, \psi) = 0$ и двух равенств в (9), что проверяется непосредственным дифференцированием. Здесь $L'_x(x, u, \psi)$ — элемент пространства $\mathcal{L}_\infty^n([0; T]) + \mathbb{R}^n$, сопряженного к пространству $\mathcal{AC}^n([0; T])$ [21].

Доказательство следствия 1. Определим функцию $f : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ равенством

$$f_j(t) = \psi(t)^T \left(A'_{u_j}(t, u(t))x(t) + B'_{u_j}(t, u(t)) \right), \quad j = \overline{1, m}.$$

Исходя из замечания 3 достаточно проверить, что полная производная в смысле Фреше функционала J в точке $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ имеет вид

$$J'(u)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt, \quad v \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]).$$

В самом деле, если $u(\cdot)$ — ограниченная измеримая функция, то $t \rightarrow A'_{u_j}(t, u(t))$ и $t \rightarrow B'_{u_j}(t, u(t))$ — тоже ограниченные измеримые функции (так как отображения $(t, u) \rightarrow A'_{u_j}(t, u)$ и $(t, u) \rightarrow B'_{u_j}(t, u)$ непрерывны по постановке задачи), а значит, это верно и для $f_j(\cdot)$ как для произведения непрерывной и ограниченной измеримых функций. Следовательно, функция $f \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ может быть градиентом J в точке u . Дифференцируя функционал L , определенный в теореме 1, по переменной u , устанавливаем, что

$$L'_u(x, u, \psi)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt.$$

Таким образом, нужно проверить равенство $J'(u)[v] = L'_u(x, u, \psi)[v]$. Для этого определим два отображения $F, F^* : \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \rightarrow \mathcal{AC}^n([0; T])$ как решения задач Коши (8), (9). Хорошо известно [17, стр. 179], что эти отображения непрерывны. Теорема 1 утверждает, что для пространств $X = \Xi = \mathcal{AC}^n([0; T])$, $U = \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$, отображений F, F^* и функционалов $\mathcal{J}(x, u) = Q^T x(T)$ и L выполнены условия следующей общей леммы (доказательство см. ниже).

Лемма 1. Пусть заданы банаховы пространства X и U , непрерывное отображение $F : U \rightarrow X$ и произвольная функция $\mathcal{J} : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$. Если существуют множество Ξ , отображение $F^ : U \rightarrow \Xi$ и функция $L : X \times U \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что*

- 1) $L(F(u), u, \xi) = \mathcal{J}(F(u), u) \quad \forall (u, \xi) \in U \times \Xi$;
- 2) $L'_x(F(u), u, F^*(u)) = 0 \quad \forall u \in U$;
- 3) для любого $u \in U$ существует непрерывное в точке $F(u)$ отображение $x \rightarrow L'_u(x, u, F^*(u)) : X \rightarrow U^*$,

то функция $u \rightarrow \mathcal{J}(F(u), u)$ дифференцируема всюду на U и

$$\frac{d\mathcal{J}(F(u), u)}{du} = L'_u(F(u), u, F^*(u)), \quad u \in U.$$

Действительно, условия 1) и 2) составляют результат теоремы 1, а условие 3) выполнено в силу доказанного ранее равенства и определения функции f . Применяя лемму 1 и учитывая равенство $J(u) = \mathcal{J}(F(u), u)$, получаем

$$J'(u)[v] = L'_u(x, u, \psi)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt.$$

Доказательство следствия 1 завершено.

Доказательство леммы 1. Для любых точек $u, \tilde{u} \in U$ в силу условия 1) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(F(\tilde{u}), \tilde{u}) - \mathcal{J}(F(u), u) &= L(F(\tilde{u}), \tilde{u}, F^*(u)) - L(F(u), u, F^*(u)) = \\ &= L(F(\tilde{u}), \tilde{u}, F^*(u)) - L(F(\tilde{u}), u, F^*(u)) + \\ &\quad + L(F(\tilde{u}), u, F^*(u)) - L(F(u), u, F^*(u)) = \\ &= L'_u(F(\tilde{u}), u, F^*(u))[\tilde{u} - u] + L'_x(F(u), u, F^*(u))[F(\tilde{u}) - F(u)] + \\ &\quad + o(\|\tilde{u} - u\|) + o(\|F(\tilde{u}) - F(u)\|). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду непрерывности F и условий 2), 3) получаем

$$\lim_{\tilde{u} \rightarrow u} \frac{\mathcal{J}(F(\tilde{u}), \tilde{u}) - \mathcal{J}(F(u), u)}{\|\tilde{u} - u\|} = L'_u(F(u), u, F^*(u))[e], \quad e \in U : \|e\| = 1.$$

Доказательство следствия 2. Утверждение получается применением леммы Ферма [17, стр. 216] к следствию 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хрусталеv М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // *АиТ.* 2017. № 6. С. 84–105.
Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A. Optimization of Quasilinear Stochastic Control-Nonlinear Diffusion Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 6. P. 1028–1045.
2. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия относительного минимума в задаче оптимального управления квазилинейными стохастическими системами // *АиТ.* 2018. № 12. С. 83–102.
Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Sufficient Relative Minimum Conditions in the Optimal Control Problem for Quasilinear Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 12. P. 2169–2185.
3. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Метод моментных характеристик в теории оптимального управления стохастическими системами диффузионного типа // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2019. № 5. С. 20–31.
4. *Øksendal B., Sulem A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2005.
5. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2010.
6. *Yin G., Zhu C.* Hybrid Switching Diffusions. New York, USA: Springer, 2010.
7. *Бортаковский А.С., Нельмиченков Г.И.* Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2019. № 1. С. 52–77.
8. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
9. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
10. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия терминальной инвариантности стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // *АиТ.* 2020. № 11. С. 155–173.
Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Sufficient Conditions for Terminal Invariance of Stochastic Jump Diffusion Systems // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 11. P. 2062–2077.
11. *Krotov V.F.* Global Methods in Optimal Control Theory. Advances in Nonlinear Dynamics and Control: A Report from Russia. Progress in Systems and Control Theory, Vol 17. Birkhauser, Boston, MA., 1993.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
13. *Kelley H.J.* Gradient Theory of Optimal Flight Paths // *J. Amer. Rocket Soc.* 1960. Vol. 30. No. 10. P. 947–954.
14. *Bryson A.E., Denham W.F.* A Steepest Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems // *J. Appl. Mech.* 1962. Vol. 29. No. 2. P. 247–257.
15. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.* 1966. Том 6. № 5. С. 787–823.

16. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Наука, 1972.
17. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
18. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
19. *Хрусталева М.М., Царьков К.А.* Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // ДАН. 2020. Т. 493. № 1. С. 104–107.
20. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МИР, 1970.
21. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во ИЛ, 1962.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 13.12.2021

После доработки 20.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022