

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА (emelianovajulia@gmail.com),
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ЭТАЛОННОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹

Рассматривается линейная дискретная система, функционирующая в повторяющемся режиме, задачей которой является слежение за эталонной траекторией с заданной точностью. Параметры системы точно неизвестны и описываются аффинной моделью неопределенности. Кроме того, на нее действуют случайные возмущения и измерения осуществляются с шумами. В процессе работы системы через определенное число повторений происходит изменение эталонной траектории. Возникающая при этом переходная ошибка может приводить к временной потере точности. Предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением, позволяющий компенсировать переходную ошибку. Приведен пример, демонстрирующий эффективность метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, фильтр Калмана, 2D-системы, устойчивость, векторная функция Ляпунова, повторяющиеся процессы, неопределенности параметров.

DOI: 10.31857/S0005231022090082, EDN: AJGQJE

1. Введение

В настоящее время огромный интерес как специалистов, так и широкой общественности вызывает машинное обучение, одним из мощных движущих факторов которого является создание интеллектуальных производств (ИП). С учетом возросшей производительности компьютеров и развития робототехники такие производства становятся реальностью и являются основной движущей силой «четвертой промышленной революции» (Индустрия 4.0). Системы ИП определяются как системы, способные реагировать в режиме реального времени на удовлетворение меняющихся требований и условий на производстве, в сети поставок и в потребностях клиентов в полностью интегрированной и совместной форме.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-00091, <https://rscf.ru/project/21-71-00091/>.

Машинное обучение представляет очень обширную область кибернетики и информатики, содержащую целый ряд крупных направлений. В данной статье рассматриваются динамические системы, для которых концепция обучения была определена еще в 60-х годах прошлого века Я.З. Цыпкиным [1]: «Под обучением мы будем подразумевать процесс выработки в некоторой системе той или иной реакции на внешние сигналы путем *многократных воздействий на систему и внешней корректировки*».

Управление с итеративным обучением (УИО) полностью соответствует этому определению. Оно основано на том, что тот или иной показатель качества системы, которая выполняет одну и ту же задачу многократно, может быть улучшен путем обучения на основе информации с предыдущих выполнений. Характерным примером может служить порталный робот, захватывающий и перемещающий детали по заданной (эталонной) траектории на конвейер. Показателем качества здесь служит точность воспроизведения эталонной траектории.

Впервые идея УИО появилась в патенте США [3], а затем в журнальной публикации 1978 г. [4], написанной на японском языке. Однако эти результаты оставались невостребованными, пока серия статей в 1984 г. [5–8] не вызвала всеобщий интерес. С тех пор количество публикаций по УИО стремительно растет и включает как многочисленные статьи, так и монографии. Отметим два обзора [2, 9], которые охватывают лишь часть результатов, известных на сегодняшний день. В стандартной постановке УИО предназначено для систем, которые многократно выполняют одну и ту же операцию в одних и тех же условиях функционирования и при одинаковых начальных условиях на каждом повторении. Для таких систем управление без обучения дает одинаковую ошибку слежения на каждом повторении. Сигналы ошибок от предыдущих повторений содержат существенную информацию, но они не используются при управлении без обучения. Целью УИО является повышение точности и других показателей за счет включения информации об ошибках на текущем повторении в алгоритм управления для последующих повторений. УИО отличается от других стратегий управления с обучением, таких как адаптивное управление и нейронные сети. Стратегии адаптивного управления изменяют параметры регулятора, тогда как УИО изменяет только входной сигнал. Кроме того, адаптивные регуляторы обычно не используют информацию, содержащуюся в повторяющихся командных сигналах. Точно так же обучение нейронной сети включает в себя изменение параметров регулятора, а не управляющего сигнала; в этом случае модифицируются большие сети нелинейных нейронов. Эти большие сети требуют обширных обучающих данных, и бывает трудно гарантировать быструю сходимость, тогда как алгоритмы УИО обычно сходятся адекватно всего за несколько итераций [2] и список литературы в [2].

Интеллектуальные производства являются киберфизическими системами, представляющими собой сложную интеграцию управления, сетевых коммуникаций и вычислений с физическим производственным процессом. В соот-

ветствии с этими особенностями ИП, алгоритмы УИО индивидуальной или сетевой конфигурации должны без потери точности быстро и легко перестраиваться в зависимости от изменяющихся условий, а также при информационных нарушениях и возможных кибератаках. Применение УИО в интеллектуальных производствах выдвигает новые задачи. В стандартной постановке задачи УИО эталонная траектория остается неизменной в процессе обучения. Однако в интеллектуальных производствах эталонная траектория и задачи могут оперативно меняться в зависимости от программы, что требует корректировки управления [10, 11]. Подобная проблема возникает также в аддитивных производствах, где для послойного создания требуемой трехмерной геометрии изделия эталонная траектория должна меняться от слоя к слою [13, 15]. Такая же проблема возникает в медицинских роботах для реабилитации больных, перенесших инсульт. Робот должен перестраивать эталонную траекторию движения руки или ноги пациента в зависимости от достигнутых им успехов. Таким образом, возникают новые задачи управления с итеративным обучением реконфигурируемыми системами. Из этих новых задач в статье ставится задача синтеза УИО системой, функционирующей в повторяющемся режиме, при условии изменения эталонной траектории в процессе обучения.

В известных работах [12–17], где рассматривались системы, в которых реконфигурация состояла в изменении опорной траектории, исследования проводились в рамках детерминированных моделей, хотя в [12] было отмечено существенное влияние шумов измерений.

Задача синтеза УИО для стохастической системы с переключаемыми параметрами и с неизменяемой эталонной траекторией изучалась в [18]. В недавних работах [20, 21] разработан метод синтеза УИО для системы, в которой эталонная траектория изменяется между повторениями известным образом, на систему действуют случайные возмущения и измерения осуществляются с шумами. В [20], кроме того, известным образом между повторениями изменяются и параметры системы. Из-за изменения эталонной траектории возникает переходная ошибка и на определенном числе повторений точность снижается до недопустимого уровня. Этот эффект компенсируется за счет специального алгоритма переключения управления, в то время как влияние шумов удастся снизить только за счет предварительной фильтрации.

В данной работе рассматривается задача синтеза управления с итеративным обучением для системы, которая, как и в [20, 21], находится под воздействием шумов, и эталонная траектория меняется через определенное число повторений. В отличие от [20, 21] и других указанных выше работ предполагается, что параметры системы точно неизвестны и описываются аффинными моделями неопределенности. Для решения используется разработанный ранее автором и коллегами дивергентный метод векторных функций Ляпунова, который дает возможность применения эффективной техники линейных матричных неравенств.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную систему с неопределенными параметрами, функционирующую в повторяющемся режиме, которая на k -м повторении описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= A(\delta(p))x_k(p) + B(\delta(p))u_k(p) + D\nu_k(p), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \\ y_{\omega k}(p) &= y_k(p) + G\omega_k(p), \quad 0 \leq p \leq N-1, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где на повторении k $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управления $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор выходных переменных, называемый профилем повторения, $y_{\omega k}(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — измеренный выходной вектор, N — продолжительность повторения, $\nu_k(p) \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ — вектор случайных возмущений, действующих на объект и $\omega_k(p) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ — вектор шума измерения, $\nu_k(p)$ и $\omega_k(p)$ — независимые векторы гауссовских белых шумов с нулевым средним, такие что $E[\nu_k(p)\nu_k^T(p)] = S_\nu$, $E[\omega_k(p)\omega_k^T(p)] = S_\omega$, где E — оператор математического ожидания. Предполагается, что $\nu_k(p)$ не зависит от вектора начального состояния.

Модель неопределенности задается следующим образом:

$$(2) \quad A(\delta(p)) = A + \sum_{j=1}^l \delta_j(p)A_j, \quad B(\delta(p)) = B + \sum_{j=1}^l \delta_j(p)B_j,$$

где A и B — матрицы номинальной модели, A_j и B_j , ($j = 1, 2, \dots, l$) — постоянные матрицы соответствующих размеров и $\delta_j(p) \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]$. Далее повсюду для компактности записи зависимость δ от p указывать не будем.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j] \}, \\ \mathbf{D}_v &= \{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in \{ \underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j \} \}, \end{aligned}$$

где \mathbf{D}_v — конечное множество из 2^l элементов.

Пусть $y_{ref}(p)$, $0 \leq p \leq N-1$ — заданная эталонная траектория (желаемый профиль повторения). Тогда

$$(3) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$$

является ошибкой обучения на повторении k . Кроме того, эталонная траектория изменяется на повторении k_s , так что:

$$(4) \quad y_{ref}(p) = \begin{cases} y_{ref1}(p), & k < k_s, \\ y_{ref2}(p), & k \geq k_s. \end{cases}$$

Предполагается, что до повторения k_s требуемая точность воспроизведения $y_{ref1}(p)$ достигнута. Это реалистичный сценарий для интеллектуальных производственных систем.

Задача синтеза УИО состоит в том, чтобы построить такую последовательность управлений $u_k(p)$, которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения эталонной траектории за конечное число повторений. Формально выразим это в виде выполнения следующих условий сходимости. Существуют такие числа $\kappa > 0$, $\mu > 0$ и $0 < \rho < 1$, что:

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E[|e_k(p)|] = E|e_\infty|, \quad E[|e_k(p)|]^2 \leq \kappa \rho^k + \mu, \quad k \neq k_s - 1, \\ \lim E[|u_k(p)|] = E[|u_\infty(p)|], \quad 0 \leq p \leq N - 1,$$

при этом если случайные возмущения, действующие на объект и шумы измерения отсутствуют, то

$$(6) \quad \lim |u_k(p)| = |u_\infty(p)|,$$

где $u_\infty(p)$ — ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

Условия (5) означают, что ошибка обучения остается ограниченной для всех k и убывает не медленнее некоторой геометрической прогрессии при $k \neq k_s$.

Закон управления с итеративным обучением на повторении $k + 1$ формируется как управление на предыдущем повторении k плюс коррекция, т.е.

$$(7) \quad u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p),$$

где $\Delta u_{k+1}(p)$ — корректирующая поправка, которая должна быть выбрана так, чтобы обеспечить условия сходимости (5) и ограниченности (6). Заметим, что при случайных возмущениях $E[|e_\infty|^2] \neq 0$ в отличие от $E[|e_\infty|]$, и можно только пытаться минимизировать это значение.

На повторении $k = k_s$ эталонная траектория изменяется, что приведет к появлению переходной ошибки, которая может привести к потере точности на некотором числе повторений после повторения k_s . Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти корректирующую поправку в (7) (с возможным переключением в зависимости от изменения эталонной траектории), которая обеспечит компенсацию переходной ошибки, в том смысле, что значение $|e_{k_s}|^2$ будет в пределах заданного допуска в среднеквадратическом смысле и будут выполняться условия сходимости (5).

3. Построение 2D модели

Эталонная траектория изменяется между итерациями запланированным и заранее определенным образом. Следовательно, моменты переключения наблюдаемы. Поскольку выходной сигнал измеряется с шумами, его необходимо

предварительно обработать. С этой целью используем номинальный фильтр Калмана

$$(8) \quad \hat{x}_k(p+1) = A\hat{x}_k(p) + Bu_k(p) + F(y_{\omega k}(p) - C\hat{x}(p)), \quad \hat{x}_k(0) = Fy_{\omega k}(0),$$

где $\hat{x}_k(p)$ — оценка вектора состояния $x_k(p)$, $\hat{y}_k(p) = C\hat{x}_k(p)$, A, B — номинальные матрицы.

Замечание 1. Как показывает рассмотренный далее пример, выбор номинальной модели для построения фильтра Калмана не является лучшим решением, поскольку при таком выборе требуемая точность может не обеспечиваться при заданном разбросе параметров. Этот вопрос требует дальнейших исследований, которые выходят за рамки статьи.

Обозначим через $\tilde{x}_k(p) = x_k(p) - \hat{x}_k(p)$ ошибку оценивания и введем в рассмотрение вспомогательные переменные в виде приращения оценки вектора состояния и ошибки оценивания

$$(9) \quad \begin{aligned} \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \\ \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p). \end{aligned}$$

Поскольку выходной сигнал измеряется с шумом, ошибка обучения $e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$ недоступна для формирования корректирующей поправки. Разумным подходом в этом случае может служить использование оценки ошибки обучения

$$\hat{e}_k(p) = y_{ref}(p) - C\hat{x}_k(p).$$

Управляемая динамика в терминах приращений (9) и $\hat{e}_k(p)$ будет иметь вид

$$(10) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= (A(\delta) - FC)\tilde{\eta}_{k+1}(p) + \Delta A\hat{\eta}_{k+1}(p) + \Delta B\Delta u_{k+1}(p-1) - \\ &\quad - FG\Delta\omega_{k+1}(p-1) + D\Delta\nu_{k+1}(p-1), \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= FC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + A\hat{\eta}_{k+1}(p) + B\Delta u_{k+1}(p-1) + \\ &\quad + FG\Delta\omega_{k+1}(p-1). \end{aligned}$$

Оценка ошибки обучения при $k+1 \neq k_s$ в силу (1), (3), (9) опишется уравнением

$$(12) \quad \begin{aligned} \hat{e}_{k+1}(p) &= -CFC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - CA\hat{\eta}_{k+1}(p) + \hat{e}_k(p) - \\ &\quad - CB\Delta u_{k+1}(p-1) - CFG\Delta\omega_{k+1}(p-1). \end{aligned}$$

В момент переключения при $k+1 = k_s$ уравнение для оценки ошибки обучения примет следующий вид:

$$(13) \quad \begin{aligned} \hat{e}_{k_s}(p) &= -CFC\tilde{\eta}_{k_s}(p) - CA\hat{\eta}_{k_s}(p) + \hat{e}_{k_s-1}(p) - \\ &\quad - CB\Delta u_{k_s}(p-1) - CFG\Delta\omega_{k_s}(p-1) + r(p), \end{aligned}$$

где $r(p) = y_{ref_2}(p) - y_{ref_1}(p)$.

Для $k + 1 \neq k_s$ корректирующую поправку зададим в виде

$$(14) \quad \Delta u_{k+1}(p-1) = K_1 \hat{\eta}_{k+1}(p) + K_2 \hat{e}_k(p).$$

С учетом (14) уравнения (10)–(13) запишутся следующим образом:

$$(15) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= (A(\delta) - FC)\tilde{\eta}_{k+1}(p) + (\Delta A + \Delta BK_1)\hat{\eta}_{k+1}(p) + \\ &\quad + \Delta BK_2 \hat{e}_k(p) - FG\Delta\omega_{k+1}(p-1) + D\Delta\nu_{k+1}(p-1) \\ \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= FC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + (A + BK_1)\hat{\eta}_{k+1}(p) + \\ &\quad + BK_2 \hat{e}_k(p) + FG\Delta\omega_{k+1}(p-1) \\ \hat{e}_{k+1}(p) &= -CFC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - C(A + BK_1)\hat{\eta}_{k+1}(p) + \\ &\quad + (I - CBK_2)\hat{e}_k(p) - CFG\Delta\omega_{k+1}(p-1). \end{aligned}$$

Обозначим $\bar{\eta}_{k+1}(p) = [\tilde{\eta}_{k+1}(p)^T \quad \hat{\eta}_{k+1}(p)^T]^T$. Тогда уравнения замкнутой системы (15) в более компактном виде запишутся в стандартной форме линейного дискретного повторяющегося процесса

$$(16) \quad \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{k+1}(p+1) \\ \hat{e}_{k+1}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\delta) & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{k+1}(p) \\ \hat{e}_k(p) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(\delta) &= \begin{bmatrix} A(\delta) - FC & \Delta A + \Delta BK_1 C \\ FC & A + BK_1 C \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} \Delta BK_2 \\ BK_2 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -CFC \\ -C(A + BK_1 C) \end{bmatrix}, \quad A_{22} = I - CBK_2, \\ \Delta A(\delta) &= \sum_{j=1}^l \delta_j A_j, \quad \Delta B(\delta) = \sum_{j=1}^l \delta_j B_j, \quad K = [K_1 \quad K_2]. \end{aligned}$$

4. Основной результат

Закон управления с итеративным обучением (7), (14) должен обеспечивать условия сходимости (5). Чтобы найти матрицы K_1 и K_2 , гарантирующие это свойство, воспользуемся дивергентным методом векторных функций Ляпунова для переключаемых стохастических повторяющихся процессов [18].

Определение 1. Дискретный повторяющийся процесс (16) называется устойчивым вдоль повторений по второму моменту, если

$$(17) \quad \lim_{k,p \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\bar{\eta}_k(p)\|^2 + \|\hat{e}_k(p)\|^2] \leq \Gamma < \infty,$$

где Γ не зависит от N .

Определим векторную функцию Ляпунова вида

$$(18) \quad V(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_1(\xi) \\ V_2(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y},$$

где $V_1(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$, $V_2(\epsilon) > 0$, $\epsilon \neq 0$, и $V_1(0) = 0$, $V_2(0) = 0$.

Определим дискретный аналог дивергенции (18) следующим образом:

$$(19) \quad \mathcal{D}V(\xi, \epsilon) = \mathbb{E}[V_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1)) | \bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi, \hat{e}_k(t) = \epsilon] - V_1(\xi) + \\ + \mathbb{E}[V_2(\hat{e}_{k+1}(p)) | \bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi, \hat{e}_k(p) = \epsilon] - V_2(\epsilon).$$

Теорема 1. Если существует векторная функция Ляпунова (18) и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 , и γ такие, что

$$(20) \quad c_1 \|\xi\|^2 \leq V_1(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2,$$

$$(21) \quad c_1 \|\epsilon\|^2 \leq V_2(\epsilon) \leq c_2 \|\epsilon\|^2,$$

$$(22) \quad \mathcal{D}V(\xi, \epsilon) \leq \gamma - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2),$$

тогда повторяющийся процесс (16) устойчив вдоль повторений по второму моменту. Кроме того, для $k \neq k_s$ выполняются условия сходимости (5) и ограниченности (6).

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 1 из [18] с учетом, что в рассматриваемом случае V_2 не зависит от переключений вместо оценок (3.16), (3.17), из упомянутого доказательства соответственно получим

$$(23) \quad \mathbb{E}[\|\bar{\eta}_{k+1}(p)\|^2] \leq \frac{1}{c_1} \left[\lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \mathbb{E}[V_2(\hat{e}_0(q))] \right] + \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2},$$

$$(24) \quad \mathbb{E}[\|\hat{e}_k(p-1)\|^2] \leq \frac{1}{c_1} \left[\lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \mathbb{E}[V_2(\hat{e}_0(q))] \right] + \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2},$$

где $0 < \lambda < 1$. Поскольку величина $\hat{e}_0(q) = y_{ref1}(q) - C\hat{x}_0(q)$ ограничена при всех $0 \leq q \leq N-1$, то существует $\bar{\mu} > 0$, такое что $\|\hat{e}_0(q)\|^2 \leq \bar{\mu}$ и в соответствии с (21)

$$(25) \quad \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} V_2(\bar{e}_0(q)) \leq c_2 \bar{\mu} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda^{p-1-q} = \frac{c_2 \bar{\mu}}{1-\lambda}.$$

Из (23) с учетом (25) следует (5) с $\kappa = \frac{c_2 \bar{\mu}}{c_1(1-\lambda)}$, $\rho = \lambda$ и $\mu = \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}$.

Далее заметим, что при отсутствии случайных возмущений, действующих на объект, и шумов измерений теорема 1 будет справедлива при $\gamma = 0$. Тогда, в соответствии с (23), (24)

$$\mathbb{E}[\|\hat{\eta}_{k+1}(p)\|^2] \leq \mathbb{E}[\|\bar{\eta}_{k+1}(p)\|^2] \leq \kappa \rho^k, \quad \mathbb{E}[\|\hat{e}_k(p)\|^2] \leq \kappa \rho^k$$

и с учетом (14) из (7) следует (6). Теорема доказана.

В момент изменения опорной траектории за счет появления переходной ошибки может нарушиться монотонная сходимость и на некотором числе повторений достигнутая точность слежения может выйти за пределы допуска. Следовательно, закон управления должен быть разработан таким образом, чтобы при изменении опорной траектории происходила компенсация переходной ошибки. Поскольку параметры системы неизвестны, используем следующий подход: на повторении k_s переключимся на закон управления, который минимизирует ошибку обучения на этом повторении для системы с номинальными параметрами в установившемся режиме. Тогда можно ожидать, что при определенном разбросе неопределенных параметров системы ошибка обучения останется в пределах допуска.

Полагая $k \neq k_s - 1$, выберем компоненты векторной функции Ляпунова (18) в виде квадратичных форм

$$V_1(\xi) = \xi^T P_1 \xi, \quad V_2(\epsilon) = \epsilon^T P_2 \epsilon,$$

где $P_1 > 0$ и $P_2 > 0$ и вычислим стохастический аналог дивергенции этой функции в силу (16):

$$DV(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^T (\Phi^T(\delta) P \Phi(\delta) - P) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} + 2(\text{tr}[P_1 S_1] + \text{tr}[P_2 S_2]),$$

где

$$P = \text{diag}[P_1 \quad P_2], \quad \Phi(\delta) = \bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)KH, \quad K = [K_1 \quad K_2],$$

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} A(\delta) - FC & \Delta A(\delta) & 0 \\ FC & A & 0 \\ -CFC & -CA & I \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} \Delta B(\delta) \\ B \\ -CB \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} DS_\nu D^T + FGS_\omega G^T F^T & -F^T GS_\omega G^T \\ -FGS_\omega G^T & FGS_\omega G^T F^T \end{bmatrix}.$$

Введем

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} A(\delta) - FC & \Delta A(\delta) & 0 \\ FC & A & 0 \\ -CFC & -CA & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} \Delta B(\delta) \\ B \\ -CB \end{bmatrix}.$$

Пусть матрицы P и K удовлетворяют билинейному матричному неравенству

$$(26) \quad (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)KH)^T P (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)KH) - P + Q + (KH)^T R KH \leq 0, \quad \delta \in \mathbf{D},$$

где $Q = \text{diag}[Q_1 \quad Q_2] \succ 0$ и $R \succ 0$ — весовые матрицы, которые подлежат выбору. Они аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, и их выбор осуществляется на основе результатов этой теории.

Следуя известным в технике линейных матричных неравенств преобразованиям [23], получим, что разрешимость неравенства (26) эквивалентна разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно переменных X , Y и Z :

$$(27) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)YH)^T & X & (YH)^T \\ (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)YH) & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ YH & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}_v,$$

$$HX = ZH,$$

$$X = \text{diag}[X_1 \ X_2], \quad X_1 = \text{diag}[X_{11} \ X_{22}].$$

Если эти ЛМН разрешимы, то $P = X^{-1}$ и $K = YZ^{-1}$.

Следующая теорема служит теоретическим обоснованием конструкции УИО с переключением.

Теорема 2. Управление с итеративным обучением, обеспечивающее сходимость ошибки обучения для системы (1) в смысле (5), (6), определяется соотношением (7).

- 1) При $k \neq k_s - 1$ корректирующая поправка имеет вид (14), где матрицы K_1 и K_2 находятся в результате решения ЛМН (27).
- 2) При $k = k_s - 1$ корректирующая поправка определяется по формуле

$$(28) \quad \Delta u_{k_s}(p-1) = -(CB)^{-1}[CA\hat{\eta}_{k_s}(p) - \hat{e}_{k_s-1}(p) - r(p)]$$

и обеспечивает минимизацию переходной среднеквадратической ошибки, вызванной изменением эталонной траектории для системы с номинальными параметрами в установившемся режиме оценивания ($\hat{\eta}_k(p) = 0$).

Доказательство.

- 1) При $k \neq k_s - 1$, если ЛМН (27) разрешимы, то корректирующая поправка (14) обеспечивает выполнение условий теоремы 1 при

$$c_1 = \min \lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2), \quad c_2 = \max \lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2),$$

$$c_3 = \lambda_{\min}(Q + (KH^T)RKH) \quad \text{и} \quad \gamma = 2(\text{tr}[P_1S_1] + \text{tr}[P_2S_2]).$$

- 2) При $k = k_s - 1$ введем в рассмотрение локальный функционал

$$(29) \quad J_s = E[|\hat{e}_{k_s}|^2 | \hat{e}_{k_s-1}(p) = \epsilon, \hat{\eta}_{k_s-1}(p) = \xi],$$

который, следуя принятой концепции, будем минимизировать при условии, что оценка достаточно близка к установившемуся значению, фор-

мально это будет означать $\tilde{\eta}_k(p) = 0$. Тогда, в соответствии с (13), \hat{e}_{k_s} будет удовлетворять уравнению:

$$(30) \quad \hat{e}_{k_s}(p) = -CA\hat{\eta}_{k_s}(p) + \hat{e}_{k_s-1}(p) - CB\Delta u_{k_s}(p-1) - \\ - CFG\Delta\omega_{k_s}(p-1) + r(p).$$

Функционал (29) характеризует переходную среднеквадратическую ошибку системы с номинальными параметрами, вызванную изменением эталонной траектории. Это является мотивацией для нахождения корректирующей поправки на рассматриваемом повторении из условия минимума (29). Решение задачи минимизации (29) при условии (30) дает (28). Прямой подстановкой (28) в (10)–(13) и последующими непосредственными вычислениями можно убедиться, что при $k+1 = k_s$ все переменные остаются ограниченными в среднем квадратическом.

Таким образом, условия сходимости ошибки обучения для системы (1) выполнены. Теорема доказана.

5. Пример

Рассмотрим модель однозвенного манипулятора с гибким звеном [19], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения. Манипулятор во время первых $k_s - 1$ повторений перемещает груз одной массы вдоль заданной опорной траектории, а начиная с повторения k_s , начинает перемещать груз другой массы по другой опорной траектории. Из-за изменения массы транспортируемых грузов момент инерции подвижной части манипулятора (гибкого звена) также изменяется, и динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается следующими уравнениями линейного дифференциального повторяющегося процесса

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_c(\delta(t))x_k(t) + B_c u_k(t) + Dv_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t) + Gw_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где $x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$, θ — угол поворота сервопривода, α — угол отклонения гибкого звена

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

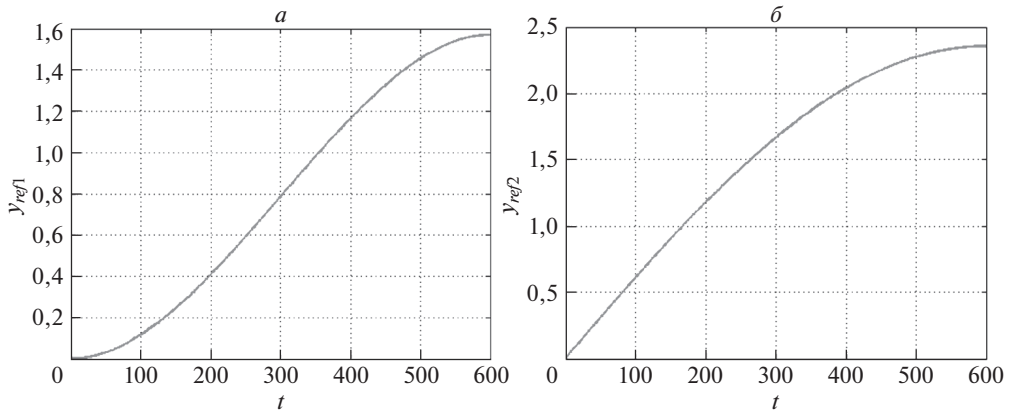


Рис. 1. Желаемая траектория движения гибкого звена $a - y_{ref1}$ (до переключения k_s), $b - y_{ref2}$ (в момент и после переключения k_s).

B_{eq} — коэффициент вязкого трения сервопривода, K_s — жесткость гибкого звена, J_l — момент инерции гибкого звена относительно центра масс, J_{eq} — момент инерции сервопривода. Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости, $v_k(t)$ — внешнее возмущение, действующее на механическую часть и $w_k(t)$ — шум измерений. Источником случайного внешнего возмущения являются высокочастотные промышленные вибрации, действующие на гибкое звено. В рассматриваемом масштабе такие вибрации адекватно описываются гауссовским белым шумом. Интенсивность внешнего возмущения будем считать равной Q_n , интенсивность шума измерений — R_n .

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная $y(t)$ воспроизводила бы эталонную траекторию $y_{ref}(t)$ с заданной точностью. Непосредственному измерению доступен только угол θ .

Эталонная траектория задает изменение угла поворота сервопривода θ для обеспечения захвата и размещения груза за время T . Эта траектория представлена на рис. 1 и описывается уравнениями

$$(32) \quad y_{ref}(t) = \begin{cases} y_{ref1}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, & k < k_s, \\ y_{ref2}(t) = \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi t}{6}, & k \geq k_s, \end{cases} \quad t \in [0 \ T].$$

Для расчетов и моделирования были приняты следующие значения параметров из [19]: $B_{eq} = 0,004$ Н·м/(рад/с), $K_s = 1,3$ Н·м/рад, $J_l = 0,0057$ кг·м², $J_{eq} = 2,08 \times 10^{-3}$ кг·м². Продолжительность цикла повторения $T = 3$ с. Требуемую точность будем оценивать по предельной величине среднеквадрати-

ческой ошибки $E(k) = E^* = 0,05$ рад, где $E(k)$ вычисляется по формуле

$$(33) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \|e_k(p)\|^2}.$$

При вычислениях использовался метод дискретизации Эйлера с шагом $T_s = 0,005$ с. Дискретизация по времени дифференциальной динамики (31) дает модель в пространстве состояний (1) для синтеза УИО с $A(\delta(p)) = (I + A_c(\delta(t))T_s)$, $B = B_c T_s$, $D = [T_s B Q_n B^T]^{1/2}$, $G = (R_n/T_s)^{1/2}$ [22], для дальнейших расчетов будем считать $Q_n = 1,6 \cdot 10^{-5}$ и $R_n = 2 \cdot 10^{-5}$.

В данном примере $CB = 0$, а разработанная теория предполагает, чтобы $CB \neq 0$. С целью обойти это затруднение воспользуемся тем, что для данной системы

$$\dot{y}_k = C \dot{x}_k = C_1 x_k,$$

где $C_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ и $C_1 B \neq 0$. Дискретизация по Эйлера с шагом T_s дает

$$y_k(p+1) = (C + C_1 T_s) x_k(p) = \bar{C} x_k(p),$$

где $\bar{C} = C + C_1 T_s$.

Поскольку вектор состояния недоступен измерению, для дальнейшего синтеза управления используется оценка вектора состояния $\hat{x}_k(p)$, полученная с помощью фильтра Калмана (8) на повторении k , и тогда

$$\hat{y}_k(p+1) = \bar{C} \hat{x}_k(p)$$

и вместо ошибки используется оценка ошибки

$$\hat{e}_k(p+1) = y_{ref}(p+1) - \bar{C} \hat{x}_k(p).$$

Тогда ошибка обучения при $k+1 \neq k_s$ опишется уравнением

$$(34) \quad \hat{e}_{k+1}(p+1) = \hat{e}_k(p+1) - \bar{C}[A\hat{\eta}_{k+1}(p) + FC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + B\Delta u_{k+1}(p-1) + FG\Delta\omega_{k+1}(p-1)],$$

а при $k+1 = k_s$

$$(35) \quad \hat{e}_{k_s}(p+1) = \hat{e}_{k_s-1}(p+1) - \bar{C}[A\hat{\eta}_{k_s}(p) + FC\tilde{\eta}_{k_s}(p) + B\Delta u_{k_s}(p-1) + FG\Delta\omega_{k_s}(p-1)] + r(p+1),$$

где $r(p+1) = y_{ref_2}(p+1) - y_{ref_1}(p+1)$.

Далее для синтеза УИО можно использовать модель приращений (16) с учетом того, что ошибка обучения формируется в виде (34), (35).

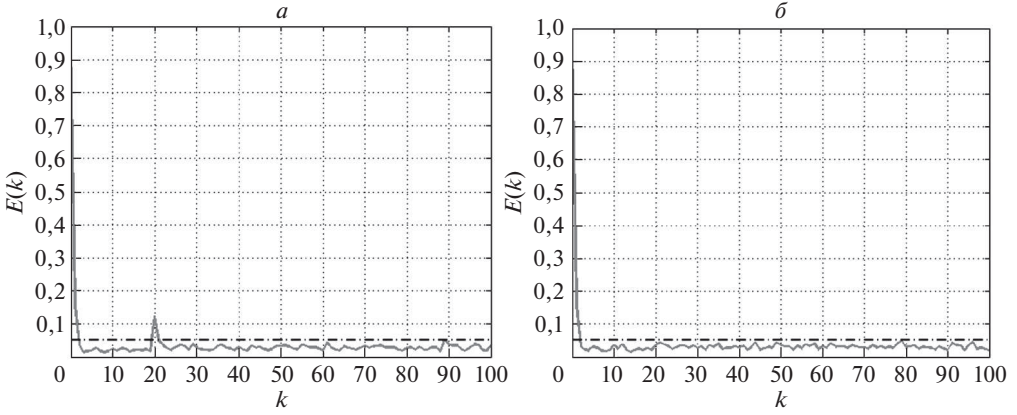


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка обучения $E(k)$ при использовании на повторении $k_s = 20$ закона управления a — без переключения (36), b — с переключением (36), (37). Штрихпунктирной линией обозначено предельно допустимое значение среднеквадратической ошибки $E^* = 0,05$ рад.

Выберем корректирующую поправку в виде

$$\Delta u_{k+1}(p-1) = K_1 \hat{\eta}_{k+1}(p) + K_2 \hat{e}_k(p).$$

Тогда закон УИО при $k > k_s$ и $k < k_s$ будет иметь вид

$$(36) \quad u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_2 \hat{e}_{k-1}(p+1), \quad k \neq k_s,$$

а в момент переключения при $k = k_s$

$$(37) \quad u_{k_s}(p) = u_{k_s-1}(p) - (\bar{C}B)^{-1} \bar{C}A(\hat{x}_{k_s}(p) - \hat{x}_{k_s-1}(p)) + (\bar{C}B)^{-1} \hat{e}_{k_s-1}(p+1).$$

Поскольку манипулятор перемещает грузы различных масс, то из-за изменения массы грузов момент инерции гибкого звена изменяется, т.е. может принимать значения от $J_l + \Delta \underline{J}_l$ до $J_l + \Delta \overline{J}_l$. В этом случае матрица параметров $A_c(\delta)$ будет иметь следующий вид:

$$A_c(\delta) = A_c + A_a(\delta), \quad A_a(\delta) = \delta A_c, \quad \delta = [\underline{J}_l; \overline{J}_l].$$

Для дальнейших расчетов возьмем $\Delta \overline{J}_l = \frac{1}{3} J_l$, $\Delta \underline{J}_l = -\frac{1}{3} J_l$. Матрица усиления фильтра при заданных ковариационных матрицах шумов находится с помощью стандартной функции `dlqr` пакета `MATLAB`:

$$F = [0,2220 \quad -0,1501 \quad 3,9983 \quad -3,0935].$$

Замечание 2. Для построения данного фильтра были выбраны параметры нижней границы области неопределенности, поскольку, как показывает моделирование, такой фильтр обеспечивает требуемую точность при заданном разбросе неопределенных параметров, в то время как фильтр с номинальными параметрами эту точность не обеспечивает.

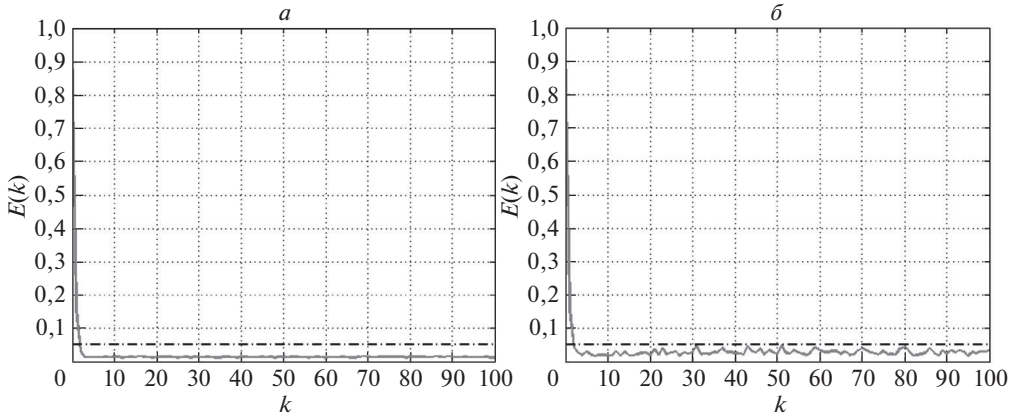


Рис. 3. Среднеквадратическая ошибка обучения $E(k)$ при использовании на повторении $k_s = 20$ закона управления с переключением (36), (37) при выборе параметров модели a — на нижней границе области неопределенности, b — на верхней границе области неопределенности. Штрихпунктирной линией обозначено предельно допустимое значение среднеквадратической ошибки $E^* = 0,05$ рад.

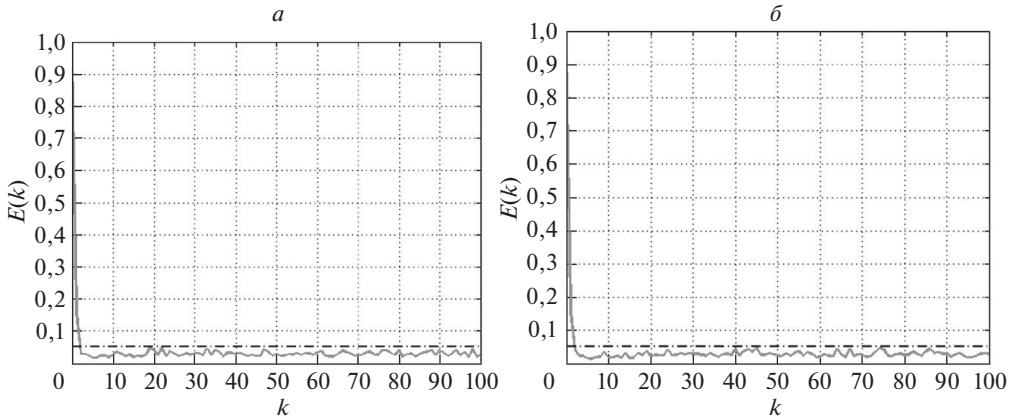


Рис. 4. Среднеквадратическая ошибка обучения $E(k)$ при использовании на повторении $k_s = 20$ закона управления с переключением (36), (37) a — без ограничения на управление, b — при ограничении на управление. Штрихпунктирной линией обозначено предельно допустимое значение среднеквадратической ошибки $E^* = 0,05$ рад.

Решая неравенства (27) с учетом очевидных изменений матриц $A_{11}(\delta)$, A_{12} , A_{21} , A_{22} , и задавая $Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2]$, $Q_1 = 10^{-5}I$, $Q_2 = 10^8I$, $R = 1$, получим

$$K_1 = [-74,7601 \ 0,9671 \ -1,0629 \ -0,2729], \quad K_2 = 62,4502.$$

В момент переключения матрицы усиления в (37) имеют следующие значения:

$$-(\bar{C}B)^{-1}\bar{C}A = [-83,2000 \ -1,3000 \ -0,8280 \ 0], \quad (\bar{C}B)^{-1} = [83,2000].$$

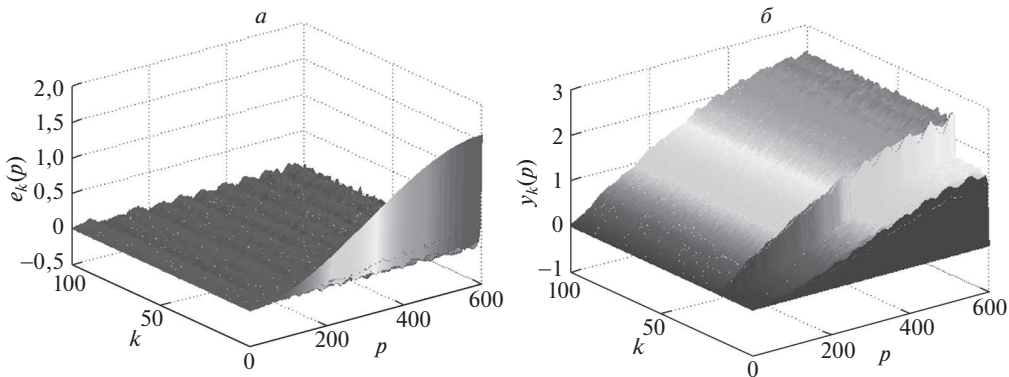


Рис. 5. Изменение *а* — ошибки $e_k(p)$ и *б* — выходной переменной $y_k(p)$ в зависимости от времени p и повторения k при использовании на повторении $k_s = 20$ закона управления с переключением (36), (37).

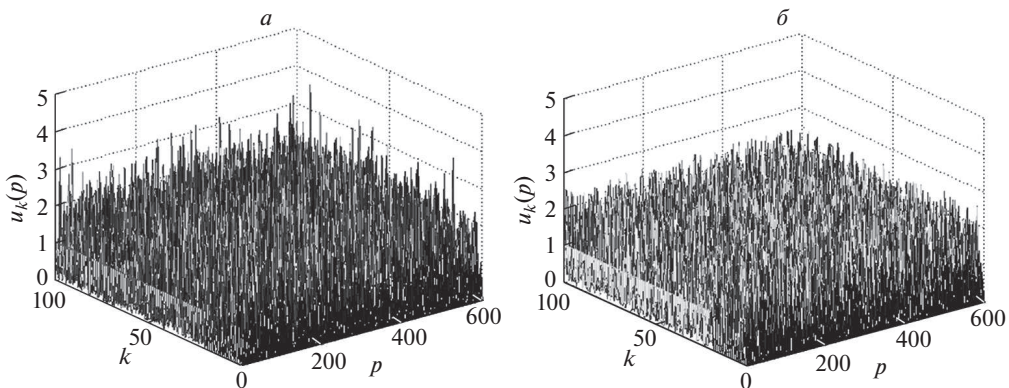


Рис. 6. Управление $u_k(p)$ *а* — без ограничения, *б* — с ограничением $u_m \leq 2,5$.

На первом графике рис. 2 показана среднеквадратическая ошибка обучения (33), когда на повторении $k_s = 20$ (в момент изменения желаемой траектории) применяется закон управления без переключения (36). В этом случае видны скачкообразное увеличение ошибки и ее выход за пределы допуска. Результат применения закона управления с переключением (36), (37) показан на втором графике рис. 2, где скачок ошибки значительно меньше и не выходит за пределы допуска. Параметры модели в данном случае были взяты соответствующими верхней границе области неопределенности.

Для проверки робастности алгоритма компенсации сравним процессы на границах области неопределенности — верхней и нижней. На рис. 3, *а* представлена среднеквадратическая ошибка обучения (33) при выборе параметров модели на нижней границе области неопределенности, на рис. 3, *б* — на верхней границе. Из графиков видно, что несмотря на то что алгоритм компенсации построен по номинальной модели, он тем не менее, способен компен-

сировать переходную ошибку при рассматриваемом разбросе неопределенных параметров.

Кроме того, с точки зрения анализа робастности, представляет интерес оценить эффект ограничения управления. На первом графике рис. 4 представлена среднеквадратическая ошибка обучения (33) при использовании на повторении $k_s = 20$ закона управления с переключением (36), (37) без ограничения на управление. На втором графике рис. 4 — при ограничении на управление $u_m \leq 2,5$. Из графиков видно, что ограничение управления не оказывает существенного влияния на динамику процесса обучения, что подтверждает робастность разработанного закона УИО с переключением. В данном случае рассматривалась модель с параметрами верхней границы неопределенности. Заметим, что при учете ограничений система становится нелинейной и эти результаты, не имея теоретического обоснования, носят чисто иллюстративный характер.

На рис. 5 представлено изменение ошибки $e_k(p)$ и выходной переменной $y_k(p)$ в зависимости от времени p и повторения k для случая, рассмотренного на рис. 2,б. На рис. 6,а представлено управление без ограничения, на рис. 6,б — с ограничением $u_m \leq 2,5$ для случая, рассмотренного на рис. 4.

6. Заключение

В данной работе разработан метод синтеза управления с итеративным обучением системой с неопределенными параметрами, функционирующей в повторяющемся режиме в условиях изменяемой эталонной траектории при учете случайных возмущений и шумов измерений. Приведенный пример подтверждает работоспособность предложенного закона управления как с точки зрения скорости сходимости процесса обучения, так и с точки зрения компенсации переходной ошибки, вызванной изменением эталонной траектории. Несмотря на это, вопросы выбора модели фильтра и построения алгоритма переключения с целью компенсации переходной ошибки требуют более глубокого и расширенного изучения, поскольку предложенный в данной работе подход в решении этих вопросов использует элементы эвристики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. *Tsytkin Ya.Z.* Adaptation and Learning in automatic systems. New York: Academic Press, 1971 (Translated by Z.J. Nikolic).
2. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
3. *Garden M.* Learning control of actuators in control systems, U.S. Patent 3555252, 1971.
4. *Uchiyama M.* Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial // Trans. Soc. Instrument Contr. Engineers. 1978. V. 14. 6. P. 706–712.

5. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. 1984. V. 1. P. 123–140.
6. *Craig J.J.* Adaptive control of manipulators through repeated trials // Proc. Amer. Contr. Conf. 1984. P. 1566–1573.
7. *Casalino G., Bartolini G.* A learning procedure for the control of movements of robotic manipulators // Proc. IASTED Symp. Robot. Automat. 1984. P. 108–111.
8. *Kawamura S., Miyazaki F., Arimoto S.* Iterative learning control for robotic systems // Proc. Int. Conf. Ind. Electron., Contr. and Instrum. 1984. P. 393–398.
9. *Ahn H-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
10. *Saez M.A., Maturana F.P., Barton K., Tilbury D.M.* Context-Sensitive Modeling and Analysis of Cyber-Physical Manufacturing Systems for Anomaly Detection and Diagnosis // IEEE Transaction on Automation Science and Engineering. 2020. V. 17. No. 1. P. 29–40.
11. *Qamsane Y., Balta E.C., Moyne J., Tilbury D., Barton K.* Dynamic rerouting of cyber-physical production systems in response to disruptions based on SDC framework // Proc. American Control Conference. 2019. P. 3650–3657.
12. *Balta E.C., Tilbury D.M., Barton K.* Switch-Based Iterative Learning Control for Tracking Iteration Varying References // IFAC PapersOnLine. 2020. V. 20. Issue. 2. P. 1493–1498.
13. *Hoelzle D.J., Alleyne A.G., Johnson A.J.W.* Basis task approach to iterative learning control with applications to micro-robotic deposition. // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2010. V. 19 (5). P. 1138–1148.
14. *Zundert J., Bolder J., Oomen T.* Optimality and flexibility in iterative learning control for varying tasks // Automatica. 2016. V. 67. P. 295–302.
15. *Altin B., Wang Z., Hoelzle D.J., Barton K.* Robust monotonically convergent spatial iterative learning control: Interval systems analysis via discrete Fourier transform // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2018. V. 27(6). P. 2470–2483.
16. *Balta E.C., Tilbury D.M., Barton K.* Control-oriented modeling and layer-to-layer stability for fused deposition modeling: a kernel basis approach // Proc. Amer. Control Conf. (ACC). 2019. P. 4727–4733.
17. *Guo Y., Mishra S.* A predictive control algorithm for layer-to-layer ink-jet 3D printing // Proc. Amer. Control Conf. (ACC). 2016. P. 833–838.
18. *Пакшин П.В., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // АИТ. 2020. № 11. С. 93–111.
Pakshin P.V., Emelianova J.P. Iterative learning control design for discrete-time stochastic switched systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 11. P. 2011–2025.
19. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.
20. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M.* Iterative learning control of stochastic linear systems under switching of the reference trajectory and parameters // Proc. 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2021), 2021, P. 1311–1316, 9480192.

21. *Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K.* Iterative Learning Control of Stochastic Linear Systems with Reference Trajectory Switching // Proc. 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) December 13–15, 2021. Austin, Texas, 2021, P. 6565–6570.
22. *Franklin G.F., Powell J.D., Workman M.L.* Digital Control of Dynamical Systems. Third edition. Ellis-Kagle Press, 2006.
23. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.

Поступила в редакцию 21.02.2022

После доработки 25.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022