

© 2023 г. В.П. ИВАНОВ, д-р техн. наук (vladguc@ipu.ru),  
В.К. ЗАВАДСКИЙ, канд. техн. наук (vladguc@ipu.ru),  
А.А. МУРАНОВ, канд. техн. наук (vladguc@ipu.ru),  
А.И. ЧАДАЕВ, канд. техн. наук (vladguc@ipu.ru),  
Е.Б. КАБЛОВА (vladguc@ipu.ru),  
Л.Г. КЛЕНОВАЯ (vladguc@ipu.ru),  
Е.И. ТРОПОВА (vladguc@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА МАСС И РАСХОДОВАНИЕМ ТОПЛИВА ЖИДКОСТНЫХ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Работа посвящена памяти академика Б.Н. Петрова и развивает сформулированные им принципы терминального управления движением ракет-носителей. Применительно к ракетам-носителям нового поколения реализуется принцип взаимосвязанного, согласованного терминального управления движением центра масс и расходом топлива. Постановка задачи синтеза такого управления и основных принципов его реализации рассматривается в данной статье.

*Ключевые слова:* терминальное управление, прогнозирующая модель.

**DOI:** 10.31857/S0005231023100045, **EDN:** ТВ1СЛА

### 1. Введение

Начало творческой деятельности Б.Н. Петрова пришлось на время, когда наша изнуренная войной страна совершила гигантский прорыв, открыв человечеству дорогу в космос. В этом прорыве значительную роль сыграла советская наука. В проблемах, связанных с созданием ракет-носителей, весомую долю занимали задачи теории автоматического управления подвижными объектами. Глубокие знания в этой области и высокая эрудированность Б.Н. Петрова позволили ему активно включиться в разработку новых, уникальных для того времени задач автоматического управления, участвовать в разработке и обсуждении космических программ нашей страны наряду с ведущими деятелями ракетно-космической науки и техники.

Он по праву вошел в состав основоположников отечественной космонавтики, работая в течение многих лет в тесном контакте с С.П. Королевым, В.П. Глушко, М.К. Янгелем, В.Н. Челомеем, В.Ф. Уткиным, Н.А. Пилюгиным.

Результаты работ Б.Н. Петрова и возглавляемого им коллектива Института по исследованию динамики, разработке методов моделирования и регулирования жидкостного ракетного двигателя изменением тяги и коэффициента соотношения компонентов топлива используются во многих бортовых терминальных системах. Эти системы существенно повышают энергетику ракет путем резкого сокращения гарантийных запасов топлива. Значимость этих работ отмечается в книге Б.Е. Чертока «Ракеты и люди» [1].

Понимание специфики по назначению бортовых терминальных систем и особенности способа организации процессов управления позволили Б.Н. Петрову и его ученикам выделить эти системы в самостоятельный класс среди других систем автоматического управления. Принципы построения и элементы теории этого класса систем развиты в монографии «Бортовые терминальные системы управления» [2].

Идеи Б.Н. Петрова получили дальнейшее развитие и применение в современных разработках Института в области ракетно-космической техники и воплотились в создание терминальных систем управления нового поколения ракет-носителей и разгонных блоков космического и оборонного назначения (модернизированных РН «Союз-2», семейства РН «Ангара», РН «Сармат», разрабатываемых РН «Союз-5», РН «Амур» и РБ КВТК).

Применительно к ракетам-носителям нового поколения реализуется принцип взаимосвязанного, согласованного терминального управления движением центра масс и расходом топлива. Постановка задачи синтеза такого управления и основных принципов его реализации рассматривается в данной статье.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим управление движением центра масс ракеты-носителя на безатмосферном участке полета.

В целях упрощения вводятся следующие предположения:

- аэродинамические силы отсутствуют,
- поле земного притяжения является плоскопараллельным, ускорение силы притяжения постоянно для всех высот  $\vec{g} = \text{const}$ ,
- вращение Земли отсутствует.

Движение центра масс ступени ракеты-носителя в продольной плоскости (плоскости выведения) на безатмосферном участке полета описывается следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{V}_x = \frac{P}{m_\kappa + m} \cos(\vartheta), & \dot{V}_y = \frac{P}{m_\kappa + m} \sin(\vartheta) - g, & P = wr, \\ \dot{x} = V_x, & \dot{y} = V_y, & \dot{m} = -r, \\ \dot{\vartheta} = \omega, \\ \dot{\omega} = \varphi(\vartheta, \omega, \vartheta_{\text{тр}}), \end{cases}$$

где  $x, y$  — горизонтальная и вертикальная координаты,  $m$  — масса топлива,  $m_\kappa$  — масса сухой ступени,  $r$  — секундный расход топлива,  $w$  — характеристическая скорость истечения,  $P$  — тяга двигателя,  $g$  — ускорение силы притяжения,  $\vartheta$  — угол тангажа,  $\vartheta_{\text{тр}}$  — управляющее воздействие (требуемое значение  $\vartheta$ ) по изменению угла тангажа,  $V_x, V_y$  — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости.

В (1) уравнение для  $\vartheta$  угла тангажа и  $\omega$  угловой скорости упрощенно описывает работу системы стабилизации.

Координаты  $x, y, m, \vartheta$  и их производные являются функциями времени  $t$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ ,  $t_k$  — терминальный момент времени.

Отметим, что переходные процессы изменения угла тангажа  $\vartheta$  до значения  $\vartheta_{\text{тр}}(t)$  зачисляются за время, существенно меньшее момента времени  $t_k$ .

Для конечной ступени требуется достижение заданной высоты при нулевой вертикальной скорости:

$$(2) \quad \begin{cases} y(t_k) = y_k, \\ V_y(t_k) = 0. \end{cases}$$

На горизонтальную составляющую скорости конечного условия не задается. При решении задачи предполагается максимизация горизонтальной составляющей.

Для нижних ступеней ракеты ставится задача попадания в заданные районы паления отработанной ступени. В этом случае граничные условия можно определить для отклонения дальности полета  $L$  отработанной ступени из-за отклонений координат движения в конце полета от заданных значений:

$$(3) \quad \begin{aligned} \delta L = & \zeta_x(x(t_k) - x_k) + \zeta_y(y(t_k) - y_k) + \\ & + \zeta_{V_x}(V_x(t_k) - V_{xk}) + \zeta_{V_y}(V_y(t_k) - V_{yk}) = 0, \end{aligned}$$

где  $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_{V_x}, \zeta_{V_y}$  — частные производные  $\delta L$  по координатам движения,  $\delta$  — отклонение дальности полета от заданного значения.

Уравнения, определяющие изменение кажущейся скорости и процессы расходования компонентов топлива через двигатель, могут быть записаны в следующем виде:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{W} = & \frac{rg}{m_\kappa + m} P_{y\partial}, \quad P_{y\partial} = \frac{w}{g}, \quad m = m_o + m_z, \quad r = r_o + r_z, \\ \dot{m}_o = & -r_o, \quad \dot{m}_z = -r_z, \quad K_m = \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_z}, \quad P_{y\partial} = \varphi(K_m), \\ \dot{r}_o = & f_o(r_o, \alpha_{K_m}, \alpha_R), \quad \dot{r}_z = f_z(r_z, \alpha_{K_m}, \alpha_R), \end{aligned}$$

с начальными условиями, определяемыми с учетом погрешностей заправки и разброса достартовых расходов компонентов топлива, на момент времени, соответствующий включению системы управления расходованием топлива (СУРТ) в работу  $m_o(t_0), m_z(t_0)$ , определяемыми с учетом погрешностей заправки и разброса достартовых расходов компонентов топлива.

Здесь  $m_o, m_z$  — массы окислителя и горючего,  $P_{y\partial}$  — удельная тяга двигательной установки,  $r_o, r_z$  — секундные расходы компонентов топлива, определяемые уравнениями двигателя,  $\alpha_{K_m}, \alpha_R$  — положения регулирующих органов двигателя, определяемые заданными значениями коэффициента соотношения расходов компонентов через двигатель  $K_m$  и режима работы двигателя по тяге  $R$ .

Все координаты  $W, m_o, m_z, r_o, r_z$  и их производные являются функциями времени, рассматриваются на ограниченном интервале  $t, t \in [t_0, t_k], t_k$  — терминальный момент времени.

Положения регулирующих органов двигателя, при которых реализуются требуемые для цели управления значения коэффициента  $K_m(t)$  соотношения расходов компонентов топлива и режима  $R(t)$  работы двигателя по тяге, определяются статическими нелинейными уравнениями двигателя:

$$\alpha_{K_m}(t) = f_{K_m}(K_m(t), R(t)), \quad \alpha_R(t) = f_R(K_m(t), R(t)), \quad R(t) = \frac{P(t)}{P_{\text{НОМ}}}(t).$$

Здесь предполагается, что  $K_m(t)$  вычисляется в алгоритме терминальной системы для управления объектом (3), а  $R(t)$  определяется заданной программой изменения тяги двигателя.

Отметим, что переходные процессы изменения расходов компонентов топлива  $r_o$ ,  $r_z$  при изменении положения регулирующих органов двигателя  $\alpha_{K_m}(t)$ ,  $\alpha_R(t)$  заканчиваются за время, существенно меньшее момента времени  $t_k$ .

На величину коэффициента соотношения расходов компонентов топлива, которая может изменяться в процессе управления, накладываются ограничения. Граничные значения задаются исходя из условий устойчивой работы двигателя и существенным образом зависят от режима его работы по тяге:  $K_{m \min}(R, t) \leq K_m(t) \leq K_{m \max}(R, t)$ .

В данном случае конечные терминальные условия накладываются на остатки компонентов топлива в момент выключения двигателя и определяются требованиями безаварийности выключения двигателя. Конечные условия задаются в виде неравенств, означающих необходимость положительности остатков компонентов топлива в момент выключения двигателя, формируемый системой управления, относительно уровня топлива, гарантирующего безаварийный режим останова двигателя:

$$(5) \quad m_o(t_k) - m_{o \min} > 0, \quad m_z(t_k) - m_{z \min} > 0.$$

Здесь  $m_{o \min}$ ,  $m_{z \min}$  — остатки запасов компонентов топлива, не вырабатываемые из баков из-за конструктивных особенностей заборного устройства и учитывающие погрешности работы системы управления.

Величины  $m_{o \min}$ ,  $m_{z \min}$  будем включать в  $m_{\kappa}$ , а под  $m(t)$ ,  $m_o(t)$ ,  $m_z(t)$  будем понимать текущие значения масс компонентов топлива за вычетом  $m_{o \min}$ ,  $m_{z \min}$ .

Определим вектор невязок заданных граничных условий (2), (3), (5) решения терминальной задачи и вектор управляющих воздействий:

$$(6) \quad \begin{aligned} z_0 &= (y(t_k) - y_k, V_y(t_k), m_o(t_k), m_z(t_k)) \text{ — для конечной ступени ракеты,} \\ z_0 &= (\delta L, m_o(t_k), m_z(t_k)) \text{ — для нижних ступеней ракеты,} \\ u &= (\vartheta_{\text{тр}}, K_m, t_k). \end{aligned}$$

Отметим, что величина  $R$ , определяющая режим изменения тяги двигателя, является заданной функцией времени и не входит в состав вектора управляющих воздействий  $u$ . Терминальный момент времени  $t_k$  может варьироваться и использоваться в качестве управляющего параметра для решения терминальной задачи.

Основная задача терминального управления заключается в минимизации невязок граничных (краевых) условий. Кроме выполнения граничных условий, к терминальным системам предъявляются также и другие требования, физическое содержание которых могут составлять затраты энергетического ресурса, времени, потери на управление. В данной работе задача критерияльного синтеза ограничивается краевыми условиями, выполнение которых является приоритетным.

Объект управления рассматриваемой терминальной системы в части переходных процессов в заданное конечное состояние весьма инерционен (представляет собой интегрирующие звенья).

Управление этими процессами производится путем воздействия на другие координаты объекта  $\vartheta, r_o, r_z$  с быстро затухающей динамикой переходных процессов. Суть такого управления состоит в задании требуемых установившихся значений этих координат.

Управление координатами  $\vartheta, r_o, r_z$  (путем изменением положением исполнительных органов, приводов, рулей и т.д.) заключается в стабилизации этих координат объекта относительно заданных значений, определяемых вектором  $u(t)$ . Работа контура стабилизации в замкнутом виде упрощенно описывается системой уравнений для  $\vartheta, r_o, r_z$ .

В данном случае работа контура стабилизации рассматривается только в части переходных процессов реакции на изменение управляющего воздействия. Предполагается, что переходный процесс завершается на интервале, существенно меньшем, чем интервал терминального управления.

### 3. Синтез алгоритмов управления в классе кусочно-постоянных функций прогнозируемых невязок конечных условий

Задачу синтеза терминального управления объектом (1), (4) будем рассматривать в классе систем с прогнозирующей моделью.

Проинтегрируем (1) на интервале прогнозирования  $\tau \in [t, t_{\text{кпр}}]$ , где  $t_{\text{кпр}}$  — прогнозируемое значение терминального момента времени. Текущие начальные значения координат движения центра масс ракеты  $x, y, V_x, V_y$  в момент времени  $t$  определяются в инерциальной системе навигации. Вместо уравнения для массы топлива  $m(t)$  в (1) принимается уравнение для  $m_{\text{мод}}(t)$ , которое формируется в алгоритме управления расходом топлива:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{m}_{\text{мод}}(t) &= r_{\text{мод}}(t), \\ r_{\text{мод}}(t) &= r_{\text{цикл}}(t)(1 + \lambda(t)), \end{aligned}$$

где  $r_{\text{цикл}}$  — суммарный расход топлива, соответствующий заданной циклограмме режима работы двигателя по тяге,  $\lambda(t)$  — управляемый параметр модели (физическим аналогом  $\lambda(t)$  является относительное отклонение суммарного расхода от номинального значения), корректирующий  $r_{\text{цикл}}(t)$  в модели расходования топлива.

Отметим, что величина суммарного расхода топлива, соответствующего заданной циклограмме режима работы двигателя по тяге ( $r_{\text{цикл}}(t)$ ), может определяться на основе измерений кажущегося ускорения и уравнения для  $\dot{W}$ , приведенного в (4).

При интегрировании (1), (7) на интервале  $\tau \in [t, t_{\text{кпр}}]$ , где  $t_{\text{кпр}}$  будем полагать, что  $\vartheta(\tau) = \vartheta(t)$ ,  $r(\tau) = r_{\text{цикл}}(\tau)(1 + \lambda(t))$ ,  $m(\tau) = m_{\text{мод}}(\tau)$ .

Величину  $t_{\text{кпр}}$  определим из условия  $m_{\text{мод}}(t) - \int_t^{t_{\text{кпр}}} r_{\text{мод}}(\tau) d\tau = 0$ .

Определим значения прогнозируемых невязок  $y(t_{\text{кпр}}) - y_k$ ,  $V_y(t_{\text{кпр}})$ ,  $\delta L(t_{\text{кпр}})$ .

При интегрировании (1) можно воспользоваться выражениями для интегралов, приведенных в [3].

В качестве терминального момента времени  $t_k$  (выключения двигательной установки) примем значение момента времени  $t$ , при котором  $m_{\text{мод}}(t) = 0$ .

В части управления расходом компонентов топлива модель прогнозирования включает уравнение (7) и уравнения процессов изменения масс компонентов топлива (4). Принимая во внимание взаимосвязанность (7) с (4), определим уравнения для отклонений текущих значений масс окислителя и горючего от модельных аналогов, образующихся из модельного значения массы суммарного топлива в соответствии с номинальным значением коэффициента соотношения  $K_m$ :

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta m_o(t) &= m_o(t) - m_{\text{мод}}(t) \frac{K_{m \text{ ном}}}{K_{m \text{ ном}} + 1}, \\ \Delta m_r(t) &= m_r(t) - m_{\text{мод}}(t) \frac{1}{K_{m \text{ ном}} + 1}, \end{aligned}$$

где  $m_o(t)$ ,  $m_r(t)$  определяются по измерениям дискретных датчиков уровня в баках.

Для отклонений (8) могут быть получены уравнения следующего вида:

$$(9) \quad \begin{aligned} \Delta \dot{m}_o(t) &= r_o(t) - r_{\text{мод}}(t) \frac{K_{m \text{ ном}}}{K_{m \text{ ном}} + 1}, \\ \Delta \dot{m}_r(t) &= r_r(t) - r_{\text{мод}}(t) \frac{1}{K_{m \text{ ном}} + 1}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем уравнения (9) на интервале  $\tau \in [t, t_{\text{кпр}}]$  при условии  $r_o(\tau) = r_o(t)$ ,  $r_r(\tau) = r_r(t)$ ,  $r_{\text{мод}}(\tau) = r_{\text{цикл}}(\tau)(1 + \lambda(t))$  и начальных условиях  $\Delta m_o(t)$ ,  $\Delta m_r(t)$ .

Определим значения прогнозируемых невязок  $\Delta m_o(t_{\text{кпр}})$ ,  $\Delta m_r(t_{\text{кпр}})$ .

В силу прогнозирующей модели объекта (1), (4) вектор прогнозируемых невязок граничных условий (6) определим в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} z(t) &= (y_{pr}(t_{\text{кпр}}) - y_k, V_{ypr}(t_{\text{кпр}}), \Delta m_o(t_{\text{кпр}}), \Delta m_z(t_{\text{кпр}})) \text{ — для конечной} \\ &\hspace{15em} \text{ступени ракеты,} \\ z(t) &= (\delta L, \Delta m_o(t_{\text{кпр}}), m_z(t_{\text{кпр}})) \text{ — для нижней ступени ракеты,} \end{aligned}$$

а вектор управляющих воздействий в виде  $u = (\vartheta_{\text{тр}}, K_m, \lambda)$ .

При  $t \rightarrow t_k$ ,  $t_{\text{кпр}} \rightarrow t_k$ ,  $z(t) \rightarrow z_0$ .

Будем решать задачу терминального управления объектом (1), (4) путем формирования управления с обратной связью как функции прогнозируемых невязок краевых условий (10).

Обозначим через  $x_T(t) = (x(t), y(t), V_x(t), V_y(t), \Delta m_o(t), \Delta m_z(t), m_{\text{мод}}(t))$  вектор координат прогнозируемой модели объекта (1), (7), (9), дополненной уравнениями для  $\dot{m}_o, \dot{m}_z, \dot{r}_o, \dot{r}_z$ , по которым формируются невязки краевых условий, а через  $x_u(t) = (\vartheta(t), r_o(t), r_z(t), \lambda(t))$  — вектор координат, на которые непосредственно воздействуют управляющие воздействия.

Как показано в [4, 5], для вектора прогнозируемых невязок граничных условий дифференцированием  $z(t)$  как сложной функции определяются производная по времени и дифференциальное уравнение:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial z(t)}{\partial x_T(t_{\text{кпр}})} \left[ \frac{\partial x_T(t_{\text{кпр}})}{\partial x_u(t)} \frac{dx_u(t)}{d(t)} + \frac{dt_{\text{кпр}}}{dt} \frac{dx_T(t_{\text{кпр}})}{d(t)} \right].$$

Управляющие воздействия  $\vartheta_{\text{тр}}(t)$ ,  $K_m(t)$ ,  $\lambda(t)$  будем выбирать в классе кусочно-постоянных функций времени. Управляющее воздействие по углу тангажа  $\vartheta_{\text{тр}}$  изменяется дискретно в моменты времени обновления информации, поступающей от инерциальной системы навигации. Управляющие воздействия  $K_m(t)$ ,  $\lambda(t)$  на процессы расходования компонентов топлива изменяются в дискретные моменты времени измерений уровней компонентов в баках. В эти же моменты возникают переходные процессы по  $r_o(t)$ ,  $r_z(t)$  и скачкообразно изменяются величины  $r_{\text{мод}}(t)$ ,  $t_{\text{кпр}}(t)$ .

Для кусочно-постоянного управления из дифференциальных уравнений могут быть получены разностные уравнения для  $z(t)$ . Введем обозначения для компонент вектора невязок:

$$\begin{aligned} z_y(t) &= y_{pr}(t_{\text{кпр}}) - y_k, \quad z_V(t) = V_{ypr}(t_{\text{кпр}}), \\ z_{m_o}(t) &= \Delta m_o(t_{\text{кпр}}), \quad z_{m_z}(t) = \Delta m_z(t_{\text{кпр}}), \quad z_\delta(t) = \delta(t_{\text{кпр}}). \end{aligned}$$

Разностные уравнения для компонент вектора  $z(t)$  могут быть записаны в следующем виде. В части управления движением центра масс разностные уравнения определяются для дискретных моментов времени  $t_i$  обновления навигационной информации,  $i = 0, 1, 2, \dots, I$ ,  $t_{I+1} = t_k$  (при условии  $\lambda(t) = \text{const}$ ,  $t_{\text{кпр}}(t) = \text{const}$ ):

$$(11) \quad \begin{aligned} z_y(t_{i+1}) &= z_y(t_i) + \frac{\partial z_y}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i, \\ z_{V_y}(t_{i+1}) &= z_{V_y}(t_i) + \frac{\partial z_{V_y}}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i, \\ z_\delta(t_{i+1}) &= z_\delta(t_i) + \frac{\partial z_\delta}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta \vartheta_i = \int_{t_i}^{t_i + \delta t} \dot{\vartheta}(\tau) d\tau,$$

где  $\delta t$  — интервал времени переходного процесса в объекте (1) по координате  $\vartheta$  при скачкообразном изменении управляющего воздействия  $\vartheta_{\text{тр}}$  в момент времени  $t_i$ .

Кроме того, в моменты времени  $t_j$  дискретных измерений количества топлива в баках указанные выше невязки изменяются из-за изменения  $\lambda(t)$ ,  $t_{\text{кпр}}(t)$ .

Будем считать, что дискретные измерения датчиков уровней производятся в один из дискретных моментов времени обновления навигационной информации  $t_j = t_i$ . Дополним (11) слагаемыми, учитывающими скачкообразные

изменения  $\lambda(t)$  и  $t_{\text{кпр}}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 z_y(t_{i+1}) &= z_y(t_i) + \frac{\partial z_y}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i + \frac{\partial z_y}{\partial r_{\text{мод}}}(t_i) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + \Delta t_{\text{кпр}j} \dot{y}(t_{\text{кпр}}), \\
 z_{V_y}(t_{i+1}) &= z_{V_y}(t_i) + \frac{\partial z_{V_y}}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i + \frac{\partial z_{V_y}}{\partial r_{\text{мод}}}(t_i) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 (12) \quad &\quad + \Delta t_{\text{кпр}j} \dot{V}_y(t_{\text{кпр}}), \\
 z_\delta(t_{i+1}) &= z_\delta(t_i) + \frac{\partial z_\delta}{\partial \vartheta}(t_i) \Delta \vartheta_i + \frac{\partial z_\delta}{\partial r_{\text{мод}}}(t_i) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + \Delta t_{\text{кпр}j} (\zeta_x \dot{x}(t_{\text{кпр}}) + \zeta_y \dot{y}(t_{\text{кпр}}) + \zeta_{V_x} \dot{V}_x(t_{\text{кпр}}) + \zeta_{V_y} \dot{V}_y(t_{\text{кпр}})).
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta t_{\text{кпр}j}$  — разность значений  $t_{\text{кпр}j}$ , определяемых из уравнения (7) в момент  $t_j$ , при  $\lambda = \lambda(t_j)$  и  $\lambda = \lambda(t_j) + \Delta \lambda_j$ . Величина этой разности может быть определена следующим приближенным выражением:  $\Delta t_{\text{кпр}j} = \zeta_{tk}(t_j) \Delta \lambda_j$ .

В части управления расходом топлива разностные уравнения определяются для дискретных моментов времени  $t_j$  обновления информации датчиков уровней:

$$\begin{aligned}
 z_{m_o}(t_{j+1}) &= z_{m_o}(t_j) + \frac{\partial z_{m_o}}{\partial r_o}(t_j) \Delta r_{oj} + \frac{\partial z_{m_o}}{\partial r_{\text{мод}}}(t_j) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + (r_o(t_j) - r_{\text{мод}}(t_j)) \frac{K_{m \text{ ном}}}{K_{m \text{ ном}} + 1} \zeta_{tk}(t_j) \Delta \lambda_j, \\
 (13) \quad z_{m_z}(t_{j+1}) &= z_{m_z}(t_j) + \frac{\partial z_{m_z}}{\partial r_z}(t_j) \Delta r_{zj} + \frac{\partial z_{m_z}}{\partial r_{\text{мод}}}(t_j) r_{\text{цикл}}(t_j) \Delta \lambda_j + \\
 &\quad + (r_z(t_j) - r_{\text{мод}}(t_j)) \frac{1}{K_{m \text{ ном}} + 1} \zeta_{tk}(t_j) \Delta \lambda_j,
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta r_{oj} = \int_{t_j}^{t_j + \delta t} f_o(r_o, \alpha_{K_m}, \alpha_R) d\tau, \quad \Delta r_{zj} = \int_{t_j}^{t_j + \delta t} f_z(r_z, \alpha_{K_m}, \alpha_R) d\tau,$$

где  $\delta t$  — интервал времени переходного процесса в объекте (4) по координатам  $r_o, r_z$  при скачкообразном изменении  $\alpha_{K_m}$  при реализации управляющего воздействия  $K_m(t)$  в момент времени  $t_i$ .

Для линеаризованных уравнений двигателя при неизменном режиме по тяге величины приращений расходов компонентов топлива из-за изменения коэффициента соотношения  $K_m$  можно определить следующим выражением [5]:

$$\Delta r_{oj} = \frac{\delta r_o(t_j)}{\delta K_m} \Delta K_{mj}, \quad \Delta r_{zj} = \frac{\delta r_z(t_j)}{\delta K_m} \Delta K_{mj}.$$



Переформулируем исходную задачу терминального управления. Вместо нахождения управления  $u(t)$  в классе кусочно-постоянных функций будем искать дискретную последовательность приращений координат  $\vartheta(t), K_m(t), \lambda(t)$  в моменты времени  $t_i, t_j$ .

На основе разностных уравнений (11)–(13) определяются алгоритмы формирования вектора управляющих воздействий  $\Delta u = (\Delta\vartheta_i, \Delta K_{mj}, \Delta\lambda_j)$  как функции прогнозируемых невязок краевых условий.

Основным возмущением в рассмотренной терминальной задаче являются заранее неизвестные начальные условия по координатам уравнений объекта (1), (4). Возможность парирования этих возмущений при управлении районами падения нижних ступеней определяется тем, что размерность вектора управления равна размерности вектора невязок. При управлении конечной ступенью размерность вектора краевых условий увеличивается. В этом случае для решения терминальной задачи необходимо выбирать значения управляющих воздействий для двух дискретных моментов времени. При этом число независимых управляющих воздействий оказывается больше размерности вектора невязок. В результате анализа возможных вариантов формирования управляющих воздействий для двух дискретных моментов времени был принят следующий, наиболее очевидный алгоритм управления. Рассмотрим дискретный момент времени  $t_j$ .

Из разностных уравнений (13) для невязок краевых условий в части управления расходом топлива определим значения управляющих воздействий  $K_m(t_j), \Delta\lambda(t_j)$ . Алгоритм управления углом тангажа с обратной связью по прогнозируемым значениям невязок  $y_{pr}(t_{кпр}) - y_k, V_{ypr}(t_{кпр})$ , обеспечивающий решение терминальной задачи к заданным краевым условиям по координатам  $y(t_k), V_y(t_k) = 0$ , определим из уравнений (11), (12) для двух дискретных моментов времени  $t_{i+1}, t_{i-p+1}$ . Отметим, что на интервале  $[t_i, t_{i-p+1}]$  невязки  $y_{pr}(t_{кпр}) - y_k, V_{ypr}(t_{кпр})$  сохраняют свои значения неизменными.

Алгоритм управления углом тангажа с обратной связью по прогнозируемым значениям невязок  $y_{pr}(t_{кпр}) - y_k, V_{ypr}(t_{кпр})$  в дискретные моменты времени  $t_i, t_{i-p}$  определяется на основе уравнения (12) с учетом величины  $\Delta\lambda(t_i)$ , вычисленной в алгоритме управления расходом топлива. Процедура формирования этого алгоритма изложена в [4]. При этом угол тангажа в момент времени  $t_{i-p}$  получает приращение  $\Delta\vartheta_1$ , а в момент времени  $t_i$  изменяется на величину  $\Delta\vartheta_2$ .

Погрешности терминального управления определяются наличием параметрических возмущений. Эти возмущения парируются путем применения итеративной процедуры формирования вектора управления  $\Delta u = (\Delta\vartheta_i, \Delta K_{mj}, \Delta\lambda_j)$  с обратной связью по вектору прогнозируемых невязок краевых условий  $z(t)$ .

Основным результатом решения рассмотренной задачи совместно согласованного управления движением центра масс и расходом топлива является наиболее полное использование располагаемых запасов топлива [6]. Суть такого согласованного управления заключается в следующем. Информация о текущей массе топлива, формируемая в соответствии с (7), где  $\lambda(t)$  опре-

деляется с учетом измерений датчиков уровней, учитывается при прогнозировании невязок координат траектории центра масс, соответствующих цели выведения. В этом случае в уравнениях (12) для  $z_y(t_{j+1})$ ,  $z_V(t_{j+1})$ ,  $z_\delta(t_{j+1})$  появляется возмущающее воздействие  $\Delta\lambda_j$ . За счет дополнительного сжигания топлива увеличивается конечное значение кажущейся скорости  $W(t_{\text{кпр}})$ . Возникающая при этом ошибка по району падения устраняется вариацией скорости в нейтральном направлении путем дополнительного управления по углу тангажа. Отметим, что эффективность такого управления сохраняется, пока угол тангажа не приблизится к значению, при котором обеспечивается максимальная дальность полета отработанной ступени.

Без учета фактического текущего значения массы топлива при управлении движением центра масс терминальный момент времени  $t_{\text{кпр}}$  определяется равенством нулю невязок по координатам траектории движения. В этом случае возмущающие факторы типа отклонений начальной массы, расхода топлива и др., воздействие которых на траекторию движения парируется путем управления вектором тяги к моменту  $t_{\text{кпр}}$ , приведут к возникновению значительных неиспользуемых остатков топлива. Величина этих остатков может достигать 1% от начальной массы топлива.

В контуре управления расходом топлива при измерении уровней компонентов топлива в баках имеют место значительные ошибки измерения случайного характера. Вследствие этого, даже с учетом фильтрации ошибок измерения, возникают случайные погрешности управления в виде остатков компонентов топлива в момент  $t_k$ . Для парирования этих погрешностей вводятся гарантийные запасы компонентов топлива, снижающие эффективность управления. Тем не менее при реализации согласованного терминального управления применительно к современным ракетам-носителям РН «Ангара», РН «Союз-5» неиспользуемые запасы топлива сокращаются в 3 раза.

Принцип согласованного управления движением центра масс и расходом компонентов топлива реализован в алгоритмах управления РН «Протон-М» и семейства РН «Ангара».

В зарубежных аналогах терминальное управление движением центра масс путем воздействия на вектор тяги и итеративной процедуры формирования управления с обратной связью по прогнозируемым невязкам развивалось почти в одно и то же время (в конце прошлого столетия), как и в СССР и впоследствии в РФ. Вместе с тем потребность согласованного управления движением центра масс и расходом топлива не возникала. По-видимому, это связано с тем, что на районы падения отработанных ступеней РН не накладывается жестких ограничений.

#### 4. Заключение

1. Рассмотрена задача синтеза терминального управления движением центра масс и расходом топлива жидкостных ракет-носителей. Задача синтеза управления ограничивается заданными краевыми условиями, выполнение которых является приоритетной задачей.

При решении задачи предполагается возможность декомпозиции системы на взаимосвязанные процессы управления конечным состоянием и стаби-

лизации объекта. Декомпозиция позволяет раскрыть содержание процессов управления в терминальной системе. Терминальное управление производится путем задания значений координат объекта, поддерживаемых контуром стабилизации. Стабилизация объекта относительно заданных значений характеризуется быстрым затуханием динамики переходных процессов. Производная невязок в декомпозированной системе в явном виде зависит от терминального управления.

2. Задача синтеза решается в классе систем с прогнозированием невязок краевых условий — вектор-функции текущих значений координат объекта и времени. Для вариаций управления в классе кусочно-постоянных функций проведена дискретизация задачи синтеза. Получены разностные уравнения для вектора прогнозируемых невязок. На основе полученных разностных уравнений определяются алгоритмы формирования вектора управляющих воздействий по изменению угла тангажа, коэффициента соотношения расхода компонентов и управляемого параметра модели объекта как функции прогнозируемых невязок краевых условий.

3. Решением рассмотренной терминальной задачи является совместно согласованное управление движением центра масс и расходом топлива, обеспечивающее наиболее полное использование располагаемых запасов топлива. Принцип согласованного управления движением центра масс и расходом топлива реализован в алгоритмах управления РН «Протон-М» и семейства РН «Ангара».

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черток Б.Е.* Ракеты и люди. I. М.: Машиностроение, 1994.
2. *Петров Б.Н., Портнов-Соколов Ю.П., Андриенко А.Я., Иванов В.П.* Бортовые терминальные системы управления. М.: Машиностроение, 1983.
3. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011.
4. *Иванов В.П., Табаллин Д.Д.* Об одном методе детерминированного терминального управления с предиктивным прогнозированием невязок краевых условий // *АиТ.* 2022. № 1. С. 77–94. <https://doi.org/10.31857/S0005231022010056>
5. *Иванов В.П., Стаменкович Н.Н., Каблова Е.Б., Кленовая Л.Г.* Детерминированный синтез алгоритмов управления расходом топлива из баков жидкостной ракеты-носителя с учетом условий устойчивой работы двигателя // *Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления.* 2020. № 3 (53). С. 31–41.
6. *Иванов В.П., Завадский В.К., Гуськов А.Д., Дишель В.Д., Васягина И.В., Кислик В.Д.* Терминальное управление наведением ракеты-носителя и расходом топлива в режиме его полной выработки // *Междунар. науч.-техн. конф. «Системы и комплексы автоматического управления летательными аппаратами», посв. 100-летию со дня рождения академика РАН Николая Алексеевича Пилюгина.* Ч. II. М.: ООО «Научно-издательский центр «Инженер». 2008. С. 56–65.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глумовым.*

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 14.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023