Автоматика и телемеханика, № 10, 2023

© **2023 г. А.Ю. КУСТОВ, канд. физ.-мат. наук (arkadiykustov@yandex.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В работе получено параметрическое описание множества оптимальных анизотропийных регуляторов для линейных дискретных стационарных систем. Искомые регуляторы ограничены нестрого неупреждающей динамической обратной связью по измеряемому выходу. Решение зависит от нескольких настраиваемых параметров, обусловливающих конкретный вид регулятора, и имеет вид системы уравнений Риккати, соответствующих $\mathcal{H}_2$-оптимальному регулятору для системы, образованной последовательным соединением исходной системы и наихудшего формирующего фильтра, соответствующего предельному уровню средней анизотропии внешнего возмущения.

Ключевые слова: линейные дискретные системы, анизотропийная теория, оптимальное управление, параметризация.

DOI: 10.31857/S0005231023100069, **EDN:** YDASXM

1. Введение

Развивающаяся с середины 90-х гг. анизотропийная теория (более точно — теория анизотропийного управления и фильтрации для линейных дискретных стохастических систем) появилась в ответ на попытки выработать подходы к решению задач синтеза для линейных систем регуляторов и фильтров, обобщающие хорошо известные решения соответствующих $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-задач [4, 12, 13].

В ней явно прослеживаются и черты задач ТАУ, и теории информации, и различных, уже ставших классическими методов подавления влияния внешних возмущений [5]. Однако в отличие от многих других подходов, в которых предлагалось использовать заданные в определенном смысле искусственно функционалы смешанного типа, при создании анизотропийной теории основное внимание было уделено способу описания внешнего возмущения, действующего на систему. Было показано, что использование теоретико-информационных функционалов позволяет не только описать очень богатый класс статистически не полностью определенных случайных возмущений, но и естественным образом обобщить понятия $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-норм, сделав их предельными случаями анизотропийной нормы.

В настоящей работе поставлена и решена задача параметрического описания множества оптимальных анизотропийных регуляторов. Решение задачи базируется на результате, связанном с параметризацией $\mathcal{H}_2$-оптимальных регуляторов, и уравнениях для наихудшего формирующего фильтра, производящего сигнал с пороговым уровнем средней анизотропии.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 даются основные сведения из анизотропийной теории. Также в нем идет решение стандартной задачи $\mathcal{H}_2$-оптимального управления, где приводится все множество соответствующих решений. В разделе 3 ставится и решается задача параметризации оптимальных анизотропийных регуляторов. Результаты продемонстрированы на численном примере.

2. Предварительные сведения

2.1. Сокращения и обозначения

$\mathcal{H}_2^{m\times n}$ — пространство Харди аналитичных в открытом единичном диске $\{z \in \mathbb{C}: \ |z| < 1\}$ дробно-рациональных передаточных функций $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P_k z^k \in \mathbb{C}^{m\times n}$ с конечной $\mathcal{H}_2$-нормой

$$\|P\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr}\left(\widehat{P}(\omega)\widehat{P}^{\mathrm{T}}(-\omega)\right)d\omega\right)^{1/2},$$

где $\widehat{P}(\omega) = \lim\limits_{r\to 1-0} P(re^{i\omega})$; $\mathcal{RH}_2^{m\times n}$ — множество строго правильных устойчивых дробно-рациональных передаточных функций размера $m \times n$; $\|P\|_\infty = \sup_{\omega\in[-2\pi;\pi)} \sigma_{\max}(\widehat{P}(\omega))$ — $\mathcal{H}_\infty$-норма передаточной функции $P(z)$, где $\sigma_{\max}(X) = \max_k \sigma_k(X)$ — максимальное сингулярное число матрицы X, а $\sigma_k(X) = \lambda_k(X^{\mathrm{T}}X)$.

2.2. Основные определения анизотропийной теории

Центральным объектом исследования в анизотропийной теории является устойчивая линейная дискретная стационарная система вида

$$P_{zw} \sim \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \\ z_k \quad\ = Cx_k + Dw_k, \end{cases} \tag{1}$$

с известными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x\times n_w}$, $C \in \mathbb{R}^{n_z\times n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{n_z\times n_w}$ и, как правило, нулевыми начальными условиями ($x_0 = 0$), описывающая развитие во времени динамических процессов $\{x_k\}_{k\geqslant 0}$ и $\{z_k\}_{k\geqslant 0}$, подверженных действию случайного внешнего возмущения $\{w_k\}_{k\geqslant 0}$. Далее будем отождествлять системы вида (1) с их передаточной функцией $P_{zw}(z) = D + C(zI_{n_x} - A)^{-1}B$, а также задавать их упорядоченной четверкой матриц

$$P_{zw} \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]: \quad w \xrightarrow{x} z, \tag{2}$$

уточняя, где необходимо, что является состоянием, входом и выходом, и каким пространствам принадлежат соответствующие матрицы. В задачах управления под системой (1) понимается замкнутая система.

Следующие определения дают базовое представление об объектах исследования анизотропийной теории. Для больших деталей смотри, например, [4, 12, 13].

Определение 1. Анизотропией интегрируемого с квадратом случайного вектора $w \in \mathbb{L}_2^{n_w}$ называют число, определяемое формулой

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{n_w,\lambda}), \tag{3}$$

где $\mathbf{D}(f\|g)$ — информационное уклонение Кульбака–Лейблера f относительно g; $f(x)$ — плотность распределения случайного вектора w; $p_{n_w,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-n_w/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\right)$ — плотность нормального распределения с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_{n_w}.

Определение 2. Средней анизотропией стационарного эргодического случайного процесса $W = \{w_k\}_{k \geqslant 0}$ называют число, определяемое формулой

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}, \tag{4}$$

где $W_{s:t} = (w_s^{\mathrm{T}}, \ldots, w_t^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ — вектор-фрагмент последовательности $W = \{w_k\}_{k \geqslant 0}$ при $k = s, s+1, \ldots, t-1, t$.

Предполагается, что на систему (1) действует возмущение с ограниченной числом $a \geqslant 0$ средней анизотропией, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$. Данное ограничение определяет возможности природы к генерации наиболее неблагоприятного (с точки зрения значения среднеквадратичного коэффициента усиления) внешнего возмущения, с чем работает $\mathcal{H}_\infty$-теория, но при этом позволяет ему иметь и пространственную, и временную корреляции, что не охватывается $\mathcal{H}_2$-теорией.

Определение 3. Анизотропийной нормой системы (1) *при наложенном на внешнее возмущение ограничении $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ называют число*

$$|\!|\!| P_{zw} |\!|\!|_a = \sup \left\{ \frac{\|P_{zw} G\|_2}{\|G\|_2} : \; G \in \mathcal{H}_2^{n_w \times n_w} \wedge W = GV \wedge \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a \right\}, \tag{5}$$

где $V = \{v_k\}_{k \geqslant 0}$ — стандартный гауссовский белый шум, пропускаемый через линейную систему с $(n_w \times n_w)$-мерной передаточной функцией $G(z)$ с конечной $\mathcal{H}_2$-нормой.

Количественно анизотропийная норма отражает способность системы к усилению в среднеквадратичном смысле поступаемого на ее вход сигнала при наложении на него теоретико-информационного ограничения $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$. В случае наиболее жесткого ограничения, т.е. когда $\overline{\mathbf{A}}(W) = 0$, имеем, что $W = V$ и $|\!|\!| P_{zw} |\!|\!|_0 = \|P_{zw}\|_2 / \sqrt{n_w}$. В случае, когда ограничение на среднюю анизотропию снято, т.е. $\overline{\mathbf{A}}(W) < +\infty$, можно показать, что $\lim\limits_{a \to +\infty} |\!|\!| P_{zw} |\!|\!|_a = \|P_{zw}\|_\infty$. Таким образом, анизотропийной теории удается не только описать в теоретико-информационных терминах широкий класс внешних возмущений, но и естественным образом обобщить подходы к синтезу управления, разработанные в рамках $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теорий.

Исследованию всевозможных аспектов поведения линейных систем, замкнутых $\mathcal{H}_2$-оптимальными оценивающими регуляторами, посвящено огромное множество работ. В ряде из них, в частности, описываются методы параметризации всего множества $\mathcal{H}_2$-оптимальных регуляторов. Процедура решения этой задачи, а также сопровождающие ее сложности подробно описаны в работах [2, 6, 9, 11] и многих других. Основная идея, на которой основано решение, состоит в том, что $\mathcal{H}_2$-оптимальные регуляторы напрямую связаны с регуляторами, обеспечивающими инвариантность выхода некоторой вспомогательной системы относительно возмущений, и проводя параметризацию последних, осуществляется параметрическое описание и искомых $\mathcal{H}_2$-регуляторов. Постановка задачи параметризации $\mathcal{H}_2$-регуляторов и ее решение могут быть даны в следующей форме.

Рассмотрим систему

$$F \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline C_y & 0 & D_{yw} \\ C_z & D_{zu} & 0 \end{array}\right]: \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{x} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \tag{6}$$

с матрицами $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $B_w \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C_y \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D_{yw} \in \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$, $C_z \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$, $D_{zu} \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$, где u — управление, w — внешнее возмущение, y — измеряемый выход, z — регулируемый выход. Также рассмотрим нестрого неупреждающий динамический стабилизирующий регулятор в форме обратной связи по выходу

$$K \sim \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right]: \quad y \xrightarrow{h} u, \tag{7}$$

где $h_k \in \mathbb{R}^{n_h}$, а A_c, B_c, C_c, D_c — матрицы, подлежащие определению. Система (6), замкнутая регулятором (7), будет иметь (A, B, C, D)-представление

$$F_{cl}(K) \sim \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u D_c C_y & B_u C_c & B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c C_y & A_c & B_c D_{yw} \\ \hline C_z + D_{zu} D_c C_y & D_{zu} C_c & D_{zu} D_c D_{yw} \end{array}\right]: \quad w \xrightarrow{\binom{x}{h}} z. \tag{8}$$

Задача $\mathcal{H}_2$-оптимального управления состоит в нахождении таких матриц регулятора (7), что $\mathcal{H}_2$-норма замкнутой системы (8) принимает минимальное значение, т.е. $\|F_{cl}(K)\|_2 \to \min\limits_K$.

Уже было отмечено, что задача синтеза $\mathcal{H}_2$-оптимального регулятора связана с задачей обеспечения вход-выходной инвариантности (т.е. равенства нулю передаточной функции) некоторой вспомогательной системы [2, 3, 6, 9, 10]. Для решения последней задачи вводят несколько дополнительных определений, тесно связанных с понятиями управляемого и наблюдаемого инвариантов [1, 7]. А именно, для системы $F: w \xrightarrow{x} z$, заданной четверкой матриц (A, B, C, D), где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, определим два множества: $\mathcal{W}(F)$ и $\mathcal{S}(F)$ (см., например, [8]).

Определение 4. Стабилизируемое слабо ненаблюдаемое множество $\mathcal{W}(F)$ *есть наибольшее подпространство* $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, *для которого существует матрица* Π *подходящей размерности, такая, что* $\mathcal{W} \subseteq \ker(C + D\Pi)$, $(A + B\Pi)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ *и* $\rho(A + B\Pi) < 1$.

Определение 5. Детектируемое сильно управляемое множество $\mathcal{S}(F)$ *есть наименьшее подпространство* $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$, *для которого существует матрица* Λ *подходящей размерности, такая, что* $\mathrm{im}(B + \Lambda D) \subseteq \mathcal{S}$, $(A + \Lambda C)\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ *и* $\rho(A + \Lambda C) < 1$.

Также введем две вспомогательные, связанные с системой (6) матрицы P и Q как наибольшие в смысле отношения матричного порядка ($X \succ Y \Leftrightarrow X - Y \succ 0$) матрицы, являющиеся решениями неравенств

$$M_1(P) = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}PA - P + C_z^{\mathrm{T}}C_z & C_z^{\mathrm{T}}D_{zu} + A^{\mathrm{T}}PB_u \\ D_{zu}^{\mathrm{T}}C_z + B_u^{\mathrm{T}}PA & D_{zu}^{\mathrm{T}}D_{zu} + B_u^{\mathrm{T}}PB_u \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{9a}$$

$$M_2(Q) = \begin{bmatrix} AQA^{\mathrm{T}} - Q + B_wB_w^{\mathrm{T}} & B_wD_{yw}^{\mathrm{T}} + AQC_y^{\mathrm{T}} \\ D_{yw}B_w^{\mathrm{T}} + C_yQA^{\mathrm{T}} & D_{yw}D_{yw}^{\mathrm{T}} + C_yQC_y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{9b}$$

Для пары решений (P, Q) определим дополнительно матрицы C_P, D_P, B_Q и D_Q в соответствии с разложениями

$$\begin{bmatrix} C_P^{\mathrm{T}} \\ D_P^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} [C_P \quad D_P] = M_1(P), \qquad \begin{bmatrix} B_Q \\ D_Q \end{bmatrix} [B_Q^{\mathrm{T}} \quad D_Q^{\mathrm{T}}] = M_2(Q) \tag{10}$$

и при условии, что $[C_P \quad D_P]$ и $[B_Q^{\mathrm{T}} \quad D_Q^{\mathrm{T}}]$ — матрицы полного ранга.

Решение задачи параметризации $\mathcal{H}_2$-оптимальных регуляторов приведено в виде следующей теоремы.

Теорема 1 [2, 10]. *Для системы* (6) *существует* $\mathcal{H}_2$*-оптимальный регулятор вида* (7) *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(i) *пара* (A, B_u) — *стабилизируемая,*
(ii) *пара* (C_y, A) — *детектируемая,*
(iii) $\mathrm{im}(B_Q - B_uD_P^+R) \subseteq \mathcal{W}(F_{P_u})$,
(iv) $\mathcal{S}(F_{Q_y}) \subseteq \ker(C_P - RD_Q^+C_y)$,
(v) $\mathcal{S}(F_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(F_{P_u})$,
(vi) $(A - B_uD_P^+RD_Q^+C_y)\mathcal{S}(F_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(F_{P_u})$,

где

$$R = (D_P^{\mathrm{T}})^+(D_{zu}^{\mathrm{T}}C_zQC_y^{\mathrm{T}} + B_u^{\mathrm{T}}PAQC_y^{\mathrm{T}} + B_u^{\mathrm{T}}PB_wD_{yw}^{\mathrm{T}})(D_Q^{\mathrm{T}})^+, \tag{11}$$

а системы F_{P_u} *и* F_{Q_y} *заданы соответственно* (A, B, C, D)*-представлениями*

$$F_{P_u} \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_u \\ \hline C_P & D_P \end{array}\right], \quad F_{Q_y} \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B_Q \\ \hline C_y & D_Q \end{array}\right]. \tag{12}$$

При выполнении условий теоремы множество всех динамических $\mathcal{H}_2$-оптимальных регуляторов вида (7) *задается выражением*

$$K \sim \left[\begin{array}{cc|c} A + B_u\Pi + \Lambda C_y - B_u\widetilde{D}C_y & B_u\widetilde{C} & B_u\widetilde{D} - \Lambda \\ -\widetilde{B}C_y & \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \Pi - \widetilde{D}C_y & \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{array}\right], \tag{13}$$

в котором выбор матриц $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ ограничен лишь условием принадлежности передаточной функции

$$\widetilde{F}(z) = \widetilde{D} + \widetilde{C}(zI_{n_x} - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{B} \tag{14}$$

следующей алгебраической сумме пространств: $\widetilde{F}(z) \in N_F + M_F$, где

$$N_F = \Big\{N \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y} : D_P N D_Q = -R\Big\}, \tag{15a}$$

$$M_F = \Big\{M(z) \in \mathcal{RH}_2^{n_u \times n_y} : F_1(z)M(z)F_2(z) = 0\Big\} \tag{15b}$$

с обозначениями

$$F_1(z) = D_P + (C_P + D_P\Pi)(zI_{n_x} - A - B_u\Pi)^{-1}B_u, \tag{16a}$$

$$F_2(z) = D_Q + C_y(zI_{n_x} - A - \Lambda C_y)^{-1}(B_Q + \Lambda D_Q). \tag{16b}$$

Солидный анализ положений теоремы проделан в [11]. Также могут быть сформулированы варианты теоремы 1 для невырожденных случаев, связанных с отсутствием инвариантных нулей у обратимых слева/справа систем [2]. При этом в аналогичное утверждение дополнительно будет включено условие *единственности* $\mathcal{H}_2$-оптимального регулятора в случае его существования.

3. Параметризация анизотропийных регуляторов

3.1. Постановка и решение задачи

Решение задачи оптимального анизотропийного управления для линейных дискретных стационарных систем было получено в [13]. Условия, при которых производился синтез регулятора, обеспечивали существование и единственность решения, а сам регулятор был задан в строго неупреждающей форме. В данном разделе приводится решение похожей задачи, состоящей в параметризации всех оптимальных анизотропийных регуляторов нестрого неупреждающего вида.

З а д а ч а 1. *Для системы* (6), *на которую действует внешнее возмущение с ограничением $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, требуется описать параметрически множество оптимальных анизотропийных регуляторов вида* (7), *стабилизирующих замкнутую систему и доставляющих минимум ее анизотропийной нормы.*

Известно, что при решении задач анизотропийного анализа систем и синтеза для них оптимальных анизотропийных регуляторов возникает необходимость рассмотреть дополнительную математическую конструкцию — наихудший формирующий фильтр. Его задачей является генерация наиболее неблагоприятного для замкнутой системы внешнего возмущения. В соответствии с полученными в [12, 13] результатами, для систем вида (2) он имеет вид

$$G \sim \left[\begin{array}{c|c} A + BL & B\Sigma^{1/2} \\ \hline L & \Sigma^{1/2} \end{array}\right]: \quad v \xrightarrow{x} w, \tag{17}$$

где $L \in \mathbb{R}^{n_w \times n_x}$ и $\Sigma \succ 0$ — матрицы, подобранные с целью максимизировать среднеквадратичный коэффициент усиления $\|P_{zw}G\|_2/\|G\|_2$ при ограничении $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$. Здесь и далее $V = \{v_k\}_{k \geqslant 0}$ — стандартный гауссовский белый шум.

Основная идея решения задачи 1 заключается в переходе к рассмотрению системы, образованной последовательным соединением наихудшего формирующего фильтра и исходной системы F, и дальнейшей параметризации для нее $\mathcal{H}_2$-оптимальных регуляторов. Прежде всего отметим, что система (6) с учетом формирующего фильтра (17) эквивалентна с точки зрения соответствующих динамических процессов системе

$$\begin{aligned} \overline{F} \sim & \left[\begin{array}{c|cc} \overline{A} & \overline{B}_u & \overline{B}_w \\ \hline \overline{C}_y & 0 & \overline{D}_{yw} \\ \overline{C}_z & \overline{D}_{zu} & 0 \end{array}\right] = \\ = & \left[\begin{array}{c|cc} A' + B'_w L & B'_u & B'_w \Sigma^{1/2} \\ \hline C'_y + D'_{yw} L & 0 & D'_{yw}\Sigma^{1/2} \\ C'_z & D'_{zu} & 0 \end{array}\right]: \quad \begin{pmatrix} \overline{u} \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\binom{x}{h}} \begin{pmatrix} \overline{y} \\ z \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{18}$$

где новые переменные определены формулами $\overline{u}_k = \begin{pmatrix} u_k^{\mathrm{T}} & h_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ и $\overline{y}_k = \begin{pmatrix} y_k^{\mathrm{T}} & h_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; матрицы, использованные в представлении (18), имеют следующую структуру:

$$A' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n_h \times n_h} \end{bmatrix}, \; B'_u = \begin{bmatrix} B_u & 0 \\ 0 & I_{n_h} \end{bmatrix}, \; B'_w = \begin{bmatrix} B_w \\ 0_{n_h \times n_w} \end{bmatrix}, \tag{19a}$$

$$C'_y = \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & I_{n_h} \end{bmatrix}, \; D'_{yw} = \begin{bmatrix} D_{yw} \\ 0_{n_h \times n_w} \end{bmatrix}, \tag{19b}$$

$$C'_z = [C_z \quad 0_{n_z \times n_h}], \; D'_{zu} = [D_{zu} \quad 0_{n_z \times n_h}]; \tag{19c}$$

матрицы L и Σ соответствуют формирующему фильтру G, являющемуся наихудшим для системы (18), замкнутой некоторым регулятором, и производящему окрашенный сигнал со средней анизотропией не выше заданного порога $a \geqslant 0$ из стандартного гауссовского белого шума $V = \{v_k\}_{k \geqslant 0}$.

Т е о р е м а 2. *Для системы* (6) *с внешним возмущением, удовлетворяющим ограничению* $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, *существует оптимальный анизотропийный* *регулятор вида* (7) *тогда и только тогда, когда выполнены условия (i)–(vi) теоремы 1. При выполнении этих условий множество всех оптимальных анизотропийных регуляторов вида* (7) *для системы* (6) *определяется в соответствии с формулой* $\overline{u}_k = \begin{pmatrix} u_k^{\mathrm{T}} & h_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, *где управление* $\overline{u}_k$ *задается следующим множеством оптимальных анизотропийных регуляторов для системы* (18):

$$
\overline{K} \sim \left[\begin{array}{cc|c} \overline{A} + \overline{B}_u\overline{\Pi} + \overline{\Lambda}\overline{C}_y - \overline{B}_u\widetilde{D}\overline{C}_y & \overline{B}_u\widetilde{C} & \overline{B}_u\widetilde{D} - \overline{\Lambda} \\ -\widetilde{B}\overline{C}_y & \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \hline \overline{\Pi} - \widetilde{D}\overline{C}_y & \widetilde{C} & \widetilde{D} \end{array}\right]. \tag{20}
$$

Матрицы $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$ *образуют передаточную функцию*

$$
\widetilde{F}(z) = \widetilde{D} + \widetilde{C}(zI_{n_x+n_h} - \widetilde{A})^{-1}\widetilde{B}, \tag{21}
$$

принадлежащую алгебраической сумме пространств $\widetilde{F}(z) \in N_{\overline{F}} + M_{\overline{F}}$, *где*

$$
N_{\overline{F}} = \{\overline{N} \in \mathbb{R}^{(n_u+n_h)\times(n_y+n_h)} : \overline{D}_P\overline{N}\,\overline{D}_Q = -\overline{R}\}, \tag{22a}
$$

$$
M_F = \{\overline{M}(z) \in \mathcal{RH}_2^{(n_u+n_h)\times(n_y+n_h)} : \overline{F}_1(z)\overline{M}(z)\overline{F}_2(z) = 0\}, \tag{22b}
$$

где в свою очередь

$$
\overline{F}_1(z) = \overline{D}_P + (\overline{C}_P + \overline{D}_P\overline{\Pi})(zI_{n_x+n_h} - \overline{A} - \overline{B}_u\overline{\Pi})^{-1}\overline{B}_u, \tag{23a}
$$

$$
\overline{F}_2(z) = \overline{D}_Q + \overline{C}_y(zI_{n_x+n_h} - \overline{A} - \overline{\Lambda}\overline{C}_y)^{-1}(\overline{B}_Q + \overline{\Lambda}\overline{D}_Q) \tag{23b}
$$

и

$$
\overline{R} = (\overline{D}_P^{\mathrm{T}})^{+}(\overline{D}_{zu}^{\mathrm{T}}\overline{C}_z\overline{Q}\,\overline{C}_y^{\mathrm{T}} + \overline{B}_u^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\overline{A}\,\overline{Q}\,\overline{C}_y^{\mathrm{T}} + \overline{B}_u^{\mathrm{T}}\overline{P}\,\overline{B}_w\overline{D}_{yw}^{\mathrm{T}})(\overline{D}_Q^{\mathrm{T}})^{+}. \tag{24}
$$

Матрицы $\overline{C}_P$, $\overline{D}_P$, $\overline{B}_Q$ *и* $\overline{D}_Q$ *введены согласно разложениям* (10) *для матриц* $M_1(\overline{P})$ *и* $M_2(\overline{Q})$, *связанных с системой* (18), *а матрицы* $\overline{\Pi}$ *и* $\overline{\Lambda}$ *— согласно множествам* $\mathcal{W}(\overline{F}_{P_u})$ *и* $\mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y})$, *введенным соответственно определениям 4 и 5.*

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

С л е д с т в и е 1. *Если в рамках теоремы 2 вместе с условиями (i)–(vi) верно также, что передаточная функция*

$$
F_{yw}^{ol}(z) = D_{yw} + C_y(zI_{n_x} - A)^{-1}B_w \tag{25}
$$

является обратимой справа, а передаточная функция

$$
F_{zu}^{ol}(z) = D_{zu} + C_z(zI_{n_x} - A)^{-1}B_u \tag{26}
$$

— обратимой слева, то оптимальный анизотропийный регулятор существует и является единственным.

3.2. Численный пример

В качестве академического примера рассмотрим систему вида (6) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{27a}$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{27b}$$

Будем считать, что внешнее возмущение имеет среднюю анизотропию, ограниченную некоторым числом $a \geqslant 0$. Поставим в качестве цели исследования решение задачи параметризации оптимальных анизотропийных регуляторов порядка не выше порядка исходной системы, и для простоты потребуем, чтобы число дополнительных фиктивных переменных было минимально, т.е., согласно (21), $\widetilde{F}(z) = \widetilde{D}$.

Проделав требуемые вычисления, можно убедиться, что система (18) имеет вид

$$\overline{F} \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} A + B_w L_1 & B_w L_2 & B_u & 0_{2\times 2} & B_w\sqrt{\sigma} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} & I_2 & 0_{2\times 1} \\ \hline I_2 & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{2\times 2} & I_2 & 0_{2\times 1} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ \hline C_z & 0_{2\times 2} & D_{zu} & 0_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \end{array}\right], \tag{28}$$

а соответствующие ей матрицы $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, определяемые формулами (9), будут иметь следующую структуру:

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} \overline{P}_{11} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}, \quad \overline{Q} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}, \quad \overline{Q}_{11} = B_w B_w^{\mathrm{T}} \sqrt{\sigma}, \tag{29}$$

где $\overline{P}_{11}$ — решение уравнения Риккати

$$\overline{P}_{11} = (A + B_w L_1)^{\mathrm{T}} \overline{P}_{11} (A + B_w L_1) + C_z^{\mathrm{T}} C_z \tag{30a}$$

$$- (A + B_w L_1)^{\mathrm{T}} \overline{P}_{11} B_u (D_{zu}^{\mathrm{T}} D_{zu} + B_u^{\mathrm{T}} \overline{P}_{11} B_u)^{-1} B_u^{\mathrm{T}} \overline{P}_{11} (A + B_w L_1), \tag{30b}$$

причем для упрощения изложения *сразу будем считать*, что $L_2 = 0$ (можно действительно показать справедливость этого утверждения). После этого вычисляются матрицы $\overline{D}_P$, $\overline{C}_P$, $\overline{D}_Q$ и $\overline{B}_Q$:

$$\overline{D}_P = \begin{bmatrix} (\overline{D}_P)_{11} & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (D_{zu}^{\mathrm{T}} D_{zu} + B_u^{\mathrm{T}} \overline{P}_{11} B_u)^{1/2} & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 1} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}, \tag{31a}$$

$$\overline{C}_P = \begin{bmatrix} (\overline{C}_P)_{11} & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\overline{D}_P)_{11}^{-1} B_u^{\mathrm{T}} \overline{P}_{11} (A + B_w L_1) & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}, \tag{31b}$$

$$\overline{D}_Q = \begin{bmatrix} (\overline{D}_Q)_{11} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_w B_w^{\mathrm{T}})^{1/2} \sqrt{\sigma} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}, \tag{31c}$$

$$\overline{B}_Q = \begin{bmatrix} (\overline{B}_Q)_{11} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + B_w L_1)(\overline{D}_Q)_{11} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}. \tag{31d}$$

Также сразу вычислим матрицу R, воспользовавшись (11):

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} (\overline{C}_P)_{11}(\overline{D}_Q)_{11} & 0_{1\times 2} \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Перейдем к проверке условий теоремы 2. Очевидно, что пара $(\overline{A}, \overline{B}_u)$ — стабилизируемая, а пара $(\overline{C}_y, \overline{A})$ — детектируемая. Далее понадобится ввести в рассмотрение множества $\mathcal{W}(\overline{F}_P)$ и $\mathcal{S}(\overline{F}_Q)$. Согласно определениям (4) и (5), матрицы $\overline{\Pi}$ и $\overline{\Lambda}$ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворять следующим условиям:

$$\overline{\Pi} = \begin{bmatrix} \overline{\Pi}_{11} & \overline{\Pi}_{12} \\ \overline{\Pi}_{21} & \overline{\Pi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\overline{D}_P)_{11}^{-1}(\overline{C}_P)_{11} & 0_{1\times 2} \\ \overline{\Pi}_{21} & \overline{\Pi}_{22} \end{bmatrix}, \quad \rho(\overline{\Pi}_{22}) < 1, \tag{33a}$$

$$\overline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \overline{\Lambda}_{11} & \overline{\Lambda}_{12} \\ \overline{\Lambda}_{21} & \overline{\Lambda}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\overline{B}_Q)_{11}(\overline{D}_Q)_{11}^{-1} & \overline{\Lambda}_{12} \\ 0_{2\times 2} & \overline{\Lambda}_{22} \end{bmatrix}, \quad \rho(\overline{\Lambda}_{22}) < 1. \tag{33b}$$

Далее для упрощения вычислений выберем $\overline{\Pi}_{21} = \overline{\Pi}_{22} = 0_{2\times 2}$ и $\overline{\Lambda}_{12} = \overline{\Lambda}_{22} = 0_{2\times 2}$. Естественно, нужно иметь в виду, что такого рода выбор в общем случае приведет к сужению множества искомых оптимальных анизотропийных регуляторов. Сделанный выбор приводит к тому, что $\mathcal{W}(\overline{F}_P) = \mathbb{R}^4$ и $\mathcal{S}(\overline{F}_Q) = \{0\}^4$, после чего справедливость условий *(iii)–(vi)* теоремы 2 проверяется тривиально.

В рамках данного примера регулятор с представлением (20) при условии $\widetilde{F}(z) = \widetilde{D}$ полностью определяется матрицей $\widetilde{D}$, удовлетворяющей требованию $\overline{D}_P\widetilde{D}\overline{D}_Q = -\overline{R}$. Подставляя в последнее равенство найденные ранее матрицы, получим, что $\widetilde{D}$ будет иметь вид

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \widetilde{D}_{11} & \widetilde{D}_{12} \\ \widetilde{D}_{21} & \widetilde{D}_{22} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где $\widetilde{D}_{11} = \overline{\Pi}_{11}$, что заканчивает процедуру описания всех оптимальных анизотропийных регуляторов (20), связанных с аналогичными для исходной системы соотношением $\overline{u}_k = \begin{pmatrix} u_k^{\mathrm{T}} & h_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Сделаем несколько важных замечаний.

Во-первых, для того, чтобы получить окончательный ответ на поставленную задачу, полученную систему уравнений необходимо дополнить системой уравнений для определения наихудшего формирующего фильтра, таким образом находя переменные $L_1 \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ и $\sigma > 0$ (см., например, [12]).

Во-вторых, поскольку в рамках разобранного примера состояние наблюдалось (измерялось) точно, то естественным представляется выбор регулятора в форме статической обратной связи по состоянию $u_k = Kx_k$. В данном случае оптимальным выбором матрицы K является $K = \widetilde{D}_{11}$.

В заключение приведем также решение данной задачи для $a = 0$ (данный случай выбран из простоты, так как отсутствует необходимость решать вспомогательную задачу, связанную с формирующим фильтром). Можно показать, что все регуляторы с представлением

$$K \sim \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\varkappa - 1{,}4773 & -\varkappa - 1{,}4773 & \varkappa + 1 & \varkappa + 2{,}1823 \\ \hline -\varkappa - 1{,}4773 & -\varkappa - 1{,}4773 & \varkappa & \varkappa + 2{,}1823 \end{array}\right] \tag{35}$$

являются оптимальными, и имеют общую замкнутую систему, не зависящую от конкретного выбора $\varkappa$ (единственным вполне естественным ограничением будет $\varkappa \in (-2{,}4773;\ -0{,}4773)$, при котором спектральный радиус матрицы A_c меньше единицы):

$$x_{k+1} \approx \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -0{,}4773 & 0{,}7051 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} w_k, \tag{36a}$$

$$z_k \approx \begin{bmatrix} -1{,}4773 & 0{,}7051 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k. \tag{36b}$$

Заметим, что выбору $\varkappa \approx -1{,}4773$ в (35) как раз соответствует статический регулятор по состоянию $u_k = D_c x_k$.

4. Заключение

В статье получено параметрическое описание множества оптимальных анизотропийных регуляторов для линейных дискретных стационарных систем. Полученные результаты могут найти применение при решении практических задач навигации и управления, в частности, в случаях, когда на управление наложены несколько ограничений или задано требование минимизации нескольких критериев качества. Естественным продолжением работы является решение задачи параметризации множества субоптимальных анизотропийных регуляторов и оценивателей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Сначала покажем, что условия *(i)–(vi)*, объявленные в формулировке теоремы 2, эквивалентны условиям

(а) пара $(\overline{A}, \overline{B}_u)$ — стабилизируемая,

(б) пара $(\overline{C}_y, \overline{A})$ — детектируемая,

(в) $\mathrm{im}(\overline{B}_Q - \overline{B}_u \overline{D}_P^+ \overline{R}) \subseteq \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u})$,

(г) $S(\overline{F}_{Q_y}) \subseteq \ker(\overline{C}_P - \overline{R}\overline{D}_Q^+ \overline{C}_y)$,

(д) $\mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u})$,

(е) $(\overline{A} - \overline{B}_u \overline{D}_P^+ \overline{R}\overline{D}_Q^+ \overline{C}_y)\mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}) \subseteq \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u})$,

где матрицы $\overline{C}_P$, $\overline{D}_P$, $\overline{B}_Q$, $\overline{D}_Q$ и $\overline{R}$, а также системы $\overline{F}_{P_u}$ и $\overline{F}_{Q_y}$ по аналогии задаются в соответствии с изложенным в разделе 2.3 материале применительно к системе (18). Заметим, что условия *(а)–(е)* представляют собой прямой аналог условий *(i)–(vi)* теоремы 1 для системы (18).

Эквивалентность условий *(i)⇔(а)* и *(ii)⇔(б)* очевидна в силу обозначений (19). Для дальнейшего доказательства установим связь множеств $\mathcal{W}(F_{P_u})$ и $\mathcal{S}(F_{Q_y})$ из теоремы 1 с множествами $\mathcal{W}(\overline{F}_{P_u})$ и $\mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y})$, соответственно. Закрепив в качестве объекта исследования систему $\overline{F}$, путем непосредственного использования определений 4 и 5 проверяется, что всегда найдутся такие матрицы $\overline{\Pi}$ и $\overline{\Lambda}$, что

$$\text{(П.1a)} \qquad \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u}) = \mathcal{W}(F_{P_u}) \times \mathbb{R}^{n_h}, \qquad \mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}) = \mathcal{S}(F_{Q_y}) \times \{0\}^{n_h},$$

$$\text{(П.1b)} \qquad (\overline{A} + \overline{B}_u\overline{\Pi})\mathcal{W}(\overline{F}_{P_u}) \subseteq \mathcal{W}(\overline{F}_{P_u}), \qquad (\overline{A} + \overline{\Lambda}\overline{C}_y)\mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}) \subseteq \mathcal{S}(\overline{F}_{Q_y}),$$

$$\text{(П.1c)} \qquad \rho(\overline{A} + \overline{B}_u\overline{\Pi}) < 1, \qquad \rho(\overline{A} + \overline{\Lambda}\overline{C}_y) < 1.$$

После этого можно заключить, что эквивалентность условий *(iii)⇔(в)* и *(iv)⇔(г)* справедлива ввиду того, что

$$\text{(П.2a)} \qquad \ker(\overline{C}_P - \overline{R}\overline{D}_Q^{+}\overline{C}_y) = \ker(C_P - RD_Q^{+}C_y) \times \mathbb{R}^{n_h},$$

$$\text{(П.2b)} \qquad \operatorname{im}(\overline{B}_Q - \overline{B}_u\overline{D}_P^{+}\overline{R}) = \operatorname{im}(B_Q - B_uD_P^{+}R) \times \{0\}^{n_h}.$$

Наконец, в силу (П.1) доказывается эквивалентность условий *(v)⇔(д)* и *(vi)⇔(е)*.

Вид регулятора (20) полностью обусловлен содержанием теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

Автор статьи выражает благодарность Игорю Геннадьевичу Владимирову и Александру Викторовичу Юрченкову, принимавшим участие в обсуждении части материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Basile G., Marro G.* Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory // J. Optim. Theory Appl. 1969. Vol. 3. P. 306–315. https://doi.org/10.1007/BF0093137010.1007/BF00931370
2. *Chen B.M., Saberi A., Shamash Y.* Necessary and sufficient conditions under which a discrete time H_2-optimal control problem has a unique solution // Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control. 1993. Vol. 1. P. 805–810. https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325038
3. *Chen B.M., Saberi A., Shamash Y., Sannuti P.* Construction and parameterisation of all static and dynamic H_2-optimal state feedback solutions for discrete time systems // Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control. 1993. Vol. 1. P. 126–131. https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325177
4. *Diamond P., Kloeden P., Vladimirov I.* Mean anisotropy of homogeneous Gaussian random fields and anisotropic norms of linear translation-invariant operators on multidimensional integer lattices // J. Appl. Math. Stochast. Anal. 2003. Vol. 16:3. P. 209–231. https://doi.org/10.1155/S1048953303000169
5. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. Vol. 34. P. 831–847. https://doi.org/10.1109/9.29425

6. *Saberi A., Sannuti P., Stoorvogel A.A.* H_2 optimal controllers with measurement feedback for continuous-time systems: flexibility in closed-loop pole placement // Automatica. 1997. Vol. 33. No. 3. P. 289–304. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(96)00195-1
7. *Schumacher J.M.* Dynamic feedback in finite- and infinite-dimensional linear systems. Mathematisch Centrum. 1981. ISBN: 9061962293.
8. *Stoorvogel A.A.* The H_∞ control problem: a state space approach. Phd Thesis, Mathematics and Computer Science. Technische Universiteit Eindhoven. 1981. 229 P. https://doi.org/10.6100/IR338287
9. *Stoorvogel A.A.* The singular H_2 control problem // Automatica. 1992. Vol. 28. No. 3. P. 627–631. https://doi.org/10.1016/0005-1098(92)90189-M
10. *Trentelman H.L., Stoorvogel A.A.* Sampled-data and discrete-time H_2 optimal control // Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control. 1993. Vol. 1. P. 331–336. https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325136
11. *Trentelman H.L., Stoorvogel A.A.* Sampled-data and discrete-time H_2 optimal control // SIAM J. Control and Optimization. 1995. Vol. 33. No. 3. P. 834–862. https://doi.org/10.1137/S0363012992241995
12. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29. Is. 1. P. 3057–3062. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)58144-6
13. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic $H\infty$-optimization problem // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29. Is. 1. P. 3816–3821.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глумовым.

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 18.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023