

© 2023 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ПОДАВЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Предложен новый подход к задаче синтеза статического регулятора по состоянию или по выходу, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной дискретной системе управления. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где одной из переменных является матрица обратной связи. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Рассмотренный пример демонстрирует эффективность предложенной итерационной процедуры.

*Ключевые слова:* линейная дискретная система, внешние возмущения, обратная связь по выходу, обратная связь по состоянию, оптимизация, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231023100094, EDN: YVBXZN

### 1. Введение

Рассмотрим линейную дискретную систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Dw_k, \\ y_k &= Cx_k, \\ z_k &= C_1x_k, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с начальным состоянием  $x_0$ , состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^l$ , регулируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$(2) \quad |w_k| \leq 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Задача о подавлении ограниченных внешних возмущений состоит в нахождении стабилизирующей обратной связи, минимизирующей величину  $\max_k |z_k|$ . В настоящей работе будем искать статическую линейную обратную связь по состоянию  $u_k = Kx_k$  или по выходу  $u_k = Ky_k$  (если она существует).

Точное решение этой задачи затруднительно; следуя подходу, предложенному в [1–3], будем искать субоптимальное решение этой задачи в терминах инвариантных эллипсоидов. При этом исходную задачу будем рассматривать

как задачу оптимизации, где одной из переменных является матрица обратной связи, а минимизируемая функция определяет критерий качества — величину эллипсоида, содержащего регулируемый выход системы. Такой подход восходит к работам [4, 5], посвященным проблеме линейно-квадратичного регулирования.

Настоящая работа является естественным продолжением статьи [6], в которой с тех же позиций рассматривается и решается задача подавления ограниченных внешних возмущений для линейной системы управления в непрерывном времени.

Структура статьи следующая. В разделе 2 обсуждается алгоритм решения задачи анализа (нахождения минимального ограничивающего эллипсоида для замкнутой системы). В разделе 3 задача синтеза регулятора записывается как задача невыпуклой матричной оптимизации, даются формулировка и обоснование итеративного алгоритма ее решения, а раздел 4 содержит демонстрационный пример.

## 2. Задача анализа

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$(3) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с устойчивой (шуровской) матрицей  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , начальным состоянием  $x_0$ , состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , выходом  $z_k \in \mathbb{R}^l$  и внешним возмущением  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющим ограничению (2).

Напомним, что эллипсоид вида

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

называется инвариантным для системы (3), если из условия  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  следует  $x_k \in \mathcal{E}_x$  для всех моментов времени  $k = 1, 2, \dots$ . При этом, если  $\mathcal{E}_x$  — инвариантный эллипсоид с матрицей  $P$ , то выход  $z_k$  системы (3) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  принадлежит так называемому ограничивающему эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\},$$

а при  $x_0 \notin \mathcal{E}_x$  будет стремиться к нему.

Задача анализа состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В рамках предлагаемого подхода будем интересоваться минимальными эллипсоидами, содержащими выход системы; в качестве критерия минимальности эллипсоида обычно принимается величина  $\text{tr} CPC^T$ , равная сумме квадратов его полуосей. Имеет место следующий результат.

*Теорема 1* [1, 3]. Пусть матрица  $A$  шуровская,  $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$ , а матрица  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $\rho^2 < \alpha < 1$ , удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha} APA^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0.$$

Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для системы (3) сводится к минимизации одномерной функции

$$f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$$

на интервале  $\rho^2 < \alpha < 1$ , и если  $\alpha^*$  — точка минимума и  $x_0$  удовлетворяет условию  $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$ , то гарантируется оценка

$$|z_k| \leq \sqrt{f(\alpha^*)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В статье [7] было предложено применять метод Ньютона для решения оптимизационной задачи, сформулированной в теореме 1. А именно, зададимся начальным приближением  $\rho^2(A) < \alpha_0 < 1$ , например  $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A))/2$ , и применим итерационный процесс

$$(4) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где

$$f'(\alpha) = \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{1}{\alpha^3} A(P-X)A^T \right),$$

а  $P$ ,  $Y$  и  $X$  — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha} APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha} DD^T = 0, \quad \frac{1}{\alpha} A^T Y A - Y + C^T C = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha} AXA^T - X + \frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T = 0.$$

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма; ее справедливость устанавливается аналогично сходному результату в [6].

*Теорема 2. В методе (4) справедливы оценки*

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где  $c > 0$  — некоторая константа.

### 3. Задача синтеза

Вернемся к системе (1) и будем далее предполагать, что матрицы  $D$  и  $C_1$  — квадратные невырожденные.<sup>1</sup> Задача состоит в нахождении статической линейной обратной связи по выходу

$$u_k = Ky_k$$

<sup>1</sup> Это техническое предположение безусловно можно ослабить, но цель сейчас — получить наиболее простые и наглядные результаты.

(а в случае  $C = I$  — обратную связь по состоянию), которая стабилизирует замкнутую систему (1) и подавляет воздействие внешних возмущений (2), минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для регулируемого выхода  $z_k$ . В качестве критерия оптимальности примем величину

$$\text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2,$$

первая компонента которой определяет размер ограничивающего эллипсоида, а вторая представляет собой штраф, позволяющий избежать появления больших значений матрицы регулятора (коэффициент  $\rho > 0$  регулирует его важность).

С учетом теоремы 1 исходная задача сводится к матричной оптимизационной задаче

$$\min f(K, \alpha), \quad f(K, \alpha) = \text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2,$$

при ограничении

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC)P(A + BKC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0$$

относительно матричных переменных  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  и скалярного параметра  $0 < \alpha < 1$ .

Как было показано в разделе 2, минимизацию по параметру  $\alpha$  можно проводить достаточно эффективно (нужно лишь матрицу  $A$  заменить на  $A + BKC$ ), поэтому займемся минимизацией функции

$$f(K) = \min_{\alpha} f(K, \alpha).$$

Сделаем следующее предположение.

*Предположение.* Известен стабилизирующий регулятор  $K_0$ , т.е. такой, что матрица  $A + BK_0C$  шуровская.

Отметим, что функция  $f(K)$  определена и положительна на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов. Множество  $\mathcal{S}$  ее определения может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими; здесь ситуация полностью аналогична непрерывному случаю (см. [6]).

*Лемма 1.* Функция  $f(K)$  коэрцитивна на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем

$$(6) \quad f(K) \geq \frac{1}{1 - \rho^2(A + BKC)} \frac{\lambda_{\min}(CC^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BKC)} \|D\|_F^2,$$

$$f(K) \geq \rho \|K\|^2.$$

*Следствие 1.* Множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{K \in \mathcal{S} : f(K) \leq f(K_0)\}$$

ограничено для любого регулятора  $K_0 \in \mathcal{S}$ .

С другой стороны, у функции  $f(K)$  на множестве  $\mathcal{S}_0$  существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество  $\mathcal{S}_0$  не имеет общих точек с границей  $\mathcal{S}$  в силу (6). Далее будет показано, что  $f(K)$  дифференцируема на  $\mathcal{S}_0$ , следовательно, справедлив следующий результат.

*Следствие 2. Существует точка минимума  $K_*$  на множестве  $\mathcal{S}$ , и в ней градиент обращается в нуль.*

Свойства градиента и гессиана функции  $f(K, \alpha)$  устанавливаются следующими двумя леммами.

*Лемма 2. Функция  $f(K, \alpha)$  определена и дифференцируема на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов  $K$  и для  $\rho^2(A + BKC) < \alpha < 1$ . При этом*

$$(7) \quad \frac{1}{2} \nabla_K f(K, \alpha) = \rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T,$$

$$\nabla_\alpha f(K, \alpha) = \text{tr} Y \left( \frac{1}{(1 - \alpha)^2} D D^T - \frac{1}{\alpha^2} (A + BKC) P (A + BKC)^T \right),$$

где матрицы  $P$  и  $Y$  — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC) P (A + BKC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

и

$$(9) \quad \frac{1}{\alpha} (A + BKC)^T Y (A + BKC) - Y + C_1^T C_1 = 0.$$

Минимум функции  $f(K, \alpha)$  достигается во внутренней точке множества  $\mathcal{S} \times (\rho^2(A + BKC), 1)$  и определяется условиями

$$\nabla_K f(K, \alpha) = \nabla_\alpha f(K, \alpha) = 0.$$

При этом  $f(K, \alpha)$  как функция от  $\alpha$  строго выпукла на интервале  $\rho^2(A + BKC) < \alpha < 1$  и достигает минимума в его внутренней точке.

*Лемма 3. Функция  $f(K, \alpha)$  дважды дифференцируема по  $K$ , причем действие гессиана функции на произвольную матрицу<sup>2</sup>  $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$  дается выражением*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \\ & = \rho \langle E, E \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle B^T Y B E C P C^T, E \rangle + \frac{2}{\alpha} \langle B^T Y (A + BKC) P' C^T, E \rangle, \end{aligned}$$

где  $P'$  — решение дискретного уравнения Ляпунова

$$(10) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + BKC) P' (A + BKC)^T - P' + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left( (A + BKC) P (B E C)^T + B E C P (A + BKC)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

<sup>2</sup> Понимаемое в смысле второй производной по направлению.

Градиент функции  $f(K, \alpha)$  как функция от  $K$  не является липшицевым на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что — как и в непрерывном случае — он обладает этим свойством на его подмножестве  $\mathcal{S}_0$ .

Полученные свойства минимизируемой функции позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость. А именно, предлагается итеративный подход к решению этой задачи, в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной  $K$  и метода Ньютона по переменной  $\alpha$ .

Приведем принципиальную схему алгоритма.

1. Задаемся параметрами  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $0 < \tau < 1$  и начальным стабилизирующим приближением  $K_0$ . Вычисляем величину

$$\alpha_0 = \frac{1 + \rho^2(A + BK_0C)}{2}.$$

2. На  $j$ -й итерации заданы  $K_j$  и  $\alpha_j$ . Вычисляем  $A_j = A + BK_jC$ , решаем уравнения (8), (9) и находим матрицы  $P$ ,  $Y$ ; вычисляем градиент

$$H_j = \nabla_K f(K_j, \alpha_j)$$

из соотношения (7).

Если  $\|H_j\| \leq \varepsilon$ , то регулятор  $K_j$  принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага  $\gamma_j > 0$  подбираем дроблением  $\gamma$  до выполнения условий:

- а.  $K_{j+1}$  — стабилизирующий регулятор: матрица  $(A + BK_{j+1}C)/\sqrt{(\alpha_j)}$  шуровская;
- б.  $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau\gamma_j\|H_j\|^2$ .

4. Для полученного  $K_{j+1}$  решаем задачу минимизации  $f(K_{j+1}, \alpha)$  по  $\alpha$  и находим  $\alpha_{j+1}$ .

Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

*Теорема 3. На каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений  $\gamma_j$ , функция  $f(K_j)$  монотонно убывает и градиент стремится к нулю*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|H_j\| = 0$$

*со скоростью геометрической прогрессии.*

Доказательство полностью аналогично непрерывному случаю и использует обычную схему анализа градиентного метода для безусловной минимизации функций с липшицевым градиентом [8].

#### 4. Пример

Рассмотрим систему вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0050 & 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0050 & 0,9950 & 0,0002 & 0,0998 \\ -0,0997 & 0,0997 & 0,9950 & 0,0050 \\ 0,0997 & -0,0997 & 0,0050 & 0,9950 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \\ 0,0998 \\ 0,0002 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,0050 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0050 \\ 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0002 & 0,0998 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

представляющую собой слегка видоизмененный пример 4.3.2 из монографии [3].

Положим  $\rho = 0,1$  и возьмем в качестве начального некоторый стабилизирующий регулятор

$$K_0 = \begin{pmatrix} -2,9823 \\ -3,9608 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс завершается на 25-м шаге и предоставляет регулятор

$$K_* = \begin{pmatrix} -0,6519 \\ -1,8166 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс по регулируемому выходу системы с матрицей

$$\begin{pmatrix} 19,2309 & -3,4643 \\ -3,4643 & 10,3506 \end{pmatrix}.$$

Динамика итерационного процесса показана на рис. 1.

Взяв в качестве начального приближения стабилизирующий регулятор

$$K'_0 = \begin{pmatrix} -0,3675 \\ -0,7106 \end{pmatrix},$$

на 24-м шагу получаем регулятор

$$K'_* = \begin{pmatrix} -0,6527 \\ -1,8166 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$\begin{pmatrix} 19,2293 & -3,4638 \\ -3,4638 & 10,3543 \end{pmatrix}.$$

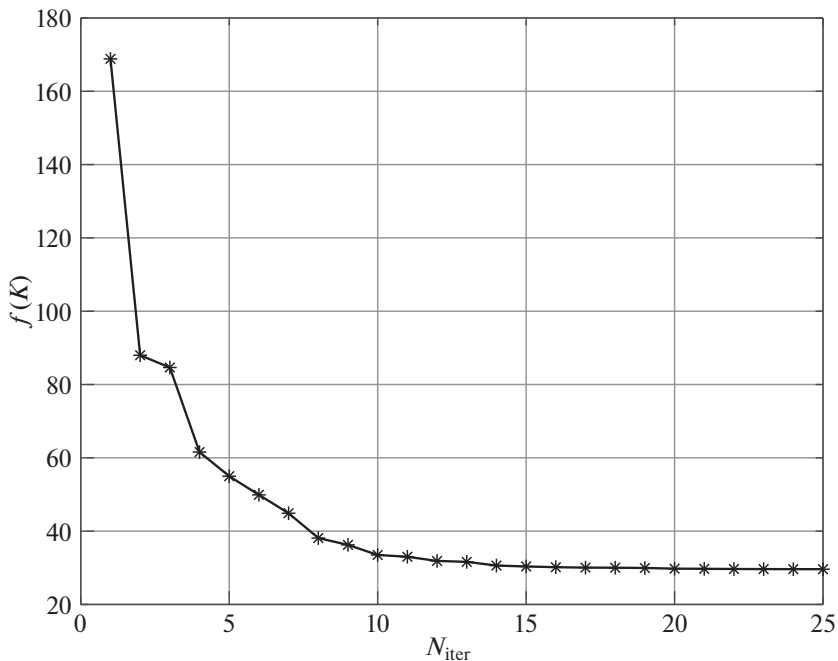


Рис. 1. Оптимизационная процедура.

Обратим внимание, что регуляторы  $K_*$  и  $K'_*$  отличаются по норме на доли процента, так же, как и найденные ограничивающие эллипсы (по критерию следа).

Для сравнения решим эту же задачу, построив обратную связь в виде динамического регулятора

$$u_k = K\hat{x}_k$$

при помощи наблюдателя

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0.$$

Следуя подходу [3], основанному на использовании техники линейных матричных неравенств, получаем матрицу обратной связи

$$K = \begin{pmatrix} -39,0055 & -46,7193 & -8,5074 & -98,0176 \end{pmatrix},$$

матрицу наблюдателя

$$L = \begin{pmatrix} 0,5655 & 0,0759 \\ -6,7183 & 1,8722 \\ -2,2061 & 1,0573 \\ -2,8715 & 0,7224 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\begin{pmatrix} 32,2165 & -14,9238 \\ -14,9238 & 36,3654 \end{pmatrix}$$

эллипса, содержащего регулируемый выход.



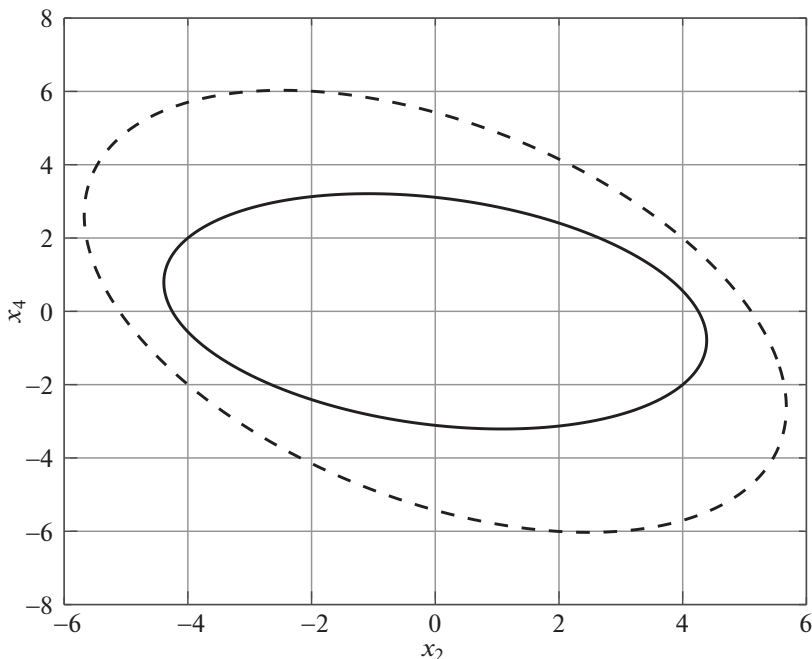


Рис. 2. Ограничивающие эллипсы.

Небольшое техническое различие между постановками этих задач состоит в том, что в последнем случае вместо регуляризующей добавки  $\rho \|K\|_F^2$  в минимизируемой функции с теми же целями в регулируемый выход системы вводится дополнительный член с управлением:  $z_k = C_1 x_k + B_1 u_k$ .

На рис. 2 сплошной линией показан ограничивающий эллипс, найденный в соответствии с предлагаемой итерационной процедурой, а пунктиром — эллипс, предоставляемый динамическим регулятором. Довольно большая разница в размерах эллипсов объясняется тем, что при построении динамической обратной связи приходится производить ряд закруглений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства, что и приводит к излишнему консерватизму.

## 5. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза регулятора, оптимально подавляющего ограниченные внешние возмущения в линейной дискретной системе. Он основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменной является матрица обратной связи. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Рассмотренный пример демонстрирует эффективность предложенной процедуры.

В работе рассмотрена проблема подавления внешних возмущений при достаточно жестких ограничениях: в частности, предполагается, что размерность возмущений и регулируемых выходов совпадает с числом состояний.

Однако метод работает и достаточно эффективен и при отсутствии таких ограничений; его обоснование представляет собой важную задачу.

Поскольку область определения  $f(K)$  может быть даже несвязной, трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму. Однако для задачи управления по состоянию, как и в непрерывном случае, по-видимому, можно ожидать, что минимизируемая функция удовлетворяет *условию градиентного доминирования* и ожидать глобальную сходимость к единственной точке минимума.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Рассмотрим последовательность допустимых регуляторов  $\{K_j\} \in \mathcal{S}$  такую, что  $K_j \rightarrow K \in \partial\mathcal{S}$ , т.е.  $\rho(A + BKC) = 1$ . Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $N = N(\varepsilon)$  такое, что неравенство

$$|\rho(A + BK_jC) - \rho(A + BKC)| = 1 - \rho(A - BK_jC) < \varepsilon$$

справедливо для всех  $j \geq N(\varepsilon)$ .

Пусть  $P_j$  — решение уравнения (5), ассоциированного с регулятором  $K_j$ :

$$\frac{1}{\alpha_j}(A + BK_jC)P_j(A + BK_jC)^T - P_j + \frac{1}{1 - \alpha_j}DD^T = 0,$$

а  $Y_j$  — решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j}(A + BK_jC)^TY_j(A + BK_jC) - Y_j + C_1C_1^T = 0.$$

Тогда с учетом [6, леммы П.1, П.2] и [7, лемма П.1.2] имеем:

$$\begin{aligned} f(L_j) &= \text{tr } C_1P_jC_1^T + \rho\|K_j\|_F^2 \geq \text{tr } P_jC_1C_1^T = \text{tr} \left( Y_j \frac{1}{1 - \alpha_j} DD^T \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D\|_F^2 \geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{1 - \rho^2(A + BK_jC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \rho(A + BK_jC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A + BK_jC)} \|D\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку  $\rho^2(A + BK_jC) < \alpha_j < 1$ .

С другой стороны,

$$f(K_j) = \operatorname{tr} C_1 P_j C_1^T + \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|_F^2 \geq \rho \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма 1 доказана.

*Доказательство леммы 2.* Дифференцирование по  $\alpha$  производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 2, с заменой  $A$  на  $A + BKC$ .

Придадим в уравнении (5) величине  $K$  приращение  $\Delta K$  и обозначим соответствующее приращение  $P$  через  $\Delta P$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + B(K + \Delta K)C)(P + \Delta P)(A + B(K + \Delta K)C)^T - \\ & - (P + \Delta P) + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение  $\Delta P$  для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left( (A + BKC)P(A + BKC)^T + B\Delta KCP(A + BKC)^T + \right. \\ & \left. + (A + BKC)P(B\Delta KC)^T + (A + BKC)\Delta P(A + BKC)^T \right) - \\ & - (P + \Delta P) + \frac{1}{1 - \alpha} DD^T = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (5) из этого уравнения имеем

$$\begin{aligned} \text{(П.1)} \quad & \frac{1}{\alpha} (A + BKC)\Delta P(A + BKC)^T - \Delta P + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left( (A + BKC)P(B\Delta KC)^T + B\Delta KCP(A + BKC)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение функционала  $f(K)$ , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta f(K) &= f(K) - f(K + \Delta K) = \\ &= \operatorname{tr} C_1 (P + \Delta P) C_1^T + \rho \|K + \Delta K\|_F^2 - (\operatorname{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|K\|_F^2) = \\ &= \operatorname{tr} C_1 \Delta P C_1^T + \rho \operatorname{tr} K^T \Delta K + \rho \operatorname{tr} (\Delta K)^T K = \operatorname{tr} \Delta P C_1^T C_1 + 2\rho \operatorname{tr} K^T \Delta K. \end{aligned}$$

По лемме [6, лемма П.1] из двойственных уравнений (П.1) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f(K) &= 2 \operatorname{tr} Y \frac{1}{\alpha} B \Delta K C P (A + BKC)^T + 2\rho \operatorname{tr} K^T \Delta K = \\ &= 2 \operatorname{tr} \left( \rho K^T + \frac{1}{\alpha} C P (A + BKC)^T Y B \right) \Delta K = \\ &= 2 \left\langle \rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T, \Delta K \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (7). Лемма 2 доказана.

*Доказательство леммы 3.* Вычислим величину

$$\nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \langle \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E], E \rangle,$$

взяв производную от  $\nabla_K f(K, \alpha)[E] = \langle \nabla_K f(K, \alpha), E \rangle$  по направлению  $E \in \mathbb{R}^{p \times l}$ .

Линеаризуя соответствующие величины, вычислим приращение функционала  $\nabla_K f(K, \alpha)[E]$  по направлению  $E$ :

$$\begin{aligned} & \Delta \nabla_K f(K, \alpha)[E] = \\ & = 2 \left( \rho(K + \delta E) + \frac{1}{\alpha} B^T (Y + \Delta Y) (A + B(K + \delta E)C) (P + \Delta P) C^T \right) - \\ & \quad - 2 \left( \rho K + \frac{1}{\alpha} B^T Y (A + BKC) P C^T \right) = \\ & = 2\delta \left( \rho E + \frac{1}{\alpha} B^T (Y B E C P + Y'(K)[E](A + BKC)P + \right. \\ & \quad \left. + Y(A + BKC)P'(K)[E]) C^T \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(K + \delta E) - P(K) = \delta P'(K)[E], \\ \Delta Y &= Y(K + \delta E) - Y(K) = \delta Y'(K)[E]. \end{aligned}$$

Таким образом, обозначая  $P' = P'(K)[E]$  и  $Y' = Y'(K)[E]$ , имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \\ & = \left\langle \rho E + \frac{1}{\alpha} B^T (Y B E C P + Y'(A + BKC)P + Y(A + BKC)P') C^T, E \right\rangle. \end{aligned}$$

Далее,  $P = P(K)$  есть решение дискретного уравнения Ляпунова (5); запишем его в приращениях по направлению  $E$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} (A + B(K + \delta E)C) (P + \delta P') (A + B(K + \delta E)C)^T - \\ & \quad - (P + \delta P') + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \left( (A + BKC)P(A + BKC)^T + (A + BKC)\delta P'(A + BKC)^T + \right. \\ & \quad \left. + (A + BKC)P(B\delta EC)^T + B\delta EC P(A + BKC)^T \right) - \\ & \quad - (P + \delta P') + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0, \end{aligned}$$

откуда с учетом (5) приходим к уравнению (10).

Далее,  $Y = Y(K)$  есть решение дискретного уравнения Ляпунова (9); запишем его в приращениях по направлению  $E$ :

$$\frac{1}{\alpha}(A + B(K + \delta E)C)^T(Y + \delta Y')(A + B(K + \delta E)C) - (Y + \delta Y') + C_1^T C_1 = 0$$

или

$$\frac{1}{\alpha} \left( (A + BKC)^T Y (A + BKC) + (A + BKC)^T \delta Y' (A + BKC) + (A + BKC)^T Y B \delta EC + (B \delta EC)^T Y (A + BKC) \right) - (Y + \delta Y') + C_1^T C_1 = 0.$$

С учетом (9) имеем

$$(П.2) \quad \frac{1}{\alpha}(A + BKC)^T Y' (A + BKC) - Y' + \frac{1}{\alpha} \left( (A + BKC)^T Y B E C + (B E C)^T Y (A + BKC) \right) = 0.$$

Из (10) и (П.2) имеем соотношение

$$\text{tr } P'(A + BKC)^T Y B E C = \text{tr } Y' B E C P (A + BKC)^T,$$

так что

$$\frac{1}{2} \nabla_K^2 f(K, \alpha)[E, E] = \rho \langle E, E \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle B^T Y B E C P C^T, E \rangle + \frac{2}{\alpha} \langle B^T Y (A + BKC) P' C^T, E \rangle.$$

Лемма 3 доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
2. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.  
*Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V.* Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
3. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
4. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
5. *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.

6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ.* 2021. № 9. С. 86–115.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V.* Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
7. *Хлебников М.В.* Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // *АиТ.* 2023. № 4. С. 64–95.  
*Khlebnikov M.V.* A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
8. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Глузовым.*

Поступила в редакцию 19.06.2023

После доработки 24.07.2023

Принята к публикации 02.08.2023