Автоматика и телемеханика, № 11, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. **Д.А. КУЛИКОВ, канд. физ.-мат. наук (kulikov_d_a@mail.ru)**
(Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова)

БИФУРКАЦИИ ПАТТЕРНОВ В НЕЛОКАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ЭРОЗИИ

Рассматривается периодическая краевая задача для нелинейного уравнения с частными производными с отклоняющейся пространственной переменной. Это уравнение носит название нелокального уравнения эрозии и было предложено в качестве одной из моделей формирования динамических паттернов на поверхности полупроводников.

Показано, что формирование пространственно неоднородного рельефа — это процесс самоорганизации. Неоднородный рельеф возникает как результат локальных бифуркаций в окрестности однородных состояний равновесия при смене ими устойчивости. Анализ задачи опирается на современные методы теории бесконечномерных динамических систем, включая такие разделы, как теория инвариантных многообразий, аппарат нормальных форм, асимптотические методы анализа динамических систем.

Ключевые слова: нелокальное уравнение эрозии, аттракторы, устойчивость, бифуркации, нормальные формы, асимптотика.

DOI: 10.31857/S000523102311003X, **EDN:** OOVFMW

1. Введение

Одной из актуальных задач микроэлектроники (наноэлектроники), начиная с 80-х гг. 20-го века считалась и продолжает считаться проблема описания процесса формирования неоднородного (например, волнового) рельефа на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием потока ионов. Природа волнообразного рельефа продолжает вызывать много дискуссий (см., например, [1–6]). Экспериментально установлено, что волновой нанорельеф образуется на поверхности полупроводников и диэлектриков в определенном диапазоне углов падения ионов. Он, естественно, зависит от интенсивности пучка, типа ионов, а также материала облучаемого образца. Экспериментально наиболее изучен процесс формирования наноструктур на поверхности кремния.

Почти сразу возникли математические модели, предложенные для объяснения феномена формирования неоднородного микро(нано) рельефа. Использовались два подхода: стохастический и детерминистский.

С прикладной точки зрения более привлекателен подход, который рассматривает такой процесс как динамический. Наиболее известной моделью следует считать вариант, предложенный Бредли и Харпером [7]. Основу этой модели представляет одна из версий известного уравнения Курамото–Сивашинского, дополненного естественными, с точки зрения физики процесса, краевыми условиями. В принципе, различные варианты и модификации этой модели дали достаточно убедительное описание процесса формирования неоднородного (волнового) рельефа. Вместе с тем эта модель в первоначальной постановке имела ряд недостатков. Одним из них можно назвать то обстоятельство, что во многих случаях у соответствующей краевой задачи выявлялась возможность формирования неоднородного рельефа, в котором основную роль играла первая из возможных мод (см., например, [8–11]). Такой вывод во многих случаях противоречит результатам опытов.

Одной из возможных неформальных модификаций является модель, известная под названием "нелокальное уравнение эрозии" [8–11], которая учитывает ряд нелокальных эффектов. К ним, в первую очередь, следует отнести то обстоятельство, что место "внедрения" ("входа") иона в полупроводниковый материал и "выхода" не обязаны совпадать. Это привело к появлению математической модели, в которой использовалось дифференциальное уравнение с частными производными, содержащее в ряде членов уравнения неизвестную функцию с отклонением у нее пространственного аргумента.

В данной работе будем рассматривать один из вариантов нелокального уравнения эрозии, дополненного периодическими краевыми условиями. В [11–16] можно найти иные постановки задач для нелокального уравнения эрозии.

Далее будет рассматриваться периодическая краевая задача (КЗ) для нелокального уравнения эрозии

$$u_\tau = du_{yy} - c_1 w_y + c_2 w_y^2 + c_3 w_y^3, \tag{1.1}$$

$$u(\tau, y + 2l) = u(\tau, y), \tag{1.2}$$

где $u = u(\tau, y)$, $w = u(\tau, y - h_0)$, h_0 – положительная постоянная, призванная учесть нелокальные эффекты (она пропорциональна среднему расстоянию между точками "входа" и "выхода" иона из падающего пучка), $d > 0$, $c_1 > 0$, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ – постоянные, характеризующие условия бомбардировки. Так, например, d – коэффициент диффузии материала мишени, коэффициент c_1 характеризует интенсивность (энергию) пучка ионов. Основным параметром, отличающим данную модель от иных (например, Бредли–Харпера), следует считать учет отклонения $h_0 > 0$. Постоянная h_0 пропорциональна углу наклона между направлением пучка и нормалью к поверхности, которая до начала обработки была плоской. Сразу отметим, что, в принципе, отклонение рельефа от состояния равновесия $u(\tau, y)$ должно зависеть от второй пространственной координаты y_1: $u = u(\tau, y, y_1)$. Но в большинстве экспериментов зависимость от y_1 весьма слабая и поэтому приближение $u = u(\tau, y)$ считается допустимым.

Замены

$$\tau = \frac{l}{\pi c_1} t, \quad y = \frac{l}{\pi} x$$

позволяют переписать КЗ (1.1), (1.2) в следующем виде:

$$u_t = au_{xx} - w_x + b_2 w_x^2 + b_3 w_x^3, \tag{1.3}$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{1.4}$$

где $u = u(t, x)$, $w = u(t, x - h)$, а

$$h = \frac{h_0 \pi}{l}, \quad a = \frac{d\pi}{lc_1}, \quad b_2 = \frac{c_2 \pi}{c_1 l}, \quad b_3 = \frac{c_3 \pi^2}{l^2 c_1}.$$

Сразу отметим, что КЗ (1.3), (1.4) имеет решение вида $u(t, x) = \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Если КЗ (1.3), (1.4) дополнить начальными условиями

$$u(0, x) = f(x) \quad (w(0, x) = f(x - h)), \tag{1.5}$$

где $f(x) \in \mathbb{H}_2^1$, то полученная начально-краевая задача будет локально корректно разрешима. Это вытекает из результатов, полученных в [17, 18]. Более того, начально-краевая задача (1.3), (1.4), (1.5) порождает локальный гладкий полупоток $T^t : f(x) \to u(t, x),\ t \in (0, \delta), \delta > 0$.

Напомним, что $f(x) \in \mathbb{H}_2^1$, если:

1) $f(x + 2\pi) = f(x)$;

2) при $x \in [0, 2\pi]$ справедливо включение $f(x) \in \mathbb{W}_2^1[0, 2\pi]$, где $\mathbb{W}_2^1[0, 2\pi]$ – пространство функций $f(x)$, для которых $f(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ и обобщенная производная $f'(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ (см., например, [19]).

Отметим одну из особенностей КЗ (1.3), (1.4). Пусть $u(t, x)$ – какое-либо решение этой КЗ, тогда $\alpha + u(t, x)$ также будет ее решением. Далее будет изучаться вопрос о структуре окрестности решений вида $u(t, x) = \alpha$ – пространственно однородных состояний равновесия. В частности, предполагается изучить механизм формирования локальных аттракторов, содержащих пространственно неоднородные решения.

2. Некоторые предварительные построения

Рассмотрим нелинейную КЗ (1.3), (1.4). Через

$$M(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) dx$$

обозначим пространственное среднее функции $u(t, x)$. Если представить решение $u(t, x)$ в виде ряда Фурье относительно пространственной переменной x, то тогда получим равенство

$$u(t, x) = u_0(t) + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp(inx),$$

где

$$u_0(t) = M(u), \quad u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) \exp(-inx) dx.$$

Следовательно, любое решение нелинейной КЗ (1.3), (1.4) можно записать в виде

$$u(t,x) = u_0(t) + v(t,x),\ v(t,x) = \sum_{n\neq 0} u_n(t)\exp(inx),\quad M(v) = 0.$$

Поэтому КЗ (1.3), (1.4) можно записать в следующем виде:

(2.1) $$u_{0t}(t) = b_2M(w_x^2) + b_3M(w_x^3),$$

(2.2) $$v_t = Av + F_2(w_x) + F_3(w_x),$$

(2.3) $$v(t, x + 2\pi) = v(t,x),\ M(v) = 0.$$

В уравнениях (2.1), (2.2) использованы следующие обозначения:

$$Av = av_{xx} - w_x, \quad w = v(t, x - h),$$
$$F_2(w_x) = b_2w_x^2 - b_2M(w_x^2), \quad F_3(w_x) = b_3w_x^3 - b_3M(w_x^3).$$

При формировании правой части дифференциального уравнения (2.2) учтено, что $Au_0 = 0$ и что правая часть первоначального варианта дифференциального уравнения с частными производными (1.3) не зависит от $u_0(t)$.

Анализ КЗ (1.3), (1.4) может быть разделен на два этапа. Первый этап состоит в изучении КЗ (2.2), (2.3). После этого на втором этапе уравнение (2.1) позволит восстановить $u_0(t)$. При этом отметим, что без дополнительных условий из уравнения (2.1) функция $u_0(t)$ восстанавливается с точностью до произвольной постоянной.

Итак, основным моментом при изучении КЗ (1.3), (1.4) следует считать анализ вспомогательной нелинейной КЗ (2.2), (2.3). Подчеркнем, что у нее есть единственное пространственно однородное состояние равновесия $v(t,x) = 0$.

3. Об устойчивости нулевого решения вспомогательной нелинейной КЗ

Для анализа устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной КЗ (2.2), (2.3) предварительно изучим ее линеаризованный вариант, т.е. линейную КЗ

(3.1) $$v_t = Av,\ Av = av_{xx} - w_x,$$

(3.2) $$v(t, x + 2\pi) = v(t,x),\ M(v) = 0,\ w = v(t, x - h).$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор (ЛДО)

$$Ap = A(a,h)p = ap_{xx}(x) - p_x(x - h),$$

где достаточно гладкая функция $p(x)$ удовлетворяет периодическим краевым условиям $p(x+2\pi) = p(x)$ и имеет нулевое среднее. У него существует счетный набор собственных значений

$$\lambda_n = \lambda_n(a,h) = -an^2 - in\exp(-inh),\ \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

которым отвечает набор собственных функций $\{\exp(inx)\}$, формирующих полную ортогональную систему функций в пространстве $\mathbb{L}_{2,0}(0, 2\pi)$: :$f(x) \in \mathbb{L}_{2,0}(0, 2\pi)$, если $f(x) \in \mathbb{L}_2(0, 2\pi)$ и $M(f) = 0$.

Справедливо утверждение.

Лемма 1. Если $\lambda_n(a,h)$ при выбранных a,h таковы, что

$$Re\lambda_n(a,h) < 0,$$

то все решения линейной КЗ (3.1), (3.2) *асимптотически устойчивы в метрике пространства начальных условий КЗ* (3.1), (3.2).

В качестве пространства начальных условий естественно выбрать функциональное пространство $\mathbb{H}^1_{2,0} : f(x) \in \mathbb{H}^1_{2,0}$, если $f(x) \in \mathbb{H}^1_2$ и $M(f) = 0$. Действительно, рассмотрим начально-краевую задачу (3.1), (3.2), (1.5) при $f(x) \in \mathbb{H}^1_{2,0}$. Ее решение можно найти в явном виде

$$v(t,x) = \sum_{n\neq 0} f_n \exp(\lambda_n t)\exp(inx), \tag{3.3}$$

где λ_n – собственные числа ЛДО A, а $\{f_n\}$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ ($f_0 = 0$, так как $M(f) = 0$).

Достаточно стандартно проверяется, что

1) $v(t,x) \to f(x)$ в метрике $\mathbb{H}^1_2$, если $t \to +0$;

2) при $t \geqslant t_0 > 0$ решение (3.3) – бесконечно-дифференцируемая функция.

Свойство 2) вытекает из следующего замечания, которое проверяется достаточно стандартным способом: при $t \geqslant t_0 > 0$ ряд в правой части (3.3) сходится равномерно вместе с частными производными любого порядка. Это доказательство использует то обстоятельство, что

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\lambda_n(a,h)}{n^2} = -a.$$

Отметим также, что $\lim_{|n|\to\infty}(Im(\lambda_n(a,h)))/n^2 = 0$. Следовательно, справедливо следующее неравенство: $|Im\lambda_n(a,h)| \leqslant K|Re\lambda_n(a,h)|$, если $|n| \geqslant n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ – множеству натуральных чисел), а K – некоторая положительная постоянная.

Эти замечания, в частности, позволяют сформулировать утверждение, что ЛДО A – производящий оператор аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов, а линейная КЗ (3.1), (3.2) может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений в смысле определений из [17, 18, 20].

Если при некотором $n = m$ оказалось, что $Re\lambda_m(a,h) > 0$, то, естественно, решения линейной КЗ (3.1), (3.2) неустойчивы.

Из вышесказанных замечаний вытекает справедливость утверждения.

Лемма 2. Пусть при всех $n \in \mathbb{Z}_*$ (множеству целых чисел $n \neq 0$) справедливы неравенства

$$Re\lambda_n \leqslant -\gamma_0 < 0,$$

тогда нулевое решение нелинейной КЗ (2.2), (2.3) *асимптотически устойчиво. Если же существует $m \in \mathbb{Z}_*$, такое что $Re\lambda_m > 0$, то оно неустойчиво.*

Отметим, что условия $Re\lambda_n \leqslant 0$, $Re\lambda_m = 0$ при некоторых $m \in Z_*$ выделяют критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения КЗ (2.2), (2.3).

Далее в этом разделе уделим основное внимание вопросу о том, при каких условиях может реализоваться критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения КЗ (2.2), (2.3). Подчеркнем, что при $h = 0$

$$\lambda_n(a, 0) = -an^2 - in$$

и, следовательно, $Re\lambda_n(a, 0) < 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}_*$ ($\mathbb{Z}_* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$). Поэтому критический случай возможен лишь при $h > 0$ ($h \geqslant 0$ по условию). При всех $a > 0$ найдем наименьшее положительное $h = h_*(a)$, при котором он может реализоваться.

Сначала найдем такие значения h_n, при которых справедливы равенства

$$Re\lambda_n(a, h_n) = \ 0.$$

Такие h_n следует искать как решения уравнения $-an^2 - n \sin nh = 0$ или

$$\sin nh = -an. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) имеет решения, если $|an| \leqslant 1$. Без нарушения общности можно считать, что $n \in \mathbb{N}$ – множеству натуральных чисел, так как замена n на $-n$ не меняет уравнение (3.4).

Итак, $an \leqslant 1$. Тогда уравнение (3.4) имеет две группы решений:

1) $h_n(m) = \frac{1}{n}(2\pi m - \arcsin(an)), m \in \mathbb{Z}$,

2) $h_n(k) = \frac{1}{n}(\pi + \arcsin(an) + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

В первой группе решений тригонометрического уравнения наименьший положительный корень равен $h_n(1) = (2\pi - \arcsin(na))/n$, а во второй группе решений $h_n(0) = (\pi + \arcsin(na))/n$. Более того, справедливо неравенство

$$\frac{1}{n}(\pi + \arcsin(na)) \leqslant \frac{1}{n}(2\pi - \arcsin(na)) \tag{3.5}$$

при любом натуральном n, если, конечно, $na \leqslant 1$. Неравенство (3.5) эквивалентно неравенству

$$2\arcsin(na) \leqslant \pi \quad \text{или} \quad \arcsin(na) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

В результате приходим к заключению, что h_* следует искать как наименьший элемент последовательности

$$d_n = d_n(a) = \frac{1}{n}(\pi + \arcsin(an)), \ \text{ если } \ n \leqslant \frac{1}{a}.$$

Подчеркнем, что $d_n = h_n(0)$. Ясно, что, в принципе, выбор наименьшего d_n можно сделать простым перебором. Например, если $a = 1$, то эта последовательность содержит один элемент $d_1 = 3\pi/2$ и $h_* = 3\pi/2$. Если же $a = 1/2$, то $d_1 = 7\pi/6$, $d_2 = 3\pi/4$, поэтому $h_* = 3\pi/4$. Вместе с тем при уменьшении a число элементов в последовательности $d_n(a)$ возрастает, поэтому желательно простой перебор усовершенствовать и предложить более короткий вариант выбора h_*.

Например, если $a \geqslant a_0$, где положительная постоянная a_0 будет указана позднее, то можно заметить, что при всех таких a выполнены неравенства $d_k(a) \leqslant d_{k-1}(a)$, т.е. последовательность $d_k(a)$ убывает с ростом k. Проверка последнего свойства для элементов последовательности $d_k(a)$ может быть сведена к анализу неравенств

$$g_k(a) = (k-1)\arcsin(ka) - k\arcsin((k-1)a) \leqslant \pi,$$

которые при $k = 1, 2, 3$ тривиальны и выполнены при всех допустимых a. Нетрудно проверить, что справедливы неравенства

$$\frac{dg_k(a)}{da} = k(k-1)\left(\frac{1}{\sqrt{1-(ak)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2(k-1)^2}}\right) > 0, \quad ak \in [0,1).$$

Следовательно, $d_k(a) \leqslant d_{k-1}(a)$ будет выполнено при всех допустимых a, если оно выполнено при максимально возможном $a\,(a = 1/k)$. Откуда вытекает, что изучаемый вопрос сводится к проверке неравенств

$$\frac{1}{k-1}\left(\pi + \arcsin\frac{k-1}{k}\right) \geqslant \frac{3\pi}{2k} \;\text{ или }\; \arcsin\frac{k-1}{k} \geqslant \frac{\pi(k-3)}{2k}.$$

Оказалось, что последние неравенства справедливы при $k = 1, \ldots, 10$.

Итак, пусть $a > 1/11$. Тогда наименьшее h_* равно $h(a) = (\pi + \arcsin(ka))/k$, где $k = [1/a]$, так как при таком выборе a последовательность d_k будет убывающей. При остальных k, т.е. если $k \geqslant 11\,(a \leqslant 1/11)$, возможно иное упрощение при выборе h_*. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$B(z) = \frac{1}{z}(\pi + \arcsin(z)),$$

которая определена при $z \in (0,1]$. Элементарно проверяется, что при $z \in (0, z_*)$ она убывает, а при $z \in (z_*, 1)$ возрастает, а z_* – естественно, ее минимум, т.е. $B'(z_*) = 0$. Соответствующее значение z_* находим как наименьший положительный корень уравнения $B'(z) = 0$. Оказалось, что $z = z_* \approx 0{,}9761$. При этом $d_n(a) = aB(na)$. Поэтому $h_* = \min\{d_m(a), d_{m+1}(a)\}$, где $ma \leqslant z_*$, а $(m+1)a > z_*$.

Возможный вариант, когда $d_m = d_{m+1}$, исключим из рассмотрения, как особый, исключительный случай, который в рамках этой статьи не будет рассматриваться. Он приводит к иной бифуркационной задаче, коразмерность которой равна 2. Далее ограничимся изучением ситуации общего положения $d_m \neq d_{m+1}$.

Рассмотрим теперь ЛДО, зависящий от малого параметра, т.е.

$$A(\varepsilon)y = ay'' - y'(x - h(\varepsilon)),$$

область определения которого состоит из достаточно гладких функций, удовлетворяющих условию $y(x+2\pi) = y(x)$, $M(y) = 0$. Здесь $h(\varepsilon) = h_*(1+\nu\varepsilon)$, $\nu = \pm 1$ или $0, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $h_* = (\pi + \arcsin(ma))/m$. При таком выборе $h = h(\varepsilon)$ изучаемый ЛДО имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_k(\varepsilon) = -ak^2 - ik\exp(-ikh(\varepsilon)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При этом, если $k \neq \pm m$, то

$$Re\lambda_k \leqslant -\gamma_0 < 0,$$

а $\lambda_{\pm m}(\varepsilon) = -am^2 \mp im\exp(-i(\pi+\mu_m)(1+\nu\varepsilon))$, $\mu_m = \arcsin(ma)$ и, следовательно,

$$\lambda_{\pm m}(0) = \pm i\sigma_m, \quad \sigma_m = m\cos(\mu_m) = m\sqrt{1-(ma)^2},$$

т.е. при $(ma)^2 \neq 1$ ЛДО A имеет пару простых чисто мнимых собственных значений, а при $(ma)^2 = 1$ у него есть двукратное нулевое собственное число. Поэтому вариант $(ma)^2 = 1$ требует дополнительного анализа. В следующем разделе ограничимся вариантом общего положения $\sigma_m \neq 0$.

Отметим также, что

$$\lambda'_m(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \tau'_m + i\sigma'_m,$$

где $\tau'_m = \nu m(\pi + \arcsin(ma))\sqrt{1-(ma)^2} \neq 0$, $\sigma'_m = -\nu(\pi + \arcsin(ma))m^2 a \neq 0$. При $\nu = 1$ справедливо неравенство $\tau'_m > 0$, т.е. при превышении h критического значения h_* происходит потеря устойчивости, если $\nu = -1$, то $\tau'_m < 0$ и нулевое решение КЗ (2.2), (2.3) сохраняет устойчивость. Наконец, при $\nu = 0$ реализуется критический случай пары чисто мнимых собственных значений.

4. Локальные бифуркации

В этом разделе рассмотрим нелинейную КЗ (2.2), (2.3) при $h = h(\varepsilon) = h_*(1+\nu\varepsilon)$. При таком выборе h КЗ (2.2), (2.3) может быть записана в следующем виде:

$$v_t = A(\varepsilon)v + F_2(w_x, \varepsilon) + F_3(w_x, \varepsilon), \tag{4.1}$$

$$v(t, x+2\pi) = v(x), \ M(v) = 0. \tag{4.2}$$

Здесь

$$w = v(t, x-h(\varepsilon)), \quad A(\varepsilon)v = av_{xx}(t,x) - v_x(t, x-h(\varepsilon)),$$
$$F_j(w_x, \varepsilon) = F_j(w_x), \quad j = 2, 3.$$

При этом функции $F_j(w_x)$ были введены ранее. Напомним, что величина отклонения h_* была выбрана в разделе 3. В результате для КЗ (4.1), (4.2) реализуется случай, близкий к критическому, спектра устойчивости нулевого решения (спектра ЛДО $A(\varepsilon)$). В рассматриваемом варианте КЗ (4.1), (4.2) имеет двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$, к которому приближаются все решения из достаточно малой окрестности $Q(r_0)$ нулевого решения изучаемого варианта КЗ. При этом радиус шара пространства $\mathbb{H}_2^1$, обозначенный как r_0, достаточно мал, но не зависит от ε (см., например, [21–23]). Как хорошо известно (см., например, [23]), анализ бифуркаций может быть сведен к изучению системы двух дифференциальных уравнений, которую принято называть нормальной формой (НФ) согласно терминологии, предложенной в свое время А. Пуанкаре (см. [23]). В комплексной форме записи в ситуации общего положения такое уравнение может быть записано в следующем виде:

$$z' = (\tau_m' + i\sigma_m')z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \tag{4.3}$$

где $z = z(s)$, $s = \varepsilon t$ – "медленное" время, штрихом обозначена производная по s, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ и априори считаем, что $l_1 \neq 0$, т.е. первая ляпуновская величина отлична от нуля. В уравнении (4.3) отброшены слагаемые, стремящиеся к нулю, если $\varepsilon \to 0$. Уравнение (4.3) представляет собой "главную" часть НФ или "укороченную" НФ. При $l_1 \neq 0$ уравнение (4.3) играет определяющую роль при анализе изучаемого варианта КЗ (2.2), (2.3) и (4.1), (4.2).

Решения КЗ (4.1), (4.2), принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, будем искать в виде суммы

$$v(t,x,z,\overline{z},\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}v_1(t,x,z,\overline{z}) + \varepsilon v_2(t,x,z,\overline{z}) + \varepsilon^{3/2}v_3(t,x,z,\overline{z}) + O(\varepsilon^2). \tag{4.4}$$

При этом, разумеется,

$$\begin{aligned} w(t,x,z,\overline{z},\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_1(t,x,z,\overline{z}) + \varepsilon w_2(t,x,z,\overline{z}) + \\ + \varepsilon^{3/2}w_3(t,x,z,\overline{z}) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

В последнем равенстве

$$w(t,x,z,\overline{z},\varepsilon) = v(t,x-h_*(\varepsilon),z,\overline{z},\varepsilon),$$
$$w_j(t,x,z,\overline{z}) = v_j(t,x-h_*,z,\overline{z}), \quad j = 1,2,3.$$

Наконец,

$$v_1(t,x) = zq + \overline{zq}, \quad q = q(t,x) = \exp(i\sigma_m t)\exp(imx).$$

Функции $v_2(t,x,z,\overline{z}), v_3(t,x,z,\overline{z}) \in \Phi$. Через Φ обозначен класс функций, который определен ниже.

Функция $\varphi = \varphi(t,x,z,\overline{z}) \in \Phi$, если для нее выполнены следующие условия:

1) она гладко зависит от совокупности аргументов при всех t и $x \in \mathbb{R}$ и $|z| < \delta$ (δ – некоторая положительная постоянная);

2) $\varphi(t,x,0,0) = 0$;

3) по переменной t она имеет период $2\pi/\sigma_m$ и 2π по переменной x;

4) справедливы равенства:

a) $M(\varphi) = 0$ при всех рассматриваемых $t, z, \overline{z}$;

b) $M_\pm(\varphi) = \dfrac{\sigma_m}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi/\sigma_m}\varphi q_\mp dt\right)dx = 0, \ q_+ = q, \ q_- = \overline{q}.$

Далее при анализе КЗ (4.1), (4.2) сформулируем вспомогательное утверждение, которое в различных разделах дифференциальных уравнений принято называть условиями разрешимости. Пусть $A_0 = A(0)$.

Замечание 1. Рассмотрим линейную неоднородную КЗ

$$A_0 v = g(t,x),\ v = v(t,x),$$
$$v(t,x+2\pi) = v(t,x),\ M(v) = 0.$$

Здесь $g(t,x)$ – достаточно гладкая функция, которая по переменной t имеет период $2\pi/\sigma_m$, а по x – период 2π. Пусть дополнительно известно, что $M(g(t,x)) = 0$. Тогда последняя линейная неоднородная КЗ имеет периодические по t решения, если

$$M_{\pm}(g(t,x)) = 0.$$

Условия $M_{\pm}(v) = 0$ выделяют одно подходящее решение линейной неоднородной КЗ, рассматриваемой в замечании 1.

Подстановка суммы (4.4), а также связанной с ней суммы (4.5) в нелинейную КЗ (4.1), (4.2) приводит к линейным неоднородным КЗ для нахождения v_2, v_3.

Выделяя слагаемые при ε, получаем неоднородную КЗ

$$v_{2t} - A_0 v_2 = \Phi_2(t,x,z,\overline{z}), \tag{4.6}$$
$$v_2(t,x+2\pi) = v_2(t,x),\ M(v_2) = M_{\pm}(v_2) = 0. \tag{4.7}$$

Если выделить слагаемые, пропорциональные $\varepsilon^{3/2}$, то получим аналогичную КЗ

$$v_{3t} - A_0 v_3 = \Phi_3(t,x,z,\overline{z}), \tag{4.8}$$
$$v_3(t,x+2\pi) = v_3(t,x),\ M(v_3) = M_{\pm}(v_3) = 0. \tag{4.9}$$

Здесь $A_0 v_j = a v_{jxx} - w_{jx}$, $w_j = v_j(t, x - h_*), j = 2,3$,

$$\Phi_2(t,x,z,\overline{z}) = b_2 w_{1x}^2 - b_2 M(w_{1x}^2),$$
$$\Phi_3(t,x,z,\overline{z}) = b_3 w_{1x}^3 - b_3 M(w_{1x}^3) + 2b_2(w_{1x}w_{2x} - M(w_{1x}w_{2x})) +$$
$$+ A_1 u_1 - (z' q + \overline{z}' \overline{q}),$$
$$w_{1x} = im(Qzq - \overline{Q}\overline{zq}),\ Q = \exp(-imh_*).$$

Отметим, что $A_1 = A'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$, а

$$Q = Q_1 + iQ_2,\ Q_1 = -\sqrt{1-(ma)^2},\ Q_2 = ma.$$

Решения КЗ (4.6), (4.7) $v_2(t,x,z,\overline{z}) \in \Phi$ можно и целесообразно искать в виде

$$v_2(t,x,z,\overline{z}) = \eta_m z^2 q^2 + \overline{\eta}_m \overline{z}^2 \overline{q}^2.$$

Если при этом учесть, что в данном случае

$$\Phi_2(t,x,z,\overline{z}) = b_2 m^2 (Q^2 z^2 q^2 - \overline{Q}^2 \overline{z}^2 \overline{q}^2),$$

то достаточно простые вычисления показывают, что

$$\eta_m = -\frac{b_2 m^2 Q^2 \overline{p}_m}{|p_m|^2}, \;\; p_{m_1} = 4mQ_2(1 - Q_1), \;\; p_{m_2} = 2m(Q_1^2 - Q_2^2 - Q_1).$$

Перейдем теперь к КЗ (4.8), (4.9). Она имеет решение $v_3(t,x,z,\overline{z}) \in \Phi$, если выполнены условия разрешимости (см. замечание 1), т.е. в случае КЗ (4.8), (4.9) должны выполняться равенства

$$M_{\pm}(\Phi_3) = 0. \tag{4.10}$$

Использование условий (4.10) позволяет определить коэффициенты НФ (4.3). Оказалось, что справедливы равенства

$$l_1 = l_1^{(2)} + l_1^{(3)}, \quad l_2 = l_2^{(2)} + l_2^{(3)},$$

где, в свою очередь,

$$l_1^{(3)} = -3b_3 m^3 Q_2, \quad l_2^{(3)} = 3b_3 m^3 Q_1,$$

$$l_1^{(2)} = -\frac{4b_2^2 m^4}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2}\Big(p_{m_1} Q_1 (Q_1^2 - 3Q_2^2) + p_{m_2} Q_2 (3Q_1^2 - Q_2^2)\Big),$$

$$l_2^{(2)} = -\frac{4b_2^2 m^4}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2}\Big(p_{m_1} Q_2 (3Q_1^2 - Q_2^2) - p_{m_2} Q_1 (Q_1^2 - 3Q_2^2)\Big),$$

$$\tau_m' = \nu m(\pi + \mu_m)\sqrt{1 - (ma)^2}, \;\; \sigma_m' = -\nu(\pi + \mu_m) m^2 a, \;\; \mu_m = \arcsin(ma).$$

Отметим, что $\tau_m' > 0$, если $\nu = 1$, и $\tau_m' < 0$, если $\nu = -1$. Итак, коэффициенты НФ (4.3) вычислены в явном виде.

Подчеркнем, что в иной форме записи

$$l_1^{(2)} = -\frac{8b_2^2 m^6 a}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2}\Big(\sqrt{1 - (ma)^2}(1 + 4(ma)^2) + 1\Big).$$

Следовательно,

$$l_1 = -3b_3 m^4 a - \frac{8b_2^2 m^6 a}{p_{m_1}^2 + p_{m_2}^2}\Big(\sqrt{1 - (ma)^2}(1 + 4(ma)^2) + 1\Big).$$

Последний вариант формулы для l_1 показывает, что при $b_3 > 0$ заведомо $l_1 < 0$. Нетрудно заметить, что вариант, когда $l_1 < 0$, реализуется "чаще", чем тот, когда справедливо неравенство $l_1 > 0$.

Перейдем теперь к анализу НФ (4.3). Положим

$$z(s) = \rho(s)\exp(i\varphi(s)).$$

В результате перехода к тригонометрической форме записи получим два действительных дифференциальных уравнения

$$\rho' = \tau'_m \rho + l_1 \rho^3, \tag{4.11}$$

$$\varphi' = \sigma'_m + l_2 \rho^2. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.11), кроме тривиального состояния равновесия $\rho = 0$, может иметь также ненулевое состояние равновесия

$$\rho(s) = \xi = \sqrt{-\frac{\tau'_m}{l_1}},$$

которое существует, если $\tau'_m / l_1 < 0$.

Стандартный анализ состояния равновесия $\rho(s) = \xi$ с использованием теоремы А.М. Ляпунова по первому (линейному) приближению показывает, что ненулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, если $l_1 < 0$ ($\tau'_m > 0$ или, иначе, $\nu = 1$) и оно неустойчиво, если $l_1 > 0$ ($\tau'_m < 0$ или, иначе, $\nu = -1$). Нулевое состояние равновесия дифференциального уравнения (4.11) асимптотически устойчиво, если $\tau'_m < 0$, и неустойчиво, если $\tau'_m > 0$.

Теперь нетрудно заметить, что при $\rho(s) = \xi$ уравнение (4.12) имеет решение

$$\varphi(s) = (\sigma'_m + l_2 \xi^2) s + \varphi_0, \quad \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Из этих построений вытекает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Дифференциальное уравнение (4.3) *имеет предельный цикл C_0, порожденный однопараметрическим семейством периодических решений*

$$z(s) = \xi \exp(i(\sigma'_m + l_2 \xi^2) s + i\varphi_0), \tag{4.13}$$

где $\xi = \sqrt{-\tau'_m / l_1}$. Эти периодические решения устойчивы (орбитально асимптотически устойчивы), если $l_1 < 0$ ($\tau'_m > 0$) и они неустойчивы при $l_1 > 0$ ($\tau'_m < 0$).

Доказательство леммы 3 изложено во многих работах. Из результатов работ [11–16] вытекает, что справедлива

Теорема 1. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ КЗ (2.2), (2.3) *при $h = h(\varepsilon) = h_*(1 + \nu\varepsilon)$ имеет предельный цикл $C(\varepsilon)$, соответствующий C_0, который наследует устойчивость C_0. Для решений, формирующих $C(\varepsilon)$, справедлива асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} v(t, x, \varepsilon, \gamma) = \varepsilon^{1/2} \xi \Big(&\exp(imx + i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t + i\gamma) + \\ &+ \exp(-imx - i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t - i\gamma) \Big) + \\ + \varepsilon \xi^2 \Big(&\eta_m \exp(2imx + 2i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t + 2i\gamma) + \\ &+ \overline{\eta}_m \exp(-2imx - 2i(\sigma_m + \varepsilon\beta_m)t - 2i\gamma) \Big) + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned}$$

где $\xi = \sqrt{-\tau'_m/l_1}$, $\beta_m = \sigma'_m - \tau'_m l_2/l_1$, γ *– произвольная действительная постоянная, а постоянная* η_m *была выбрана в процессе реализации алгоритма построения НФ.*

5. Особый вариант бифуркационной задачи

Как уже отмечалось в разделе 3, у ЛДО $A(\varepsilon)$ собственные значения $\lambda_k(\varepsilon)$ определяются равенствами

$$\lambda_k(\varepsilon) = -ak^2 - ik\exp(-ikh(\varepsilon)), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Если рассматривается особый случай, когда $a = 1/m$, то нетрудно проверить, что $Re\lambda_k(\varepsilon) \leqslant -\gamma < 0$, если $k \neq \pm m$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и $0 < \varepsilon_0 << 1$.

При $a = 1/m$ (m – некоторое натуральное число, $m < 11$) можно утверждать, что:

1) $h_* = 3\pi/(2m)$.

2) Если $h(\varepsilon) = h_* + \varepsilon$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, тогда $\lambda_m(\varepsilon) = \tau_m(\varepsilon) + i\sigma_m(\varepsilon)$, где $\tau_m(\varepsilon) = -m(1 - \cos m\varepsilon)$, $\sigma_m(\varepsilon) = -m\sin m\varepsilon$.

3) Аналитическая функция $\tau_m(\varepsilon)$ зависит от аргумента ε четным образом.

4) Аналитическая функция $\sigma_m(\varepsilon)$ зависит от аргумента ε нечетным образом.

5) Справедливы равенства $\lambda_m(0) = \lambda_{-m}(0) = 0$. При $\varepsilon = 0$ ЛДО A_0 имеет двукратное нулевое собственное значение. Ему соответствуют собственные функции $\exp(\pm imx)$.

Следовательно, у КЗ (4.1), (4.2) при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ в окрестности ее нулевого состояния равновесия существует, как и ранее (см. раздел 4), двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$, которое для решений КЗ (4.1), (4.2) с достаточно малыми начальными условиями будет локальным аттрактором. Как и ранее (см. предыдущий раздел), анализ динамики решений КЗ (4.1), (4.2) может быть сведен к изучению комплекснозначного дифференциального уравнения (НФ)

$$z' = (\tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon))z + \psi(z, \overline{z}, \varepsilon), \tag{5.1}$$

где достаточно гладкая функция $\psi(z, \overline{z}, \varepsilon)$ такова, что

$$\psi(0,0,\varepsilon) = \frac{\partial\psi}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}|_{\overline{z}=0} = 0.$$

Еще раз подчеркнем, что определяющую роль в изучении поведения решений КЗ (4.1), (4.2) играет не только уравнение (5.1), но и ее "укороченный" вариант

$$z' = (\tau(\varepsilon) + i\sigma(\varepsilon))z + \psi_0(z, \overline{z}), \tag{5.2}$$

где $\psi_0(z, \overline{z}) = \psi(z, \overline{z}, 0)$ и достаточно гладкая функция $\psi_0(z, \overline{z})$ в нуле имеет порядок малости выше первого.

Для нахождения "главной части" функции $\psi_0(z,\overline{z})$ достаточно рассмотреть КЗ (4.1), (4.2) при $\varepsilon = 0$ и для нее построить НФ. Решения КЗ (4.1), (4.2) в изучаемом в этом разделе варианте при $\varepsilon = 0$ будем искать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
v(t,x,z,\overline{z}) = (qz+\overline{qz}) + p_2(x)z^2 + p_0(x)z\overline{z} + \overline{p}_2(x)\overline{z}^2 + \\
+ r_3(x)z^3 + r_1(x)z^2\overline{z} + \overline{r}_1(x)z\overline{z}^2 + \overline{r}_3(x)\overline{z}^3 + \ldots,
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по совокупности переменных $z,\overline{z}$. Наконец $q(x) = \exp(imx)$, функции $p_2(x), p_0(x), r_1(x), r_3(x)$ имеют по переменной x период 2π и нулевые средние:

$$
M(p_j) = 0, \;\; M_{\pm}(p_j) = 0, \;\; M(r_k) = 0, \;\; M_{\pm}(r_k) = 0,
$$

где $j = 0, 2,\ k = 1, 3,\ q_+ = \exp(imx),\ q_- = \exp(-imx),\ q = q_+,\ \overline{q} = q_-$

$$
M(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi dx, \;\;\; M_{\pm}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi q_{\mp} dx, \;\; \varphi = \varphi(x).
$$

Подставляя сумму (5.3) в КЗ (4.1), (4.2) с $\varepsilon = 0$ и последовательно выделяя члены получившегося равенства, пропорциональные z^2, $z\overline{z}$, $\overline{z}^2$, z^3, $z^2\overline{z}$, $z\overline{z}^2$, $\overline{z}^3$, получаем последовательность линейных неоднородных уравнений, анализ которых и позволяет определить "главную" часть комплекснозначной функции $\psi_0(z,\overline{z})$. При формировании КЗ следует учесть, что

$$
\psi_0(z,\overline{z}) = \psi_2 z^2 + \psi_0 z\overline{z} + \overline{\psi}_2\overline{z}^2 + \psi_3 z^3 + \psi_1 z^2\overline{z} + \overline{\psi}_1 z\overline{z}^2 + \overline{\psi}_3\overline{z}^3 + \ldots,
$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по совокупности аргументов $z,\overline{z}$.

В результате получаем следующие неоднородные КЗ для определения периодических функций с нулевыми средними. Так, для определения $p_2(x), p_0(x)$ получаем две линейные неоднородные КЗ

$$
A_0 p_2(x) = -b_2 m^2 q^2 + \psi_2 q, \tag{5.4}
$$

$$
p_2(x+2\pi) = p_2(x), \;\; M(p_2) = M_{\pm}(p_2) = 0, \tag{5.5}
$$

$$
A_0 p_0(x) = \psi_0, \tag{5.6}
$$

$$
p_0(x+2\pi) = p_0(x), \;\; M(p_0) = M_{\pm}(p_0) = 0. \tag{5.7}
$$

Если искать решения вспомогательных линейных неоднородных КЗ (5.4), (5.5) и (5.6), (5.7) в требуемом классе решений, то с необходимостью $\psi_2 = 0$, $\psi_0 = 0$ и

$$
p_0(x) = 0, \; p_2(x) = \eta_2 Q^2 q^2, \; \overline{p}_2(x) = \overline{\eta}_2\overline{Q}^2\overline{q}^2,
$$

где в данном случае $Q = \exp(-ih_* m)$, т.е. $Q = \exp(-i3\pi/2) = i$, $Q^2 = -1$. Наконец

$$
\eta_2 = \frac{b_2 m}{10}(2+i).
$$

На третьем шаге реализации алгоритма получаем две КЗ для определения $r_1(x), r_3(x)$

$$A_0 r_3(x) = \psi_3 q + b_3 m^3 q^3 - 4b_2\eta_2 i m^2 q^3, \tag{5.8}$$

$$r_3(x+2\pi) = r_3(x),\ M(r_3) = M_\pm(r_3) = 0, \tag{5.9}$$

$$A_0 r_1(x) = \psi_1 q + 3b_3 m^3 q - 4b_2\eta_2 i m^2 q, \tag{5.10}$$

$$r_1(x+2\pi) = r_1(x),\ M(r_1) = M_\pm(r_1) = 0. \tag{5.11}$$

Из условий разрешимости КЗ (5.8), (5.9) и (5.10), (5.11) находим, что $\psi_3 = 0$, $\psi_1 = -3b_3m^3 + \frac{2}{5}b_2^2m^3(-1+2i)$.

В итоге получаем, что главная часть НФ (5.1) приобретает вид

$$z' = \left(-\frac{\varepsilon^2}{2}m^3 - im^2\varepsilon\right)z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \tag{5.12}$$

где $l_1 = -3b_3m^3 - \frac{2}{5}b_2^2m^3$, $l_2 = \frac{4}{5}b_2^2m^3$.

Для ее анализа перепишем данное дифференциальное уравнение в тригонометрической форме и положим

$$z(t) = \rho(t)\exp(i\varphi(t)). \tag{5.13}$$

Тогда вместо комплексного уравнения (5.12) получим два действительных дифференциальных уравнения

$$\rho' = -\frac{\varepsilon^2}{2}m^3\rho + l_1\rho^3, \tag{5.14}$$

$$\varphi' = -\varepsilon m^2 + l_2\rho^2. \tag{5.15}$$

Как и в предыдущем разделе, анализ системы дифференциальных уравнений (5.14),(5.15) можно начать с изучения уравнения (5.14) для амплитуды $\rho(t)$.

Л е м м а 4. *Дифференциальное уравнение* (5.14), *кроме нулевого состояния равновесия* S_0: $\rho = 0$, *может иметь также состояние равновесия* S_*: :$\rho_* = \sqrt{\varepsilon^2 m^3/(2l_1)}$. *Состояние равновесия* ρ_* *дифференциального уравнения* (5.14) *существует, если* $l_1 > 0$. *Это состояние равновесия неустойчиво. Асимптотически устойчивым будет состояние равновесия* $\rho = 0$.

Анализ устойчивости найденных состояний равновесия использует теорему А.М. Ляпунова об устойчивости по первому (линейному) приближению. Отметим, что состоянию равновесия S_* соответствует решение дифференциального уравнения (5.15) вида

$$\varphi_*(t) = \left(-\varepsilon m^2 + \frac{l_2\varepsilon^2m^3}{2l_1}\right)t + \varphi_0,$$

где φ_0 – произвольная действительная постоянная. Использование равенства (5.13) позволяет найти периодическое по t решение НФ (5.12)

$$z(t) = z(t,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2m^3}{2l_1}}\exp(i\varphi_*(t)).$$

Из результатов работ [11–16] вытекает справедливость утверждения.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $am = 1$ $(h_* = 3\pi/(2m))$, *где* $m = 1, \ldots, 10$. *Можно указать такую положительную постоянную* ε_0, *что при всех* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $h = h_* + \varepsilon$, *и* $\varepsilon \neq 0$ *КЗ* (4.1), (4.2) *имеет однопараметрическое семейство неустойчивых* t *– периодических решений*

$$v_*(t,x,\varepsilon,\varphi_0) = \rho_*\big(q_m(t,x,\varphi_0) + \overline{q}_m(t,x,\varphi_0)\big) + \\ + \rho_*^2\big(\eta_2 q_m^2(t,x,\varphi_0) + \overline{\eta}_2\overline{q}_m^2(t,x,\varphi_0)\big) + o(\varepsilon^2), \tag{5.16}$$

где $q_m(t,x,\varphi_0) = \exp(i\omega(\varepsilon)t + imx + i\varphi_0)$, $\omega(\varepsilon) = -\varepsilon m^2 + l_2 m^3 \varepsilon^2/(2l_1) + o(\varepsilon^2)$. *Постоянные* l_1, l_2 *были указаны ранее. Семейство решений* (5.16) *существует, если первая ляпуновская величина* $l_1 > 0$ *(см. лемму 4).*

При $l_1 < 0$ *у КЗ* (4.1), (4.2) *нулевое решение асимптотически устойчиво.*

З а м е ч а н и е 2. Ситуация, когда в рассматриваемом особом варианте для КЗ (4.1), (4.2) существуют периодические решения, достаточно редко реализуется, а если такое случается, то они неустойчивы. Ясно, что вариант, когда $l_1 > 0$, встречается достаточно редко. Преобладают варианты $l_1 < 0$. Тогда у дифференциального уравнения (5.14), а значит у КЗ (4.1), (4.2), малые периодические решения по переменной t отсутствуют.

6. Основной результат

Возвратимся к анализу основной нелинейной КЗ (1.3), (1.4), рассматриваемой при $h = h(\varepsilon) = h_*(1 + \nu\varepsilon)$, если $am \neq 1$.

Пусть $v(t,x,\varepsilon,\gamma)$ – периодическое решение, полученное для КЗ (2.2), (2.3). Тогда $u_0(t)$ определяется из уравнения (2.1) после подстановки $v(t,x,\varepsilon,\gamma)$ в правую часть этого уравнения с последующим интегрированием. В данном случае получаем, что

$$u_0(t,\varepsilon,\gamma_0) = \Big(2b_2\xi^2 m^2\varepsilon + o(\varepsilon)\Big)t + \gamma_0,$$

где γ_0 – произвольная действительная постоянная, $\xi^2 = -(\tau'_m/l_1) > 0$.

Т е о р е м а 3. *Существует такая положительная постоянная* ε_0, *такое, что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *и* $h = h_*(1 + \nu\varepsilon)$ *нелинейная КЗ* (1.3), (1.4) *имеет двупараметрическое семейство* $V_2(\varepsilon, \gamma_0, \gamma)$ *решений*

$$u(t,x,\varepsilon) = u_0(t,\varepsilon,\gamma_0) + v(t,x,\varepsilon,\gamma),$$

если КЗ (2.2), (2.3) *имеет предельный цикл* $C(\varepsilon)$. *Это семейство формирует интегральное многообразие нелинейной КЗ* (1.3), (1.4).

Семейство $V_2(\varepsilon, \gamma_0, \gamma)$ *– локальный аттрактор, если локальным аттрактором является предельный цикл* $C(\varepsilon)$ *вспомогательной КЗ* (2.2), (2.3). *Это семейство неустойчиво (седловое), если аналогичным свойством характеризуется* $C(\varepsilon)$.

Пусть теперь оказалось, что реализуется особый случай, когда $am = 1$, $h_* = 3\pi/(2m)$. Тогда формулировка основного результата, естественно, нуждается в коррекции и из теоремы 2 вытекает справедливость уже следующего утверждения.

Теорема 4. Существует такая положительная постоянная ε_0, что при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$, $h = h_* + \varepsilon$ КЗ (1.3), (1.4) имеет двупараметрическое семейство решений $V_*(\varepsilon, \gamma_0, \varphi_0)$, сформированное решениями вида

$$u(t, x, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon, \gamma_0) + v_*(t, x, \varepsilon, \varphi_0),$$

где $v_*(t, x, \varepsilon, \varphi_0)$ – решение (5.16) вспомогательной КЗ (4.1), (4.2) (см. теорему 2), а

$$u_0(t, \varepsilon, \gamma_0) = \left(b_2 \frac{\varepsilon^2 m^2}{l_{1,0}} + o(\varepsilon^2)\right) t + \gamma_0,$$

γ_0 – произвольная постоянная, $l_{1,0} = -3b_3 - 2b_2^2/5$. Напомним, что в рассматриваемом варианте решение существует, если $l_{1,0} > 0$.

Подчеркнем, что семейство решений $V_*(\varepsilon, \gamma_0, \varphi_0)$ всегда неустойчиво.

7. Заключение

В работе исследованы локальные бифуркации в периодической КЗ для одной из версий нелокального уравнения эрозии. Оно представляет собой уравнение с частными производными с отклоняющимся пространственным аргументом. Показано, что учет отклоняющегося аргумента — это существенный фактор при анализе бифуркаций. При величине отклонения $h = 0$ формирование неоднородного рельефа не происходит. Увеличение же h до некоторых пороговых значений приводит к формированию нанорельефа.

В большинстве вариантов такой рельеф формируется как результат бифуркаций Андронова–Хопфа при соответствующем выборе $h \approx h_*$ и a. В особом варианте, когда произведение $ak \approx 1$, реализуется иной вариант бифуркаций и возникают неустойчивые паттерны.

Анализ актуальной физической задачи о формировании нанорельефа оказался достаточно эффективным, так как опирался на современные методы теории динамических систем: методы инвариантных многообразий и теорию нормальных форм Пуанкаре, развитую до возможности использования для задач с бесконечномерным фазовым пространством. Уместно подчеркнуть, что использование и развитие метода интегральных (инвариантных) многообразий достаточно продуктивно при анализе многих задач математической физики, так как позволяет во многих случаях свести бесконечномерную задачу к анализу конечномерной динамической системы. Иной вариант анализа бесконечномерных динамических систем продемонстрирован в [24, 25].

Подчеркнем еще раз, что включение (учет) нелокальных членов в дифференциальное уравнение с частными производными часто существенно изменяет динамику его решения, делая ее существенно более сложной и богатой. Например, бифуркации могут возникать на старших модах, что неоднократно наблюдалось в экспериментах.

Отметим также, что учет нелокальных членов в математических моделях приводит к выявлению новых эффектов не только в задачах наноэлектроники, но и других нелинейных моделях физики (см., например, [26–29]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sigmund P.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // Phys. Rev. 1969. V. 184. No. 2. P. 383–416.
2. *Yamamura Y., Shindo S.* An empirical formula for angular dependence of sputtering yields // Radiat. Effect. 1984. V. 80. No. 1–2. P. 57–72.
3. *Elst K., Vandervorst W.* Influence of the composition of the altered layer on the ripple formation // J. Vacuum Sci. Tech. A. 1994. V. 12. No. 2. P. 3205–3216.
4. *Sigmund P.* A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // J. Mater. Sci. 1973. V. 8. No. 2. P. 1545–1553.
5. *Смирнов В.К., Кибалов Д.С., Лепшин П.А., Бачурин В.И.* Влияние топографических неровностей на процесс образования волнообразного микрорельефа на поверхности кремния // Изв. РАН. Сер. физическая. 2000. Т. 64. № 4. С. 626–630.
6. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В.* Самоорганизация наноструктур в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии поверхности кремния ионной бомбардировкой / Кремниевые наноструктуры. Физика. Технология. Моделирование: монограф. под ред. Рудакова В.И. Ярославль: Индиго, 2014. С. 8–57.
7. *Bradley R.M., Harper M.E.* Theory of ripple topography induced by ion bombardment // J. Vacuum Sci. Tech. A. 1988. V. 6. No. 4. P. 2390–2395.
8. *Рудый А.С., Бачурин В.И.* Пространственно нелокальная модель эрозии поверхности ионной бомбардировкой // Изв. РАН. Сер. физическая. 2008. Т. 72. № 5. С. 624–629.
9. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В.* Высокомодовые волновые рельефы в рамках пространственно нелокальной модели эрозии // Микроэлектроника. 2013. Т. 43. № 6. С. 282–288.
10. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 3. С. 33–50.
11. *Рудый А.С., Куликов А.Н., Куликов Д.А., Метлицкая А.В.* Высокомодовые волновые рельефы в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии // Микроэлектроника. 2014. Т. 43. № 4. С. 282–288.
12. *Куликов Д.А., Рудый А.С.* Формирование волнового нанорельефа при распылении поверхности ионной бомбардировкой. Нелокальная модель эрозии // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19. № 5. С. 40–49.
13. *Kulikov D.A.* Spatially nonhomogeneous dissipative structures of a periodic boundary-value problem for a nonlocal erosion equation // Nonlinear Oscillations. 2014. V. 17. No. 1. P. 72–86.
14. *Ковалева А.М. Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Устойчивость и бифуркации волнообразных решений для одного функционально-дифференциального уравнения // Известия института математики и информатики УдГУ. 2015. № 46. С. 60–68.
15. *Kovaleva A.M., Kulikov D.A.* Bifurcations of spatially inhomogeneous solutions in two versions of the nonlocal erosion equation // J. Math. Sci. 2020. V. 248. No. 4. P. 438–447.
16. *Куликов Д.А.* Неоднородные диссипативные структуры в задаче о формировании нанорельефа // Динамические системы. 2012. Т. 2 (30). № 3–4. С. 259–272.
17. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды ММО. 1961. Vol. 10. С. 297–350.

18. *Якубов С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Труды ММО. 1970. V. 23. С. 37–60.

19. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1950.

20. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1977.

21. *Marsden J.E., McCracken M.* The Hopf bifurcation and its applications. New York: Springer-Verlag, 1976.

22. *Куликов А.Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве // Итоги науки и техники. Темат. обзоры. 2020. Т. 186. С. 57–66.

23. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

24. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // ДАН. 2017. Т. 472. № 6. С. 627–630.

25. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. Cambridge: Cambridge Univers. Press, 2007.

26. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* О возможности реализации сценария Ландау–Хопфа в задаче о колебаниях трубы под воздействием потока жидкости // Теорет. и мат. физика. 2020. Т. 203. № 1. С. 78–90.

27. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg-Landau equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. No. 3. P. 11985–11997.

28. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Инвариантные многообразия, глобальный аттрактор, интегро-дифференциального уравнения Гинзбурга–Ландау // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 11. С. 1500–1514.

29. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау // АиТ. 2021. № 2. С. 94–110.

    Kulikov A.N., Kulikov D.A. Invariant Manifolds of a Weakly Dissipative Version of the Nonlocal Ginzburg-Landau Equation // Autom. Remote Control. V. 82. No. 2. P. 264–277.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 15.05.2023

После доработки 10.07.2023

Принята к публикации 20.07.2023