Автоматика и телемеханика, № 11, 2023

Нелинейные системы

**© 2023 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)**

ПЛОТНОСТНЫЕ СИСТЕМЫ. АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ[1]

Рассматривается класс систем, названных плотностными, для которых производная от квадратичной функции зависит от некоторой функции, названной функцией плотности. С помощью функции плотности задаются свойства пространства, которые оказывают влияние на поведение исследуемых систем. Показана роль плотностных систем в синтезе законов управления. Рассмотрено построение систем управления для объектов с известными и неизвестными параметрами. Все полученные результаты сопровождаются моделированием, иллюстрирующим теоретические выводы.

Ключевые слова: динамическая система, квадратичная функция, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231023110041, **EDN:** OOVXMH

1. Введение

В работе рассмотрен класс динамических систем в нормальной форме, правая часть которых зависит от некоторой функции, задающей свойства пространства и влияющей на поведение системы. Данную функцию будем называть функцией плотности. Все соответствующие определения будут рассмотрены в основной части статьи.

Частный класс таких систем рассматривался в [1–8]. В [1] впервые для изучения (не)устойчивости системы $\dot{x} = f(x)$ на плоскости рассматривалась новая система $\dot{x} = \rho(x)f(x)$ со вспомогательной функцией $\rho(x) > 0$ для всех x. Затем вопрос (не)устойчивости таких систем изучался с использованием свойств дивергенции и потока вектора фазовой скорости в [2–8]. В [4] функция $\rho(x)$ названа функцией плотности (от англ. «density function»), а в [5–8] показана связь полученных результатов с уравнением непрерывности [9], которое встречается в электромагнетизме, теории волн, гидродинамике, механике деформируемого твердого тела и квантовой механике.

В [10–14] предложен ряд методов управления, гарантирующих нахождения регулируемых сигналов в заданных разработчиком множествах. Для выполнения данной цели с помощью соответствующего закона управления вводилась вспомогательная функция, от вида которой выполнялись соответствующие свойства в замкнутой системе. Так, в [10, 12] предложен закон

[1] Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № 121112500298-6 (ЕГИСУ НИОКТР).

управления с эффектом воронки (от англ. «funnel control»), а в [11] – закон управления с заданным качеством регулирования (от анг. «prescribed performance control»), которые гарантируют нахождение переходных процессов в сходящейся к окрестности нуля трубке. В [13, 14] предложен метод, обобщающий результаты [10–12] и позволяющий гарантировать нахождение выходных переменных в заданной разработчиком трубке, которая может быть несимметрична относительно положения равновесия и не сходится к заданной константе.

В данной работе будет рассмотрен класс систем, которые явно или неявно зависят от функции плотности. С помощью данной функции будет задаваться плотность пространства в смысле выделения областей (не)устойчивости, запретных областей (где отсутствуют решения системы) и от значения функции плотности будет зависеть поведение исследуемой системы. В отличие:

1) от [1–8] будут рассмотрены системы, где функция плотности не обязательно умножается на всю ее правую часть;
2) от [10–14] функция плотности может присутствовать неявно в правой части системы;
3) от [10–14] функция плотности может гарантировать нахождение решений системы в неограниченном множестве с запретными областями и границы данных множеств могут быть заданы непрерывными (при некоторых предположениях и разрывными) функциями по всем аргументам.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 даны мотивирующие примеры, определения функции плотности и плотностной системы. Показаны некоторые свойства данных систем. В разделе 3 иллюстрируется применение полученных результатов к синтезу законов управления для объектов с известными и неизвестными параметрами. Здесь же приведены результаты моделирования полученных схем управления с подтверждением теоретических выводов.

В работе используются следующие *обозначения*: $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности n с нормой $|\cdot|$; $\mathbb{R}_+$ $(\mathbb{R}_-)$ – множество положительных (отрицательных) вещественных чисел; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; λ – комплексная переменная.

2. Мотивирующие примеры. Определения

Перед введением основных определений рассмотрим два примера.

Пример 1. Хорошо известно, что решения системы

$$\dot{x} = -x \tag{1}$$

асимптотически сходятся к нулю, где $x \in \mathbb{R}$. Умножим правую часть данной системы на непрерывную по t и локально липшицевую по x функцию $\rho(x,t) :$ $: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ и перепишем (1) в виде

$$\dot{x} = -\rho(x,t)x. \tag{2}$$

Очевидно, что от свойств $\rho(x,t)$ зависит поведение системы (2). С помощью функции $\rho(x,t)$ можно задавать некоторые свойства и ограничения в пространстве (x,t). Таким образом можно влиять на качество переходных процессов исходной системы (1) и качественно менять их. В связи с этим $\rho(x,t)$ назовем *функцией плотности*. Рассмотрим несколько примеров задания данной функции и соответствующее поведение новой системы (2).

1. Функция плотности $\rho(x,t)=\alpha>0$ позволяет сохранить единственное положение равновесия $x=0$, принимает одно и то же положительное значение для любых x и t и тем самым качественно не влияет на экспоненциальную устойчивость траекторий исходной системы (1) (см. рис. 1 слева) за исключением скорости сходимости решения (2) к положению равновесия в зависимости от значения α. Действительно, выбрав функцию Ляпунова в виде $V=0{,}5x^2$, получим $\dot V=-\alpha x^2<0$ в области $D_S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. Рассмотрим функцию плотности $\rho(x,t)=\frac{\alpha}{w(t)-|x(t)|}$ с непрерывной функцией $w(t)>0$. Функция $\rho(x,t)$ принимает положительные значения в области $D_S=\{x\in\mathbb{R}:-w<x<w\}$, а при $|x-w|\to 0$ в D_S имеем $\rho(x,t)\to+\infty$. Данные свойства гарантирует равномерную асимптотическую устойчивость точки равновесия $x=0$ с начальными условиями $x(0)\in(-w(0);w(0))$. При этом траектории системы никогда не покидают данную область (см. рис. 1 справа). Выбрав квадратичную функцию $V=0{,}5x^2$, получим $\dot V=-\frac{\alpha}{w-|x|}x^2<0$ в области $x\in D_S\setminus\{0\}$, что подтверждает сделанные выводы.

3. Рассмотрим функцию плотности $\rho(x,t)=\alpha[x(t)-w(t)]\mathrm{arctg}\,(x/\epsilon)$ с непрерывной функцией $w(t)$ и достаточно большим положительным числом ϵ. Функция $\rho(x,t)$ принимает положительные значения в области $D_S=\{x\in\mathbb{R}:$ $:x\in(-\infty;0)\cup(w;+\infty)$ при $w>0$ и $x\in(-\infty;w)\cup(0;+\infty)$ при $w<0\}$ и отрицательные в области $D_U=\{x\in\mathbb{R}:x\in(0;w)$ при $w>0$ и $x\in(w;0)$ при $w<0\}$, что гарантирует слежение $x(t)$ за $w(t)$ (см. рис. 2 слева). Выбрав квадратичную функцию $V=0{,}5x^2$, получим $\dot V=\alpha[x-w]\mathrm{arctg}\,(x/\epsilon)\,x^2<0$ при $x\in D_S$ и $\dot V>0$ при $x\in D_U$.

4. Рассмотрим функцию плотности $\rho(x,t)=-\alpha\ln\frac{\overline{w}(t)-x(t)}{x(t)-\underline{w}(t)}$ с непрерывными функциями $\overline{w}(t)>\underline{w}(t)>0$. Обозначим: $w=0{,}5[\overline{w}+\underline{w}]$, где $\rho(x,t)=0$ при $x=w$ и любых t. Функция $\rho(x,t)$ принимает положительные значения в области $D_S=\{x\in\mathbb{R}:w<x<\overline{w}\}$ и отрицательные в области $D_U=\{x\in\mathbb{R}:$ $:\underline{w}<x<w\}$, что гарантирует слежение $x(t)$ за траекторией $w(t)$. В заштрихованной области система (2) не имеет решений (см. рис. 2 справа). При этом траектории системы никогда не покидают область $D_S\cup D_U$, так как $|\rho(x,t)|\to+\infty$ при приближении x к границам $\underline{w}$ и $\overline{w}$. Выбрав квадратичную функцию $V=0{,}5x^2$, получим $\dot V=\alpha\ln\frac{\overline{w}-x}{x-\underline{w}}x^2<0$ при $x\in D_S$ и $\dot V>0$ при $x\in D_U$, что подтверждает слежение $x(t)$ за траекторией $w(t)$.

5. Теперь рассмотрим $\rho(x,t)=\alpha\ln(x(t)-g(t))$ с непрерывной функцией $g(t)>0$. Обозначим: $w=1+g$, где $\rho(x,t)=0$ при $x=w$ и любых t. Функция $\rho(x,t)$ принимает положительные значения в области $D_S=\{x\in\mathbb{R}_+:$

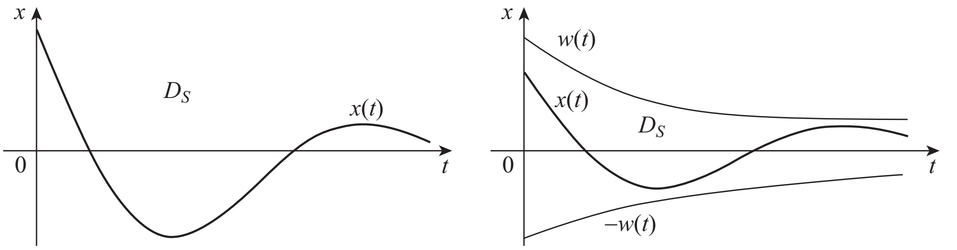

Рис. 1. Переходные процессы в системе (2) с функцией плотности $\rho(x,t) = \alpha$ (слева) и $\rho(x,t) = \frac{\alpha}{w(t)-|x(t)|}$ (справа).

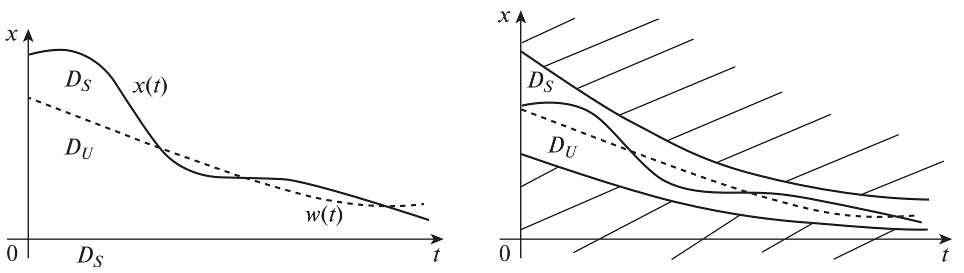

Рис. 2. Переходные процессы в системе (2) с функцией плотности $\rho(x,t) =$ $= \alpha[x(t) - w(t)]\mathrm{arctg}(x/\epsilon)$ (слева) и $\rho(x,t) = \alpha \ln \frac{\overline{w}(t)-x(t)}{x(t)-\underline{w}(t)}$ (справа).

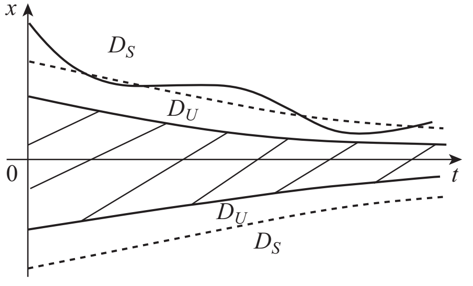

Рис. 3. Переходной процесс в системе (2) с функцией плотности $\rho(x,t) =$ $= \alpha \ln(x(t) - g(t))$.

$: w < x < +\infty\}$ и отрицательные значения в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}_+ : g < x < w\}$, что гарантирует слежение $x(t)$ за траекторией $w(t)$ (см. рис. 3). При этом траектории системы никогда не входят в заштрихованную область, так как при приближении к границе $g(t)$ имеем $\rho(x,t) \to -\infty$, что обеспечивает движение $x(t)$ вдоль поверхности (см. рис. 3). Выбрав квадратичную функцию $V = 0{,}5x^2$, получим $\dot{V} = -\alpha \ln(x-g)x^2 < 0$ при $x \in D_S$ и $\dot{V} > 0$ при $x \in D_U$.

Замечание 1. Здесь рассмотрим вопрос о возможности исследования динамических систем с разрывной правой частью по t и x, в том числе и функции плотности $\rho(x,t)$.

Рассмотрим для начала неавтономную систему общего вида $\dot{x} = f(x,t)$ с $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть функция $f(x,t)$ определена в некоторой открытой области D

переменных (x,t). Будем говорить, что она удовлетворяет условию Каратеодори [15], если $f(x,t)$ непрерывна по x для почти всех t, кусочно-непрерывна по t для всех x (достаточно предполагать измеримость по t), а также для любого компактного множества $G \subset D$ найдется неотрицательная интегрируемая функция $m(t)$ такая, что $|f(x,t)| \leqslant m(t)$ для всех $(x,t) \in G$.

Если функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию Каратеодори, то по теоремам 1.1.1 и 1.1.4 из [15] для любых начальных данных из области D существует локально абсолютно непрерывное решение $x(t)$ системы $\dot{x} = f(x,t)$. Уравнение $\dot{x}(t) = f(x(t),t)$ выполнено для почти всех t. Производная $x(t)$ может не существовать для тех t, в которых функция $f(x,t)$ терпит разрыв по t. Кроме того, либо решение $x(t)$ определено на $[0,+\infty)$, либо при некотором конечном t_0 решение $x(t)$ стремится к границе области D при $t \to t_0$. Если функция $f(x,t)$ локально липшицева по x, то по теореме 1.1.2 из [15] решение будет единственным.

Теперь рассмотрим систему (2) из примера 1. Если функция $\rho(x,t)$ удовлетворяет условию Каратеодори, то у этой системы существует локально абсолютно непрерывное решение, а если функция $\rho(x,t)$ вдобавок локально Липшицева по x, то такое решение будет единственным.

Рассмотрим случай 2 примера 1. В качестве области D определим множество всех тех (x,t), которые не принадлежат замыканиям графиков функции $w(t)$ и $-w(t)$. Если, например, $w(t) = 2$ при $t \in [0,1]$ и $w(t) = 1$ при $t > 1$, то из области D нужно исключить не только график $w(t)$, но и точку $(1,1)$. Функция $\rho(x,t)$ удовлетворяет условию Каратеодори и является локально липшицевой по x. Поэтому у уравнения $\dot{x} = -\rho(x,t)x$ существует единственное локально абсолютно непрерывное решение, которое либо определено на всей оси, либо при некотором конечном t_0 расстояние от $(x(t),t)$ до границы D будет стремиться к нулю при $t \to t_0$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(x) = 0{,}5x^2$. Берем решение $x(t)$ и рассматриваем функцию $V(x(t))$, которая является локально абсолютно непрерывной. По теореме о дифференцируемости сложной функции для почти всех t будет выполнено $\dot{V} = -\rho(x(t),t)x(t)^2 \leqslant 0$. В силу абсолютной непрерывности для любого t будет выполнено $V(t) - V(0) = \int_0^t \dot{V}(s)ds \leqslant 0$ (доказательство того, что абсолютно непрерывная функция «восстанавливается» через интеграл по своей производной см. в [16]). Из неравенства $V(t) \leqslant V(0)$ следует, что положение равновесия устойчиво. Его асимптотическую устойчивость можно доказать с помощью теоремы ЛаСалля для неавтономных систем (теорема 1 в [17]) в случае, если множество $\{x : |x| < w(t)\}$ содержит трубку постоянной ненулевой ширины и функция $w(t)$ не является неограниченно возрастающей. Если же $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то асимптотическая устойчивость следует просто из того факта, что решение остается в области D_S.

Здесь, однако, требуется оговорка, связанная с кусочной непрерывностью $w(t)$. Может так случиться, что решения из области D_S будут выходить из этой области. Например, пусть $w(t) = 2$ при $t \in [0,t_0]$ и $w(t) = 1$ при

$t > t_0$. Если t_0 – достаточно малая величина, а начальное условие $x(0)$ близко к 2 или -2, то при $t \to t_0$ траектория $x(t)$ просто «врежется в стенку», образованную скачком функции $w(t)$. Теорема существования гарантирует, что это решение продолжимо дальше, но анализ устойчивости в данном случае уже неприменим. Такое решение «выпрыгнет» из области D_S и начнет неограниченно возрастать.

Если функция $w(t)$ непрерывна, то нетрудно показать, что решения с начальными условиями из D_S не выходят из области D_S. Однако для кусочно-непрерывной функции $w(t)$ это, вообще говоря, неверно. Если у функции $w(t)$ много скачков, то может оказаться так, что некоторые решения, начинающиеся в D_S, выпрыгивают из этой области, когда «врезаются в стенки», образованные скачками функции $w(t)$. Если же решение остается в области D_S, то оно будет стремиться к положению равновесия.

При рассмотрении дифференциальных уравнений с разрывной правой частью по x (здесь же можно и по t [18, 19]) необходимо понимать решения таких систем в смысле Филиппова [15]. Тогда в случае 2 примера 1 можно рассматривать функцию $\rho(x,t) = \alpha[x(t) - w(t)]\operatorname{sign}(x)$, где $\operatorname{sign}(\cdot)$ – знаковая функция. Устойчивость разрывных неавтономных систем подробно изучалась, например, в [18–21].

Таким образом, в настоящей статье можно рассматривать динамические системы с разрывной правой частью, в том числе и разрывные функции $\rho(x,t)$. Однако такие системы усложняют анализ, что связано с обоснованием выбора начальных условий, частоты и величины скачков функции и т.д. Поскольку статья посвящена исследованию поведения динамических систем в зависимости от свойств функции плотности, то, ради простоты, все теоретические результаты будут сформулированы для динамических систем с непрерывной правой частью по t и локально-липишицевой по x. Все же в качестве иллюстрации некоторые примеры могут содержать разрывные правые части.

Итак, в примере 1 показано, как функция плотности $\rho(x,t)$, заданная в пространстве (x,t), может качественно влиять на переходные процессы исходной системы (1). В следующем примере покажем, что функция плотности не обязательно должна умножаться на всю правую часть, как в примере 1 (см. (1) и (2)), а может явно или неявно присутствовать в правой части системы.

Пример 2. Исследуем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \rho_1(x,t)x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \rho_2(x,t)x_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\rho_1(x,t)$ и $\rho_2(x,t)$ – непрерывные функции по t и x на $\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty)$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$V = 0{,}5(x_1^2 + x_2^2). \tag{4}$$

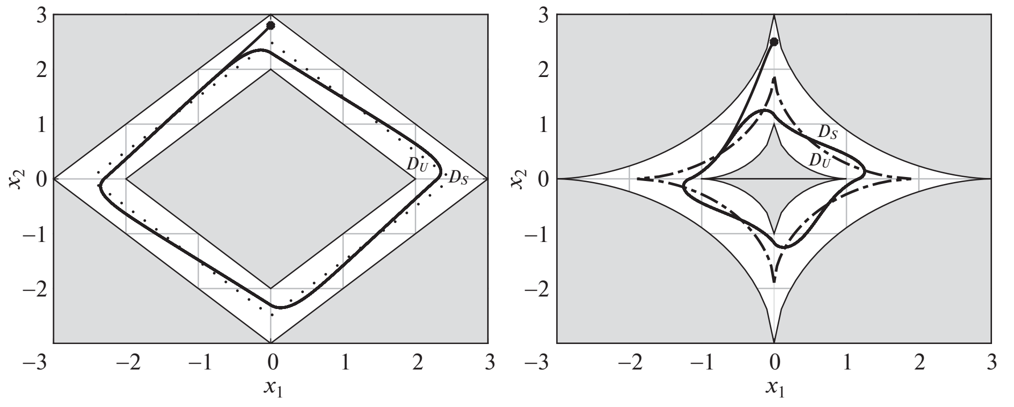

Рис. 4. Фазовая траектория системы (3) с функциями плотности $\rho(x,t) = \ln \frac{3-|x_1|-|x_2|}{|x_1|+|x_2|-2}$ (слева) и $\rho(x,t) = \ln \frac{3^{0,6}-|x_1|^{0,6}-|x_2|^{0,6}}{|x_1|^{0,6}+|x_2|^{0,6}-1}$ (справа).

Возьмем от нее полную производную по времени вдоль решений (3). В результате получим

$$\dot{V} = -\rho_1 x_1^2 - \rho_2 x_2^2. \tag{5}$$

1. Пусть $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \ln \frac{\overline{g}-|x_1|^\beta-|x_2|^\beta}{|x_1|^\beta+|x_2|^\beta-\underline{g}}$, где $\beta > 0$ (при $0 < \beta < 1$ см. замечание 1) и $\overline{g}(t) > \underline{g}(t) > 0$ – непрерывные функции. Имеем $\rho = 0$ при $|x_1|^\beta + |x_2|^\beta = g$, где $g = 0{,}5(\underline{g} + \overline{g})$. Тогда $\dot{V} < 0$, где $\rho(x,t) > 0$, т.е. в области $D_S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g < |x_1|^\beta + |x_2|^\beta < \overline{g}\}$, а также $\dot{V} > 0$, где $\rho(x,t) < 0$, т.е. в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}^2 : \overline{g} < |x_1|^\beta + |x_2|^\beta < g\}$. В данном случае функция плотности $\rho(x,t)$ в явном виде присутствует в системе (3), но не умножается на всю правую часть, как в примере 1. На рис. 4 приведены результаты моделирования для $\beta = 1$, $\overline{g} = 3$, $\underline{g} = 2$ (слева) и $\beta = 0{,}6$, $\overline{g} = 3^{0,6}$, $\underline{g} = 1$ (справа) при $x(0) = col\{0,\ 2,5\}$.

Здесь и далее:

- серые области на рисунках означают, что функция плотности выбрана так, что в данных областях нет решений системы (на границе данной области значение плотности возрастает до бесконечности);
- точечная кривая соответствует нулевому значению функции плотности и, соответственно, данная кривая является границей разделения устойчивой D_S и неустойчивой D_U областей.

2. Пусть $\rho_1 = 1 - x_1^2$ и $\rho_2 = -x_1^2$. Тогда $\dot{V} = -\rho(x,t)x_1^2 < 0$, где $\rho(x,t) = x_1^2 + x_2^2 - 1 > 0$ в области $D_S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1 \text{ и } x_1 \neq 0\}$, а также $\dot{V} > 0$, где $\rho(x,t) < 0$ в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ и } x_1 \neq 0\}$. В данном случае функция плотности $\rho(x,t)$ присутствует неявно в (3) в отличие от предыдущего случая. Однако в отличие от предыдущего случая, значение функции плотности не оказывает влияние на систему (3) всюду (т.е. $\dot{V} = 0$ при $x_1 = 0$ независимо от значения ρ). На рис. 5 приведены результаты моделирования при $x(0) = col\{2, 1\}$.

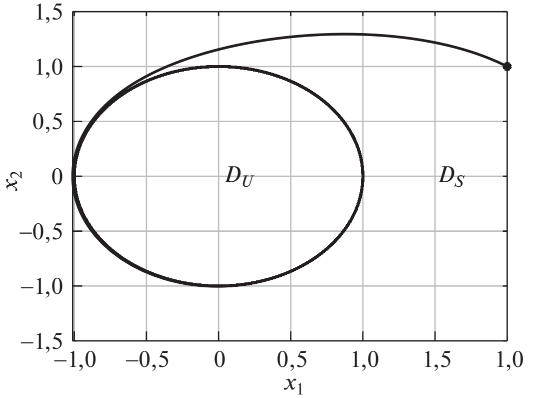

Рис. 5. Фазовая траектория системы (3) с функцией плотности $\rho(x,t) = x_1^2 + x_2^2 - 1$.

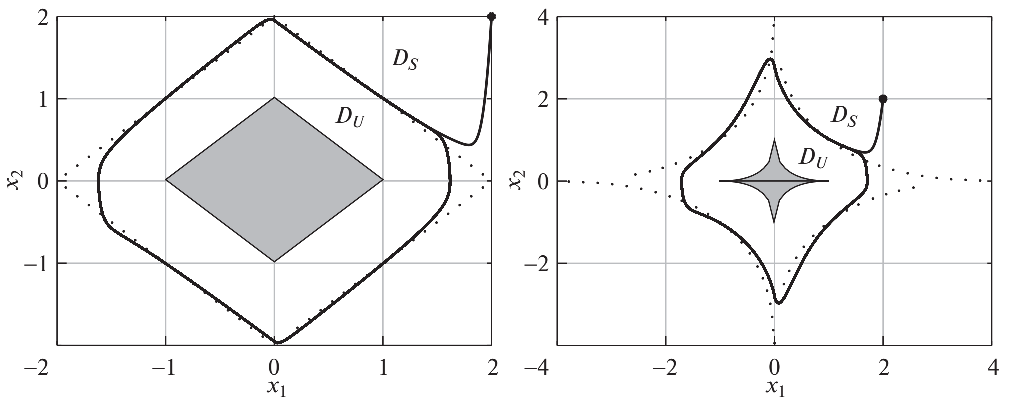

Рис. 6. Фазовая траектория системы (3) с функциями плотности $\rho(x,t) = 20\ln(|x_1| + |x_2| - 1)$ (слева) и $\rho(x,t) = 20\ln(|x_1|^{0,5} + |x_2|^{0,5} - 1)$ (справа).

3. Пусть $\rho_1 = \alpha\ln(|x_1|^\beta + |x_2|^\beta - 1)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (при $0 < \beta < 1$ см. замечание 1) и $\rho_2 = 0$. Тогда $\dot V = -\rho(x,t)x_1^2 < 0$, где $\rho(x,t) = \alpha\ln(|x_1|^\beta + |x_2|^\beta - 1) > 0$ в области $D_S = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^\beta + |x_2|^\beta > 2$ и $x_1 \neq 0\}$, а также $\dot V > 0$, где $\rho(x,t) < 0$ в области $D_U = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x_1|^\beta + |x_2|^\beta < 2$ и $x_1 \neq 0\}$. В данном случае функция плотности $\rho(x,t)$ присутствует всего лишь в одном из уравнений (3) в отличие от случаев 1 и 2. Однако, как и в случае 2, функция плотности не оказывает влияние на систему (3) всюду. На рис. 6 приведены результаты моделирования для $\beta = 1$ (слева) и $\beta = 0{,}5$ (справа) при $\alpha = 20$ и $x(0) = col\{2, 2\}$.

Теперь рассмотрим динамическую систему вида

$$\dot x = f(x,t), \tag{6}$$

где $t \geqslant 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, функция $f : D \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная по t и локально липшицевая по x на $D \times [0, +\infty)$. Относительно возможности рассмотрения систем (6) с разрывной правой частью см. замечание 1.

Определение 1. Система (6) *называется плотностной с функцией плотности $\rho(x,t) : D \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, если существует непрерывно-дифференцируемая функция $V(x,t) : D \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ такая, что*

(а) $w_1(x) \leqslant V(x,t) \leqslant w_2(x)$,

(б) $\dot V \leqslant \rho(x,t)W_1(x) \leqslant 0$ или $\dot V \geqslant \rho(x,t)W_2(x) \geqslant 0$

для любых $t \geqslant 0$ и $x \in D$. Здесь $\rho(x,t)$ – непрерывная по t и локально-липшицевая по x функция, $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – положительно определенные функции, $W_1(x)$ и $W_2(x)$ – ненулевые (за исключением в положениях равновесия) непрерывные функции в D.

Определение 2. Если в определении 1 функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ непрерывные в D, то система (6) *называется слабо плотностной.*

Определение 3. Если в условии (б) определения 1 выполнено $\dot V \leqslant \rho(x,t)W_1(x) <$ или $\dot V \geqslant \rho(x,t)W_2(x) > 0$, то систему (6) *будем называть строго плотностной.*

Определение 4. Если $\dot V \leqslant \rho(x,t)W_1(x) \leqslant 0$ в области $D_S \times [0,+\infty)$, то функцию плотности $\rho(x,t)$ и область D_S будем называть устойчивыми. Если $\dot V \geqslant \rho(x,t)W_2(x) > 0$ в области $D_U \times [0,+\infty)$, то функцию плотности $\rho(x,t)$ и область D_U будем называть неустойчивыми.

Утверждение 1. Пусть в областях D_S и D_U система (6) *строго плотностная. Если для каждого t выполнено условие $V(x_s,t) - V(x_u,t) > 0$, где $x_s \in D_S$ и $x_u \in D_U$, то траектории системы притягиваются к границе разделения областей D_S и D_U. Если для системы* (6) *для каждого t выполнено условие $V(x_s,t) - V(x_u,t) < 0$, то траектории системы отдаляются от границы разделения областей D_S и D_U.*

Доказательство. Пусть выполнено условие $V(x_s,t) - V(x_u,t) > 0$ для каждого $t \geqslant 0$, где $x_s \in D_S$ и $x_u \in D_U$. Так как система строго плотностная, то согласно определению 3 в области D_S выполнено $\dot V \leqslant \rho(x,t)W_1(x) < 0$, а в области D_U выполнено $\dot V \geqslant \rho(x,t)W_2(x) > 0$. Значит, граница разделения областей D_S и D_U является множеством, к которому притягиваются траектории системы.

Пусть выполнено $V(x_s,t) - V(x_u,t) < 0$ для каждого $t \geqslant 0$, где $x_s \in D_S$ и $x_u \in D_U$. Согласно определению 3 в области D_S выполнено $\dot V \leqslant \rho(x,t)W_1(x) < 0$, а в области D_U выполнено $\dot V \geqslant -\rho(x,t)W_2(x) > 0$. Значит, граница разделения областей D_S и D_U является множеством, которое покидают траектории системы.

Замечание 2. Отметим, что в утверждении 1 и в его доказательстве под притяжением траекторий к некоторому множеству могут рассматриваться случаи приближения траекторий к данному множеству с течением времени или нахождения траекторий в некоторой окрестности данного множества. Причем размер данной окрестности может оставаться постоянным или увеличиваться с течением времени. Это зависит от значения плотности пространства. Приведем несколько предельных случаев:

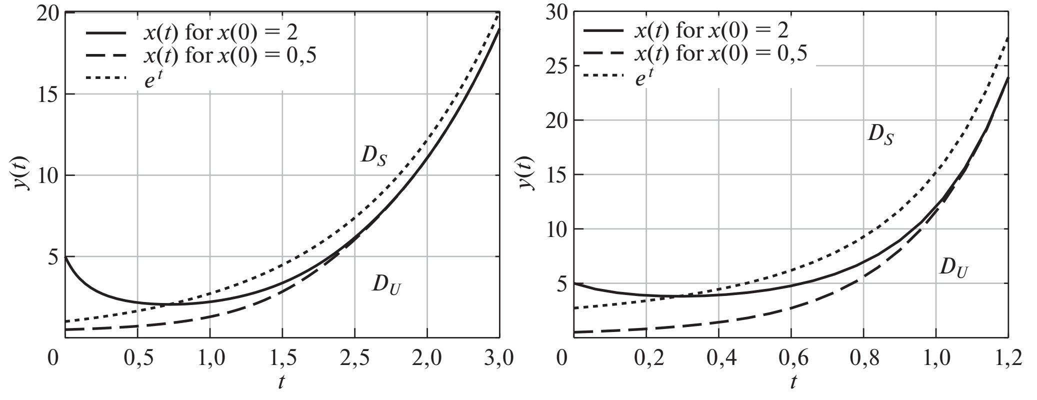

Рис. 7. Слежение $x(t)$ за неограниченными сигналами $w(t) = e^t$ (слева) и $w(t) = e^{e^t}$ (справа).

- если в окрестности границы разделения областей D_S и D_U значение функции плотности убывает до нуля, то траектории системы не будут приближаться к данной границе. Поэтому они могут находиться как в окрестности данной границы, так и отдаляться от нее;
- если в окрестности границы разделения областей D_S и D_U значение функции плотности неограниченно возрастает, то траектории системы будут приближаться к данной границе.

Для иллюстрации сказанного в утверждении 1 и замечании 2 рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Рассмотрим снова систему (2), где только $x \in \mathbb{R}_+$.

Выберем квадратичную функцию $V = 0{,}5x^2$. Тогда $\dot{V} = -\rho(x,t)x^2$. Значит, $\dot{V} < 0$ в области $D_S = \{x, t \in \mathbb{R}_+ : \rho(x,t) > 0\}$ и $\dot{V} > 0$ в области $D_U = \{x, t \in \in \mathbb{R}_+ : \rho(x,t) < 0\}$.

Согласно определению 3 система (2) строго плотностная при $x \in \mathbb{R}_+$. Проанализируем утверждение 1. Зафиксируем произвольное $t = t_1$. Тогда $V(x_s(t_1)) - V(x_u(t_1)) > 0$. Очевидно, что данная разность будет справедлива для любых фиксированных t. Значит, согласно утверждению 1 траектории системы будут притягиваться к границе разделения D_S и D_U.

Пусть функция плотности задана в виде $\rho(x,t) = x - w$, $w(t) = e^t$. В этом случае $\lim\limits_{t\to\infty}(w(t) - x(t)) = \text{const}$ (см. рис. 7 слева). Если $w(t) = e^{e^t}$, то разница между $w(t)$ и $x(t)$ увеличивается с течением времени (см. рис. 7 справа). Это связано с тем, что $w(t)$ – неограниченная функция, а плотность $|\rho(x,t)|$ уменьшается при приближении x к w. В результате $x(t)$ «пытается приблизиться» к $w(t)$, но не может из-за низкой плотности пространства в окрестности $w(t)$ и большой скорости изменения $w(t)$.

Пусть функция плотности задана в виде $\rho = w \operatorname{arctg}\frac{x-w}{\epsilon}$ (или $\rho = = w \operatorname{sign}(x - w)$ с учетом замечания 1), $\epsilon > 0$ – достаточно большое число, $w(t) = e^t$ или $w(t) = e^{e^t}$. В этом случае плотность пространства в окрестно-

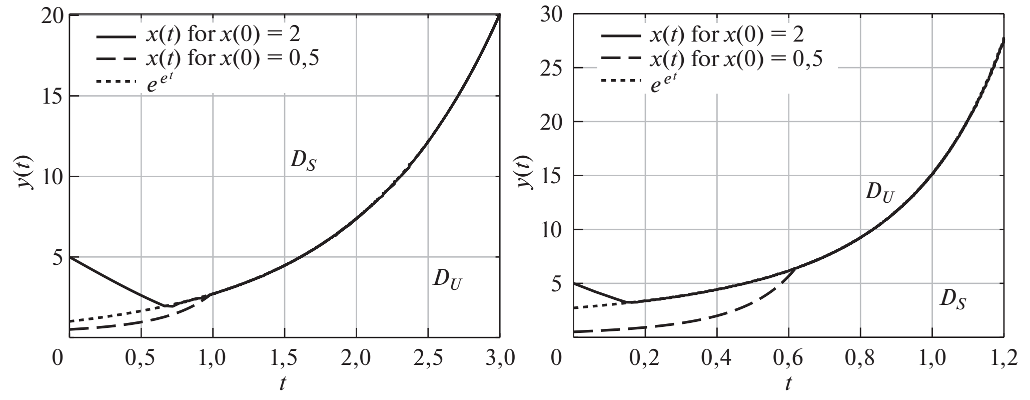

Рис. 8. Слежение $x(t)$ за неограниченными сигналами $w(t) = e^t$ (слева) и $w(t) = e^{e^t}$ (справа).

сти $w(t)$ увеличивается с увеличением $w(t)$, что гарантирует приближение x к w при $t \to \infty$ (см. рис. 8).

Также при изучении плотностных систем будем выделять особые области. Они уже рассматривались ранее в качестве серых областей на рисунках. Теперь определим их.

Определение 5. Если $\dot{V} \leqslant \rho(x,t)W_1(x) < 0$ *в окрестности области* $D_{bh} \times [0,+\infty)$*, в данной области отсутствуют решения* (6) *и при приближении к данной области значение функции плотности возрастает до бесконечности, то область* D_{bh} *будем называть абсолютно устойчивой.*

Определение 6. Если $\dot{V} \geqslant \rho(x,t)W_2(x) > 0$ *в окрестности области* $D_{wh} \times [0,+\infty)$*, в данной области отсутствуют решения* (6) *и при приближении к данной области значение функции плотности возрастает до бесконечности, то область* D_{wh} *будем называть абсолютно неустойчивой.*

Пример 4. Рассмотрим систему (3), где $\rho_1(x,t) = \rho_2(x,t) = \rho(x)$. Выберем квадратичную функцию (4). Тогда $\dot{V} = -\rho(x)(x_1^2 + x_2^2)$.

Если $\rho(x) = e^{(x_1^2+x_2^2-1)^{-0{,}98}}$, то все траектории стремятся к области $D_{bh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ (см. рис. 9 слева). То есть из любых начальных условий траектории системы будут притянуты к D_{bh}, где значение функции плотности возрастает до бесконечности при приближении к границе данной области. Если $\rho(x) = -\ln(x_1^2+x_2^2-1)$, то траектории с начальными условиями из области $x_1^2 + x_2^2 \geqslant \sqrt{2}$ остаются в данной области, но все траектории с начальными условиями из области $1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant \sqrt{2}$ не могут покинуть данной области и будут притянуты к области $D_{bh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ (см. рис. 9 справа), где функция плотности возрастает до бесконечности при приближении к границе D_{bh}.

Если $\rho(x) = -e^{(x_1^2+x_2^2-1)^{-0{,}98}}$, то все траектории стремятся от области $D_{wh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ (см. рис. 10 слева) и никогда не смогут приблизиться к границе данной области, где функция плотности возрастет до

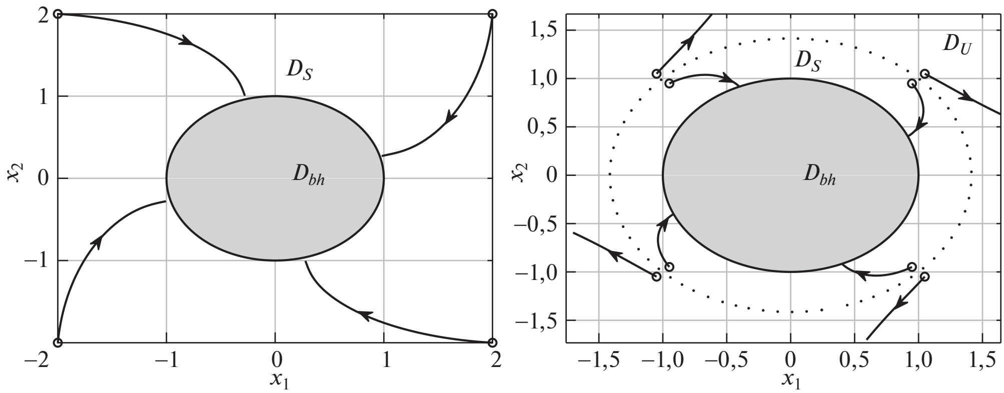

Рис. 9. Фазовый портрет системы (3) с плотностью $\rho(x) = e^{(x_1^2+x_2^2-1)^{-0,98}}$ (слева) и с плотностью $\rho(x) = -\ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ (справа).

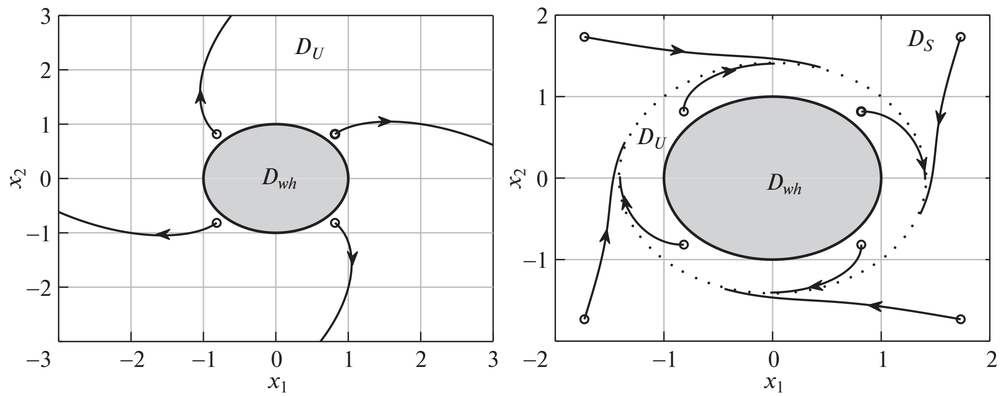

Рис. 10. Фазовый портрет системы (3) с плотностью $\rho(x) = -e^{(x_1^2+x_2^2-1)^{-0,98}}$ (слева) и с плотностью $\rho(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ (справа).

минус бесконечности при приближении к границе D_{wh}. Если $\rho(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, то траектории с начальными условиями из области $x_1^2 + x_2^2 \geqslant \sqrt{2}$ остаются в данной области, но все траектории с начальными условиями из области $1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant \sqrt{2}$ стремятся от области $D_{wh} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ (см. рис. 10 справа).

Замечание 3. Поясним физический смысл рассматриваемых систем. Если функция плотности явно присутствует в правой части уравнения системы, например, в виде $\dot{x} = \rho(x,t)f(x,t)$, то значение плотности пространства напрямую влияет на скорость фазового потока. Так, если $\rho(x,t) = 1$, то имеем исходную систему вида $\dot{x} = f(x,t)$. Если $\rho(x,t) > 0$, то присутствие функции плотности может качественно не влиять на положения равновесия, но может оказывать влияние на фазовый портрет. При $0 < \rho(x,t) < 1$ значение вектора фазовой скорости уменьшается из-за того, что уменьшается плотность пространства. При $\rho(x,t) > 1$, наоборот, значение вектора фазовой скорости увеличивается из-за увеличения плотности пространства. При изменении знака функции плотности качественно меняется фазовый портрет.

Условие (б) определения 1 можно интерпретировать как скорость изменения фазового объема, задаваемого с помощью функции $V(x,t)$, с учетом плотности пространства.

Приведем модели реальных процессов:

- уравнение маятника $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2$, где x_1 – угол отклонения маятника от вертикальной оси, x_2 – угловая скорость маятника, g – ускорение свободного падения, l – длина маятника, k – коэффициент трения [22]. Выбрав функцию Ляпунова в виде полной энергии системы $V = \frac{g}{l}(1-\cos x_1) + 0{,}5x_2^2$, получим $\dot{V} = -\frac{k}{m}x_2^2$. Если положить функцию плотности $\rho(x,t) = k$, то при отсутствии трения ($\rho(x,t) = 0$) имеем незатухающие колебания, а при наличии трения ($\rho(x,t) \neq 0$) – затухающие;
- в [25] виды моделей размножения можно записать как $\dot{x} = \rho(x)x$, где x – величина биологической популяции. При $\rho(x) = k > 0$ имеем модель нормального размножения, при $\rho(x) = kx$ – модель взрыва, при $\rho(x) = 1 - x$ – модель логистической кривой;
- абсолютно устойчивые и абсолютно неустойчивые области из определений 5 и 6 можно встретить в качестве простейших моделей черных и белых дыр соответственно [26], обладающих большой плотностью и гравитацией. Поэтому плотностные системы также можно рассматривать в качестве *гравитационных систем*, где $\rho(x,t)$ – *функция гравитации*. Это означает, что на поведение систем может влиять не плотность пространства, а гравитационное поле, создаваемое плотным телом. В связи с этим принципы построения управления с использованием функции плотности в следующих разделах можно рассматривать как управление с использованием функции гравитации. Независимо от названия функции $\rho(x,t)$ и соответствующих систем все математические описания и выводы сохраняются.

Замечание 4. Во введении отмечалось, что предложенные в разделе 2 понятия функции плотности, плотностных систем и их свойства обобщают результаты [1–8, 10–14]. Разберем это более подробно.

- В [1–8] для исследования устойчивости системы $\dot{x} = f(x)$ рассматривается новая система $\dot{x} = \rho(x)f(x)$, которая затем исследуется либо с помощью дивергентных методов, либо с помощью метода функций Ляпунова. В настоящем разделе для анализа систем $\dot{x} = f(x)$ используются зависимости $\dot{V} \leqslant \rho(x,t)W_1(x)$ или $\dot{V} \geqslant \rho(x,t)W_1(x)$ (см. определение 1 и пример 2), что не требует умножения функции плотности на всю правую часть исследуемой системы.
- В [10–14] изучается устойчивость систем вида $\dot{x} = f(x, \rho(x,t))$, где функция плотности в явном виде присутствует в правой части. Предложенные в настоящей статье результаты допускают неявное присутствие функции плотности в правой части системы (см. случай 2 в примере 2).

- В [10–14] специальным выбором функции плотности можно гарантировать нахождение решений системы только в ограниченном множестве без запретных областей. При этом границы данных множеств задаются непрерывно дифференцируемыми функциями по t и x. В настоящей статье допускается рассмотрение неограниченных множеств (см. случай 5 в примере 1 и случай 3 в примере 2) с запретными областями (см. случаи 4 и 5 в примере 1, случаи 1 и 3 в примере 2). Причем границы данных множеств могут быть заданы непрерывными функциями по t и локально-липишицевыми по x. Если рассматривать решения исследуемых систем в смысле Филиппова, то допускается исследование систем с разрывной правой частью, см. замечание 1.

Таким образом, предложенные новые понятия функции плотности и плотностной системы позволяют по-новому взглянуть на некоторый класс динамических систем, который шире, чем в [1–8, 10–14]. Также эволюцию динамических систем теперь можно рассматривать и влиять на нее с учетом плотности пространства.

Полученные в данном разделе результаты могут быть использованы не только для анализа динамических систем, но и для синтеза законов управления. Этому будет посвящен следующий раздел.

3. Плотностное управление

Рассмотрим несколько примеров синтеза законов управления с целью получения замкнутых систем, которые описываются плотностными системами.

3.1. Объекты с известными параметрами

Рассмотрим объект управления

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t), \tag{7}$$

где $y \in \mathbb{R}$ – выходной сигнал, $u \in \mathbb{R}$ – сигнал управления, $Q(p)$ и $R(p)$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными известными коэффициентами, $R(\lambda)$ – гурвицевый полином.

Если относительная степень объекта (7) равна 1 (т.е. $\deg Q(p) - \deg R(p) = 1$), то закон управления

$$u(t) = -\frac{Q(p)}{pR(p)}\rho(y,t)y(t) \tag{8}$$

приводит систему (7) к виду

$$\dot{y}(t) = -\rho(y,t)y(t), \tag{9}$$

которая имеет структуру плотностной системы. В частности, примеры задания функции плотности $\rho(y,t)$ были рассмотрены в примере 1.

Если относительная степень объекта (7) больше 1 (т.е. $\deg Q(p) - \deg R(p) = \gamma > 1$), то перепишем закон управления (8) в виде

$$u(t) = -\frac{Q(p)}{pR(p)(\mu p + 1)^{\gamma - 1}} \rho(y, t) y(t) \tag{10}$$

где $\mu > 0$ – достаточно малое число. В результате получим замкнутую систему вида

$$\dot{y}(t) = -\frac{1}{(\mu p + 1)^{\gamma - 1}} \rho(y, t) y(t). \tag{11}$$

При $\mu = 0$ система (11) имеет структуру плотностной системы (9). Если функция плотности $\rho(y, t)$ выбрана так, что решения плотностной системы (9) асимптотически устойчивы, то согласно [22, 24] существует достаточно малое $\overline{\mu} > 0$ такое, что при $0 < \mu < \overline{\mu}$ решения системы (11) достаточно близки к решению системы (9).

3.2. Объекты с неизвестными параметрами

Рассмотрим объект управления (7) с неизвестными параметрами операторов $Q(p)$ и $R(p)$, но известным значением k. Пусть относительная степень объекта равна 1. Все полученные результаты могут быть распространены на объекты с относительной степенью больше 1, например, с использованием схем [23]. В настоящей статье рассмотрим только объекты с относительной степенью 1, дабы избежать громоздких выводов по преодолению проблемы высокой относительной степени.

Перепишем операторы $Q(p)$ и $R(p)$ как $Q(p) = Q_m(p) + \Delta Q(p)$ и $R(p) = R_m(p) + \Delta R(p)$, где $Q_m(\lambda)$ и $R_m(\lambda)$ – произвольные гурвицевы многочлены порядков n и $n-1$ соответственно, порядки $\Delta Q(p)$ и $\Delta R(p)$ соответственно равны $n-1$ и $n-2$. Выбрав $Q_m(\lambda)/R_m(\lambda) = \lambda + a$, $a > 0$ – известное число, и выделив целую часть в $\frac{\Delta Q(\lambda)}{Q_m(\lambda)} = k_{0y} + \frac{\Delta \tilde{Q}(\lambda)}{R_m(\lambda)}$, перепишем (7) в виде

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + k\left(u(t) + \frac{\Delta R(p)}{R_m(p)} u - \frac{\Delta \tilde{Q}(p)}{R_m(p)} y - k_{0y} y\right). \tag{12}$$

Введем $c_0 = col\{c_{0y}, c_{0u}, k_{0y}\}$ – вектор неизвестных параметров, где $\Delta \tilde{Q}(p) = c_{0y}^{\mathrm{T}}[1\ p\ \ldots\ p^{n-2}]$ и $\Delta R(p) = c_{0u}^{\mathrm{T}}[1\ p\ \ldots\ p^{n-2}]$. Также рассмотрим вектор регрессии $w = col\{V_y, V_u, y\}$, составленный с помощью следующих фильтров:

$$\begin{aligned} \dot{V}_y &= FV_y + by, \\ \dot{V}_u &= FV_u + bu. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь F – матрица в форме Фробениуса с характеристическим многочленом $R_m(\lambda)$, $b = col\{0, \ldots, 0, 1\}$.

Тогда с учетом введенных обозначений уравнение (12) можно переписать в виде

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + k[u(t) - c_0^{\mathrm{T}} w(t)]. \tag{14}$$

Зададим закон управления

$$u(t) = c^{\mathrm{T}}(t)w(t) + \frac{a}{k}y(t) + \rho(y,t). \tag{15}$$

Подставив (15) в (14), получим уравнение замкнутой системы

$$\dot{y}(t) = \rho(y,t) + k(c(t) - c_0)^{\mathrm{T}} w(t). \tag{16}$$

Теорема 1. Закон управления (15) *вместе с алгоритмом адаптации*

$$\dot{c} = -\alpha y w \tag{17}$$

приводит объект (7) *к системе плотностного вида. Если при* $t \to \infty$ *имеем устойчивую плотность* $\rho(y,t)$ *с предельным устойчивым множеством в окрестности нуля, то все сигналы в замкнутой системе будут ограниченными.*

Доказательство. Выберем квадратичную функцию

$$V = \frac{1}{2}y^2 + \frac{k}{2\alpha}(c(t) - c_0)^{\mathrm{T}}(c(t) - c_0). \tag{18}$$

Найдем полную производную по времени от (18) вдоль решений (16), (17) и результат запишем в виде

$$\dot{V} = \rho(y,t)y. \tag{19}$$

В итоге получили плотностную систему.

Если при $t \to \infty$ имеем устойчивую плотность $\rho(y,t)$ с предельным устойчивым множеством в окрестности нуля, то $\rho(y,t)$ выбрана так, что $\rho(y,t)y < 0$. Значит, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Тогда из (16) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}(c(t) - c_0)^{\mathrm{T}}(t)w(t) = 0$. Предельная ограниченность $V_y(t)$ следует из первого уравнения (13), предельной ограниченности $y(t)$ и гурвицевости матрицы F. Поставив (15) во второе уравнение (13), получим

$$\begin{aligned}\dot{V}_u &= FV_u + bc_0^{\mathrm{T}} w + b(c - c_0)^{\mathrm{T}} w + b\frac{a}{k}y(t) + b\rho(y,t) = \\ &= (F + bc_{0u})V_u + b\left[c_{0y}^{\mathrm{T}} V_y + k_{0y}y + b(c - c_0)^{\mathrm{T}} w + \frac{a}{k}y(t) + \rho(y,t)\right].\end{aligned}$$

Матрица $F + bc_{0u}$ имеет гурвицевый характеристический многочлен $R(\lambda)$ из постановки задачи. Значит, при ограниченных слагаемых в квадратных скобках функция $V_u(t)$ предельно ограниченная. Тогда вектор регрессии $w(t)$ также предельно ограниченный. Из условия $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, предельной ограниченности $w(t)$ и (17) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{c}(t) = 0$. Следовательно, $c(t)$ предельно ограниченная функция. Тогда из (15) следует ограниченность закона управления. В результате все сигналы ограничены в замкнутой системе.

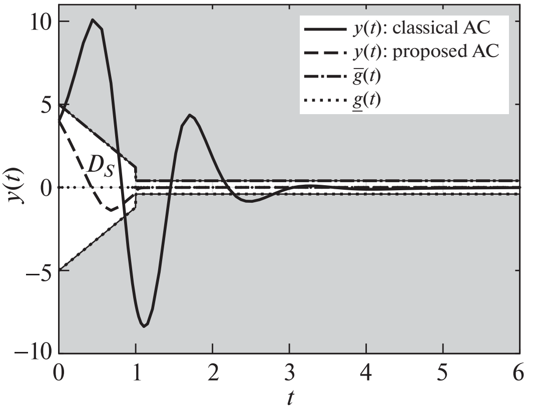

Рис. 11. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функциями плотности $\rho(y,t) = -\alpha y$ [23] (кривая, пересекающая серую область) и $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$ (кривая, находящиеся внутри трубки с штриховыми границами).

Пример 5. Рассмотрим объект управления (7) с неизвестными параметрами операторов $Q(p) = (p-1)^3$ и $R(p) = (p+1)^2$, известным $k = 1$ и неизвестными начальными условиями $p^2y(0) = 1$, $py(0) = 1$, $y(0) = 4$.

Определим $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ в фильтрах (13). В алгоритме адаптации (17) зададим $\alpha = 0{,}1$. В законе управления (15) выберем $a = 1$.

Рассмотрим различные виды функции плотности $\rho(y,t)$ в (15).

1. При $\rho(y,t) = -\alpha y$ замкнутая система (16) имеет точку равновесия $y = 0$. Подставив $\rho(y,t)$ в (19), имеем $\dot{V} = -\alpha y^2 \leqslant 0$ в области $D_S = \mathbb{R}$. Получили задачу адаптивной стабилизации, которая подробна описана в [23]. На рис. 11 (см. только траекторию, входящую в серую область) приведен переходной процесс при $\alpha = 1$ и $p^2y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$.

2. При $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$, $g(t) > 0$ замкнутая система (16) имеет положение равновесия $y = 0$. Подставив $\rho(y,t)$ в (19), имеем $\dot{V} = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y} y < 0$ в области $D_S = \{y \in \mathbb{R} : -g < y < g\}$. Причем $\rho(y,t) \to -\infty$ при $y \to g$ и $\rho(y,t) \to +\infty$ при $y \to -g$. Получили задачу стабилизации с симметричными ограничениями $-g$ и g. На рис. 11 приведены результаты переходных процессов при $\alpha = 1$ (траектория внутри пунктирной трубки), $p^2y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$ и $g(t) = \begin{cases} -4{,}6t + 5, & t \leqslant 1, \\ 0{,}4, & t > 1. \end{cases}$ Видно, что в отличие от классической схемы адаптивного управления [23] (траектория, соответствующая $\rho(y,t) = -\alpha y$) задание функции плотности вида $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{g-y}{g+y}$ гарантирует нахождение переходного процесса в трубке в любой момент времени.

3. Рассмотрим $\rho(y,t) = \alpha \ln \frac{\overline{g}-y}{y-\underline{g}}$, где $\overline{g}(t) > \underline{g}(t)$ для всех t. Обозначим $y = w = \frac{\overline{g}+\underline{g}}{2}$. Тогда $\rho(y,t) = 0$ при $y = w$ и любых t. Подставив $\rho(y,t)$ в (19), имеем $\dot{V} = \alpha \ln \frac{\overline{g}-y}{y-\underline{g}} y < 0$ в $D_S = \{y \in \mathbb{R}_+ : w < y < \overline{g}\} \cup \{y \in \mathbb{R}_- : \underline{g} < y < w\}$ и

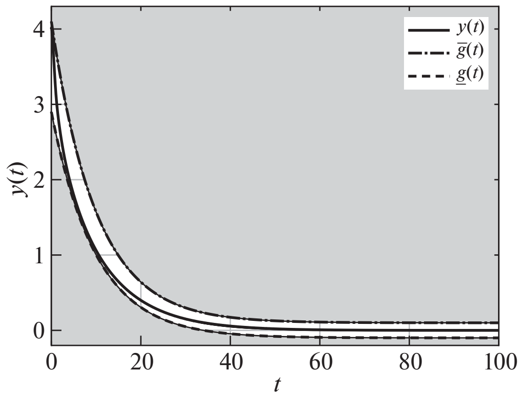

Рис. 12. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функцией плотности $\rho(y,t) = -\alpha \ln \frac{\overline{g}-y}{y-\underline{g}}$.

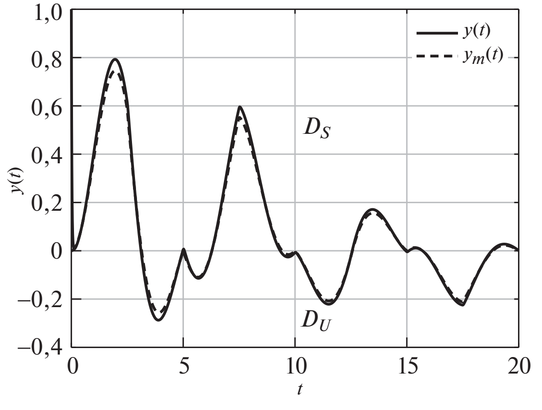

Рис. 13. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функцией плотности $\rho(y,t) = -\alpha(y - y_m)$.

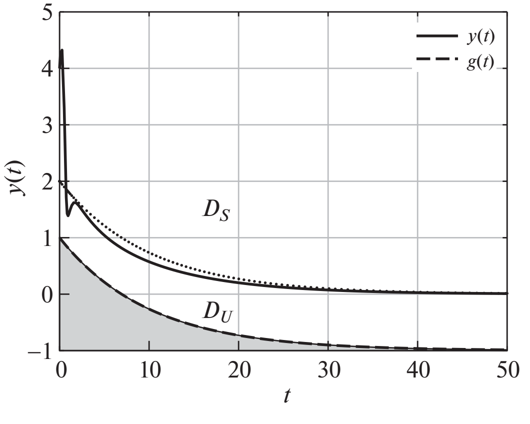

Рис. 14. Переходные процессы в адаптивной системе управления с функцией плотности $\rho(y,t) = -\alpha \ln(y - g)$.

$\dot{V} > 0$ в $D_U = \{y \in \mathbb{R}_+ : \underline{g} < y < w\} \cup \{y \in \mathbb{R}_- : w < y < \overline{g}\}$. Причем $\rho(y,t) \to$ $\to -\infty$ при $y \to \overline{g}$ и $\rho(y,t) \to +\infty$ при $y \to \underline{g}$, если $y \in \mathbb{R}_+$, а также $\rho(y,t) \to$ $\to +\infty$ при $y \to \overline{g}$ и $\rho(y,t) \to -\infty$ при $y \to \underline{g}$, если $y \in \mathbb{R}_-$. Получили задачу стабилизации с несимметричными ограничениями $\overline{g}$ и $\underline{g}$. На рис. 12 приведен переходной процесс при $\alpha = 5$, $\overline{g} = 4e^{-0,1t} + 0,1$, $\underline{g} = 3e^{-0,1t} - 0,1$ и $p^2y(0) =$ $= py(0) = 0$, $y(0) = 4$.

4. Пусть $\rho(y,t) = -\alpha(y - y_m)$. Тогда $\rho(y,t) = 0$ при $y = y_m$ и любых t. Подставив $\rho(y,t)$ в (19), имеем $\dot{V} = -\alpha(y - y_m)y < 0$ в $D_S = \{y \in \mathbb{R}_+ : y > y_m\} \cup$ $\cup \{y \in \mathbb{R}_- : y < y_m\}$ и $\dot{V} > 0$ в $D_U = \{y \in \mathbb{R}_+ : y < y_m\} \cup \{y \in \mathbb{R}_- : y > y_m\}$. Получили задачу слежения y за y_m. На рис. 13 приведен переходной процесс для $\alpha = 50$, $y_m = e^{-0,1t}\sin(t)P(t)$, $P(t) \in [0; 1,25]$ – генератор треугольных импульсов (с равнобедренными треугольниками) с периодом 5 с и $p^2y(0) =$ $= py(0) = 0$, $y(0) = 1$.

5. Рассмотрим $\rho(y,t) = -\alpha \ln(y - g)$, $g(t) \geqslant -1$. Тогда $\rho(y,t) = 0$ при $y =$ $= g + 1$ и любых t. Подставив $\rho(y,t)$ в (19), имеем $\dot{V} = -\alpha \ln(y - g)y < 0$ в $D_S = \{y \in \mathbb{R}_+ : y > g + 1\}$ и $\dot{V} > 0$ в $D_U = \{y \in \mathbb{R}_+ : y > g + 1\}$. Причем $\rho(y,t) \to -\infty$ при $y \to g$. Получим задачу спуска $x(t)$ вдоль поверхности с границей $g(t)$. На рис. 14 приведен переходной процесс при $\alpha = 10$, $g = 2e^{-0,1t} - 1$ и $p^2y(0) = py(0) = 0$, $y(0) = 4$.

3.3. Сравнение полученных законов управления с некоторыми существующими

Сравним предложенные законы управления (8), (10) и (13), (15), (17) с законами управления, полученными с использованием метода барьерных функций Ляпунова (от англ. «barrier Lyapunov function») [27, 28], метода управления с эффектом воронки (от англ. «funnel control») [10, 12] и методов управления с заданным качеством регулирования (от англ. «prescribed perfomance control») [11, 13, 14, 29].

- По способу и виду задания целевого (допустимого) множества (под целевым (допустимым) множеством понимается область, в которой должны находиться переходные процессы выходного сигнала объекта в замкнутой системе) методы [10–14, 27–29] и предложенный результат отличаются в следующем:
  - в [27, 28] границы допустимого множества постоянные, а эталонный сигнал должен быть достаточно гладким;
  - в [10–12] границы целевого множества задаются непрерывно-дифференцируемыми функциями, симметричными относительно оси времени. Рассматриваются только ограниченные целевые множества;
  - в [13, 14, 29] границы целевого множества задаются непрерывно-дифференцируемыми, несимметричными функциями. Рассматриваются только ограниченные целевые множества;
  - в предложенном в данной статье подходе целевые множества могут задаваться непрерывными (или разрывными, см. замечание 1), несимметричными функциями (см. случай 5 в примере 5). Целевое множе-

ство может быть неограниченным (см. случаи 2, 3 и 5 в примере 5). Эталонный сигнал может задаваться непрерывными (см. случай 4 в примере 5) или кусочно-непрерывными (см. замечание 1) функциями.

- По синтезу закона управления и анализу устойчивости замкнутой системы методы [10–14, 27–29] и предложенный результат отличаются в следующем:
  - методы [27, 28] используют функции Ляпунова специального вида, существующие на определенном подмножестве области определения системы (допустимом множестве);
  - методы [10–12] используют функции плотности специального вида;
  - подходы [11, 13, 14, 29] рассматривают нелинейное преобразование координат, которое сводит исходную задачу с ограничениями к задаче без ограничений. Однако данное преобразование координат приводит к анализу расширенной системы, содержащей переменные исходной и новой систем, что усложняет структуру закона управления и анализ устойчивости замкнутой системы. Более того, нелинейное преобразование координат приводит к изучению системы вида $\dot{\varepsilon}(t) = \rho(\varepsilon, t) f(\varepsilon, t)$, где ε – новая переменная, $\rho(\varepsilon, t) > 0$ – функция плотности, зависящая от производной функции замены координат по переменной ε. Следовательно, данный вид системы является частным случаем систем, рассмотренных в разделе 2;
  - предложенный в статье подход не содержит преобразования координат, что позволяет избежать рассмотрение дополнительных переменных и дополнительных динамических систем. Знак функции плотности может быть произвольным. Функция Ляпунова может существовать во всей области определения системы.

4. Заключение

В работе рассмотрен класс динамических систем, названных плотностными, которые содержат в правой части функцию плотности, задающую свойства пространства. Определяя свойства данной функции можно влиять на поведение исследуемой системы. Данный вывод в дальнейшем используется для синтеза законов управления. Показано, что при различных заданиях функции плотности можно получать как классические законы управления, так и новые, позволяющие формировать новые целевые требования к системе. В частности, приведен пример построения адаптивного закона управления с гарантией переходных процессов в заданном разработчиком множестве, в то время как классическое адаптивное управление обеспечивает только предельную ограниченность траекторий. При этом параметры множества задаются с помощью функции плотности, которая задает плотность рассматриваемого пространства. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы.

В статье показано, как некоторые существующие алгоритмы управления могут быть модифицированы с использованием функции плотности для получения нового качества переходных процессов. В дальнейшем свойства плотностных систем можно использовать и для построения более сложных алгоритмов управления, например, управление по выходу с любой относительной степенью объекта, управление с использованием наблюдателей, управление на скользящих режимах и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматлит, 1963.
2. *Жуков В.П.* Необходимые и достаточные условия неустойчивости нелинейных автономных динамических систем // АиТ. 1990. № 12. С. 59–65.

   Zhukov V.P. Necessary and sufficient conditions for instability of nonlinear autonomous dynamic systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 12. P. 1652–1657.
3. *Жуков В.П.* Дивергентные условия асимптотической устойчивости нелинейных динамических систем второго порядка // АиТ. 1999. № 7. С. 34–43.

   Zhukov V.P. On the divergence conditions for the asymptotic stability of second-order nonlinear dynamical systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 7. P. 934–940.
4. *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems & Control Letters. 2001. V. 42. P. 161–168.
5. *Фуртат И.Б.* Дивергентные условия устойчивости динамических систем // АиТ. 2020. № 2. С. 62–75.

   Furtat I.B. Divergent stability conditions of dynamic systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 247–257.
6. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Stability study and control of nonautonomous dynamical systems based on divergence conditions // J. Franklin Institute. 2020. V. 357. No. 18. P. 13753–13765.
7. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Stability/instability study and control of autonomous dynamical systems: Divergence method // IEEE Access. 2021. No. 9. P. 49088–49094.
8. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Divergence Method for Exponential Stability Study of Autonomous Dynamical Systems // IEEE Access. 2022. No. 10. P. 49088–49094.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика / Теоретическая физика. М.: Наука, 1986.
10. *Liberzon D., Trenn S.* The bang-bang funnel controller for uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree // IEEE Trans. Autom. Control. 2013. V. 58. No. 12. P. 3126–3141.
11. *Bechlioulis C., Rovithakis G.* A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems // Automatica. 2014. V. 50. No. 4. P. 1217–1226.
12. *Berger T., Le H., Reis T.* Funnel control for nonlinear systems with known strict relative degree // Automatica. 2018. V. 87. P. 345–357.

13. *Фуртат И.Б., Гущин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // АиТ. 2021. № 4. С. 121–139.

Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 4. P. 654–669.

14. *Furtat I.B., Gushchin P.A.* Nonlinear feedback control providing plant output in given set // Int. J. Control. 2021. https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336

15. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой статью. М.: Наука, 1985.

16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

17. *LaSalle J.P.* Stability of Nonautonomus Systems // Nonlinear Analisis, Theory, Methods & Applications. 1976. V. 1. No. 1. P. 83–91.

18. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

19. *Polyakov A.* Nonlinear Feedback Design for Fixed-Time Stabilization of Linear Control Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2012. Vol. 57, no. 8. P. 2106–2110.

20. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.

21. *Dolgopolik M.V., Fradkov A.L.* Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2017. V. 25. P. 99–113.

22. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.

23. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.

24. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1973.

25. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012.

26. *Carroll S.M.* Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. San Francisco, Addison Wesley, 2004.

27. *Tee K.P., Ge S.S., Tay E.H.* Barrier Lyapunov Functions for the control of output-constrained nonlinear systems // Automatica. 2009. V. 45. No. 4. P. 918–927.

28. *Azimi V., Hutchinson S.* Exponential Control Lyapunov-Barrier Function Using a Filtering-Based Concurrent Learning Adaptive Approach // IEEE Trans. on Automatic Control. 2022. V. 67. No. 10. P. 5376–5383.

29. *Фуртат И.Б., Гущин П.А., Нгуен Б.Х., Колесник Н.С.* Адаптивное управление с гарантией заданного качества регулирования // Управление большими системами. 2023. Т. 102. С. 44–57.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 07.03.2023

После доработки 23.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023