

## Стохастические системы

© 2023 г. **А.А. БАТЕНКОВ**, д-р техн. наук (batenkov1957@mail.ru)  
(Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева),  
**К.А. БАТЕНКОВ**, д-р техн. наук (pustur@yandex.ru)  
(МИРЭА — Российский технологический университет, Москва),  
**А.Б. ФОКИН** (tatarin57ru@mail.ru)  
(Академия ФСО России, Орёл)

### АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ МАТРИЦЫ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Представлен подход к анализу вероятности связности телекоммуникационной сети как показателя ее надежности и живучести. Используется стандартная форма перехода к замещению, получаемая модифицированным методом многопеременной инверсии (multiple-variable-inversion), рассматривающим события несвязности исходной сети. В результате устраняется необходимость повторения процедур анализа элементов на уникальность в отдельных слагаемых функции связности, что приводит к снижению вычислительной сложности даже по сравнению с методом двудольных графов при условии абсолютной надежности вершин и использовании в качестве простых конструкций сечений. На примерах мостикового графа и магистральной сети юга России продемонстрированы возможности предложенного подхода.

*Ключевые слова:* вероятность связности, телекоммуникационная сеть, надежность, многопеременная инверсия.

**DOI:** 10.31857/S0005231023110053, **EDN:** OOOZVVV

#### 1. Введение

В качестве показателя структурной надежности телекоммуникационных сетей наиболее часто используют вероятность связности пары вершин графа, которым она описывается [1–3]. При этом для большинства сетей подобная вероятность не вычисляется по простейшим формулам последовательного и параллельного соединения элементов.

В целом вероятность связности при условии использования критерия связности в виде наличия, по крайней мере, одного пути между заданными парами вершин [1, 2] является эквивалентом коэффициента готовности телекоммуникационной сети [4], который рассматривается и в отечественных стандартах, и в зарубежных. Так, соответствующая терминология определена в ГОСТ Р 27.102-2021 [5], разработанном с учетом основных нормативных положений международного стандарта ИЕС 60050-192:2015 [6, 7] и пришедшем на смену ГОСТ 27.002-2015 [8]. В ГОСТ Р 27.102-2021 [5] вводит-

ся частный случай общего понятия «коэффициент готовности» — нестационарный (мгновенный) коэффициент готовности (*instantaneous availability*), а ГОСТ Р 27.101-2021 [9] дополняет его асимптотическим (стационарным) коэффициентом готовности (*steady state availability*), усредненным коэффициентом готовности (*mean availability*) [5, 10]. Близкий по смыслу коэффициент готовности услуг сети из конца в конец (*end-to-end*) как доля продолжительности работоспособного состояния используется в ГОСТ Р 27.018-2021 (IEC 62673:2013) [11, 12].

Следует отметить, что в отечественном ГОСТ Р 53111-2008 [13] рассматривается сразу два коэффициента: готовности и оперативной готовности, первый из которых характеризует надежность телекоммуникационной сети, а второй — живучесть. Эти коэффициенты, в свою очередь, определены также и в ГОСТ Р 27.102-2021 [5], и в IEC 61907:2009 [14]. При этом оба коэффициента также рассчитываются в виде вероятности связности с той лишь разницей, что коэффициент оперативной готовности отдельного канала электросвязи взвешивается вероятностью сохранения его работоспособности при воздействии внешних дестабилизирующих факторов. В этой трактовке коэффициент оперативной готовности близок к термину, определенному в [15], где вероятность сохранения работоспособного состояния задается как вероятность того, что система, будучи исправной в произвольный момент времени, не выйдет из строя в некотором интервале, начинающемся с этого момента. Следует однако отметить, что коэффициент оперативной готовности, определенный в ГОСТ Р 53111-2008, фактически таковым не является, поскольку не соответствует определению этого показателя в ГОСТ Р 27.102-2021. Так, в [16] показаны неуместность применения в качестве числового показателя живучести коэффициента оперативной готовности и непригодность рекомендуемого в ГОСТ Р 53111-2008 метода его расчета, а также сделан общий вывод о неприемлемости вероятностных показателей для оценки живучести.

Для больших и сложных по структуре телекоммуникационных сетей расчет вероятности связности оказывается весьма громоздким и трудоемким процессом вследствие огромного числа элементов в результирующем выражении [17]. Наиболее целесообразным выходом из подобной ситуации является подход, основанный на представлении события связности сети в виде сумм произведений несовместных событий [3] (*SDP — sum of disjoint product*), представляющих собой форму перехода к замещению [18], допускающую непосредственный переход к вероятностной функции заменой логических переменных (множеств) вероятностями, а логических операций (операций над множествами) соответствующими арифметическими операциями [19]. Данное представление приводит к достаточно компактной форме записи результирующего уравнения связности и, как следствие, к снижению вычислительной сложности и уменьшению результирующей ошибки округления [13]. Отметим, что в отечественной научной литературе данный подход получил название метода объединения простых цепей с учетом поглощения [1].

В отличие от метода прямого перебора простых цепей [1] (inclusion-exclusion technique [3] — метод включения-исключения), использующего логическую схему “или”, метод сумм произведений несовместных событий SDM основан на алгоритме ортогонализации [18] и использует схему “либо”. Отметим, что метод прямого перебора простых цепей рекомендован отечественным ГОСТ для расчета устойчивости функционирования сетей [13].

В целом же рассматриваемые подходы входят в группу, предполагающую отыскание так называемых простых конструкций [18, 20] графа телекоммуникационной сети — простых цепей, деревьев или сечений [3] (некоторых событий), которые используются в том числе для построения кумулятивных оценок вероятности связности графов, существенно снижающих сложность расчетов, но позволяющих получать лишь приближенные значения вероятности связности графа. Следует заметить, что метод кумулятивного оценивания берет свое начало еще с работ [1, 2], где описаны общие подходы к приближенному расчету, хотя непосредственно сам метод описан в [21], где предложено использовать кумулятивные оценки границ, сходящиеся к точному значению вероятности связности случайного графа, для однозначного принятия решения о его надежности. В основу данного метода могут быть положены все известные методы точного анализа: метод факторизации, логико-вероятностные методы, метод разложения по остовному дереву [21–29].

Для случаев точных вычислений одним из первых алгоритмов вычисления суммы событий связности является подход, изложенный в [30]. Данный алгоритм значительно сократил объем вычислений, необходимых для получения сумм произведений несовместных событий, по сравнению с более ранними подходами. Применение алфавитно-цифрового упорядочивания переменных состояния приводит к сокращению размеров непересекающихся сумм [31]. Более эффективный подход изложен в [32], где используется модификация правил упорядочивания списка произведений. Компоновка минимальных простых цепей усовершенствована в [33, 34]. В [35] предложен алгоритм инверсии произведений переменных взамен применяемого ранее инвертирования отдельных переменных. Альтернативой выступает способ, предполагающий рекурсивную процедуру расчета вероятности объединенного события, изначально разработанный для анализа вероятности блокировки в сетях с вариативной маршрутизацией [36].

Следует отметить, что даже наиболее совершенным модификациям метода, использующим многопеременную инверсию (MVI — multiple-variable-inversion), свойственен существенный недостаток, связанный с необходимостью сравнительного анализа каждого слагаемого со всеми ранее рассмотренными на предмет уникальности содержащихся ребер, а также выполнения в ряде случаев дополнительных операций над множествами [3, 37–40]. Для устранения подобных повторяющихся рутинных процедур целесообразно рассматривать не объединение событий связности (несвязности), вырождающееся в сумму несовместных произведений, а пересечение противоположных событий, приводящее также к подобной сумме, но для получения которой

нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными.

## 2. Общий подход к анализу вероятности связности на основе несовместных событий

В данной работе рассматривается модель телекоммуникационной сети в форме графа  $G$ . В общем случае граф может быть ориентированным, при этом неориентированный вариант оказывается частным случаем первого. Здесь предполагается, что узлы телекоммуникационной сети обладают абсолютной надежностью (вероятность работоспособности вершин равна единице), а линии связи ненадежны (вероятность работоспособности ребер отлична от единицы). Сама телекоммуникационная сеть может быть общего вида, т.е. быть многополюсной, когда необходимо обеспечить связность между заданным множеством вершин–полюсов. При этом предельными случаями выступают варианты двухполюсной и всеполюсной сетей, в первом из которых число полюсов равно двум, а во втором – совпадает с количеством вершин графа.

В данном контексте под событием  $S$  связности графа  $G$  понимается наличие хотя бы одного пути между любыми вершинами–полюсами. Отметим, что в общем случае для многополюсной сети событие  $S$  связности подразумевает существование хотя бы одного подграфа, связывающего вершины–полюсы, для двухполюсной – простой цепи, а для всеполюсной – остового дерева. Первоначально в кумулятивных методах событие  $S$  связности представляется в форме объединения событий связности отдельных связанных подграфов, которые в общем случае являются зависимыми. Основная задача метода многопеременной инверсии MVI заключается в преобразовании подобного объединения в форму объединения независимых событий  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, s'$ , которая является формой перехода к замещению [18]. По сути, аналогом каждого из данных независимых событий  $a_i$  является элементарная простая цепь [1]. При этом из всего многообразия булевых преобразований достаточно использовать две базовые процедуры – расщепления и поглощения

$$\begin{aligned}\overline{ab} \overline{ac} &= \overline{a} \cup (a \overline{b} \overline{c}), \\ ab \overline{ac} &= ab\overline{c},\end{aligned}$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – некоторые взаимонезависимые события [1].

Отметим, что в соответствии с принципом двойственности также можно рассматривать событие несвязности графа  $G$ , под которым понимается отсутствие пути между хотя бы одной парой вершин–полюсов. При этом несколько изменяется форма объединения событий, которая в данном случае становится объединением событий полной несвязности сечений графа  $G$ . Однако общий подход к расчету не изменяется, поэтому далее подразумевается, если не оговорено дополнительно, что событие  $S$  связности может быть заменено событием несвязности.

После выполнения рекурсивной процедуры формируется конечное выражение для события  $S$  связности (или несвязности) графа  $G$ , являющееся объединением независимых событий  $a_i, i = 1, \dots, s'$ , представляющих отрицание пересечения или пересечение определенных неповторяющихся событий работоспособности ребер,

$$S = \bigcup_{i=1}^{s'} a_i,$$

что позволяет его считать формой перехода к замещению, т.е.

$$(1) \quad P(S) = \sum_{i=1}^{s'} P(a_i).$$

В свою очередь каждое независимое событие  $a_i$  является пересечением нескольких других событий  $a_{i,k}, i = 1, \dots, s', k = 1, \dots, g_i + 2$ ,

$$(2) \quad a_i = \bigcap_{k=1}^{g_i} \overline{\bigcap_{i_k \in b_{i,k}} l_{i_k}} \bigcap_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} l_{i_{g_i+1}} = \bigcap_{k=1}^{g_i+1} a_{i,k},$$

где  $g_i$  – количество групп событий неработоспособности в событии  $a_i$ ;

$l_j, j = 1, \dots, l$  – событие работоспособности  $j$ -го ребра графа  $G$ ;

$b_{i,k}$  – множество номеров ребер, образующих  $k$ -е событие несвязности в  $i$ -м независимом событии  $a_i$ ;

$b_{i,g_i+1}$  – множество номеров ребер, образующих событие связности в  $i$ -м независимом событии  $a_i$ .

Их целесообразно сгруппировать по следующему принципу. Первоначально образуются  $k$  групп событий несвязности в событии  $a_i$ , каждое из которых определяет обратное событие одновременной работоспособности некоторого набора ребер,

$$(3) \quad a_{i,k} = \overline{\bigcap_{i_k \in b_{i,k}} l_{i_k}}, \quad k = 1, \dots, g_i.$$

Следующей  $(g_i + 1)$ -й группой является пересечение событий работоспособности ребер (без отрицания)

$$(4) \quad a_{i,g_i+1} = \bigcap_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} l_{i_{g_i+1}}.$$

Последняя же  $(g_i + 2)$ -я группа включает все достоверные события (неиспользуемые ребра в событии  $a_i$ , вероятность возникновения которых равна единице [41])

$$(5) \quad a_{i,g_i+2} = \bigcap_{i_{g_i+2} \notin \bigcup_k b_{i,k}} l_{i_{g_i+2}}.$$

При этом каждое подобное независимое событие  $a_i$  содержит лишь однократное включение простых событий работоспособности отдельного ребра  $l_j$ , что позволяет представить его в форме вектора, а набор всех этих независимых событий как матрицу  $\mathbf{Y} = \{y_{j,i}\}_{\substack{j=1,\dots,l, \\ i=1,\dots,s'}}$ , каждый элемент  $y_{j,i}$  которой соответствует определенному  $j$ -му ребру  $i$ -го события, а значения задаются по принципу принадлежности к определенной группе

$$(6) \quad y_{j,i} = \begin{cases} k, & j \in b_{i,k}, \\ 0, & j \in b_{i,g_i+1} \\ -1, & j \notin \bigcup_k b_{i,k}. \end{cases}$$

### 3. Переход от матрицы независимых событий к вероятностной функции

Непосредственно переход от матрицы событий к вероятностной функции базируется на представлении элементов данной матрицы в виде выражения (6), а также на уравнении (2) для произвольного независимого события  $a_i$  и суммы вероятностей их связности, имеющей аналитическую форму (1).

Вероятность независимого события  $a_i$  согласно теореме умножения вероятностей для независимых событий и выражению (2) равна произведению вероятностей составляющих его событий (групп)

$$P(a_i) = \prod_{k=1}^{g_i+1} P(a_{i,k}).$$

Для каждой из групп событий также в соответствии с данной теоремой, формулой для полной группы событий и выражениями (3)–(5) вероятности факторизуются

$$\begin{aligned} P(a_{i,k}) &= 1 - \prod_{i_k \in b_{i,k}} p_{i_k}, \quad k = 1, \dots, g_i, \\ P(a_{i,g_i+1}) &= \prod_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} p_{i_{g_i+1}}, \\ P(a_{i,g_i+2}) &= 1 - \prod_{i_{g_i+2} \notin \bigcup_k b_{i,k}} 0 = 1, \end{aligned}$$

где  $p_{i_k} = P(l_{i_k})$  – вероятность работоспособности ребра  $l_{i_k}$ .

Отметим, что в третьем уравнении  $P(l_{i_k}) = 0$ , поскольку ребра не участвуют в формировании события  $a_i$ .

Таким образом, вероятность связности графа равна

$$P(S) = 1 - \sum_{i=1}^{s'} \prod_{k=1}^{g_i} \left( 1 - \prod_{i_k \in b_{i,k}} p_{i_k} \right) \prod_{i_{g_i+1} \in b_{i,g_i+1}} p_{i_{g_i+1}}.$$

Выражение для расчета вероятности связности на основе матрицы  $\mathbf{Y}$  независимых событий удобно также получить сначала в скалярном виде, а затем перейти к матричному. Так, для отдельных групп событий соответствующие вероятности имеют форму:

$$P(a_{i,k}) = 1 - \prod_{j=1}^l z_j,$$

$$\text{где } z_j = \begin{cases} p_j, & y_{j,i} = k, \\ 1, & y_{j,i} \neq k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, g_i,$$

$$P(a_{i,g_i+1}) = \prod_{j=1}^l z_j,$$

$$\text{где } z_j = \begin{cases} p_j, & y_{j,i} = 0, \\ 1, & y_{j,i} \neq 0. \end{cases}$$

В матричном виде возможно представить вычисление вероятностей как операции над векторами и матрицами

$$P(a_{i,k}) = 1 - \left| \text{dg} \left\{ \text{sign} \left[ \left( \mathbf{Y}^{(i)} - k \mathbf{1}_l \right) \odot \left( \mathbf{Y}^{(i)} - k \mathbf{1}_l \right) \right] \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right\} \right|,$$

$$k = 1, \dots, g_i,$$

$$P(a_{i,g_i+1}) = \left| \text{dg} \left[ \text{sign} \left( \mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)} \right) \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right] \right|,$$

где  $|\mathbf{X}|$  – определитель (детерминант) квадратной матрицы  $\mathbf{X}$ ;

$\text{dg}(\mathbf{x})$  – оператор диагонализации вектора  $\mathbf{x}$ , преобразующий вектор  $\mathbf{x}$  в диагональную квадратную матрицу, элементы главной диагонали которой равны соответствующим элементам исходного вектора  $\mathbf{x}$ ;

$$\mathbf{1}_l = \left. \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} l \text{ – вектор размером } l, \text{ составленный из всех единиц;}$$

$\odot$  – произведение Адамара;

$\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1,\dots,l}$  – вектор вероятностей работоспособности ребер.

Отметим, что определитель диагонализированного вектора  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1,\dots,l}$  равен произведению его элементов, т.е.

$$|\text{dg}(\mathbf{x})| = \prod_{i=1}^l x_i.$$

Таким образом, вероятность связности графа на основе деревьев равна

$$(7) \quad P(S) = 1 - \sum_{i=1}^{s'} \left| \text{dg} \left[ \text{sign} \left( \mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)} \right) \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right] \right| \times \\ \times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} \left( 1 - \left| \text{dg} \left\{ \text{sign} \left[ \left( \mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \odot \left( \mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \right] \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p} \right\} \right| \right).$$

Если для расчета матрицы  $\mathbf{Y}$  независимых событий в качестве основы используется матрица  $\mathbf{W}$  сечений, то в выражении для вероятности связности необходимо заменить вектор  $\mathbf{p}$  вероятностей работоспособности ребер на вектор  $(\mathbf{1}_l - \mathbf{p})$  вероятностей неработоспособности ребер, а также учесть сокращение единицы, стоящей в начале правой части выражения (8):

$$(8) \quad P(S) = \sum_{i=1}^{s'} \left| \text{dg} \left[ \text{sign} \left( \mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)} \right) \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) \right] \right| \times \\ \times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} \left( 1 - \left| \text{dg} \left\{ \text{sign} \left[ \left( \mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \odot \left( \mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l \right) \right] \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) \right\} \right| \right).$$

Таким образом, в независимости от применяемого базиса в форме деревьев либо сечений вероятностная функция имеет один и тот же вид с точностью до вектора  $\mathbf{p}$  вероятностей работоспособности ребер и единицы.

#### 4. Оценка вычислительной сложности

Оценка вычислительной сложности рассматриваемого метода проведена по аналогии с предложенным способом оценки эффективности (объема трудозатрат) метода двудольных графов [15], который в соответствии с оценками, приведенными в [1, 15], является наиболее эффективным из числа проанализированных. В данном случае вычислительная сложность измеряется в числе конъюнктивных форм, необходимых для представления события связности графа. Более рационально ее немного уточнить и говорить о количестве анализируемых элементарных конструкций (подграфов) в ходе процесса редукции исходного графа. Приводимая оценка рассматривается в [15] для графов регулярной структуры, а точнее полносвязных графов. Тогда число  $n_d$  конъюнктивных форм (элементарных конструкций) на полносвязных графах с  $v$  вершинами и  $l = \frac{v(v-1)}{2}$  ребрами для метода двудольных графов [2, 15] равно

$$n_d = \sum_{i=0}^{v-3} C_{v-1}^i (2^{v-1-i} - 2),$$

где  $C_{v-1}^i$  – число сочетаний из  $v - 1$  элементов по  $i$  [42].



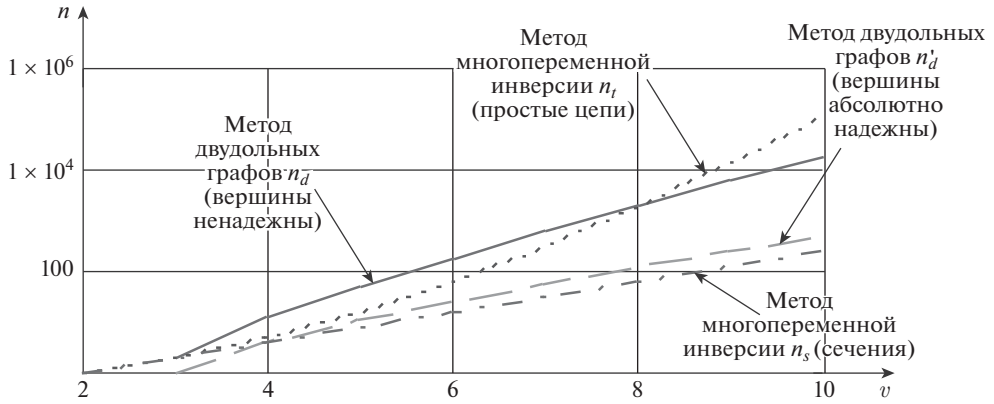


Рис. 1. Зависимости числа  $n$  анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества  $v$  вершин полносвязного графа.

Приведенный в работе метод многопеременной инверсии MVI для случая двухполюсных сетей оперирует с элементарными конструкциями, порождающими конъюнктивные формы, в виде простых цепей, количество  $n_t$  которых определяется как сумма числа размещений [42] по всем неполным вершинам

$$n_t = \sum_{i=0}^{v-2} \frac{(v-2)!}{(v-2-i)!}.$$

Отметим, что в данных вариантах элементарные конструкции учитывают также ненадежность вершин. Причем на количество простых цепей абсолютная надежность вершин никоим образом не влияет.

В случае же учета абсолютной надежности вершин количество элементарных конструкций для метода двудольных графов [15] существенно сокращается:

$$n'_d = \sum_{i=0}^{v-3} C_{v-1}^i = 2^{v-1} - v.$$

С другой стороны, метод многопеременной инверсии MVI может использовать в качестве элементарных конструкций двухполюсные сечения, количество которых соответствует сумме числа декартовых произведений [3] вершинных неполных сечений графа

$$n_s = \sum_{i=0}^{v-2} C_{v-2}^i = 2^{v-2}.$$

Еще раз подчеркнем, что в данном случае все вершины считаются абсолютно надежными.

На рис. 1 приведены зависимости числа  $n$  анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества  $v$  вершин полносвязного графа. Их

анализ показывает наличие выигрыша в вычислительной сложности метода многопеременной инверсии MVI по сравнению с методом двудольных графов лишь для полносвязных графов с количеством вершин, меньшим восьми. Однако при использовании сечений и абсолютно надежных вершинах многопеременная инверсия демонстрирует выигрыш

$$\frac{n'_d}{n_s} = 2 - 2^{2-v},$$

стремящийся к двум при росте количества вершин.

### 5. Пример анализа вероятности связности для мостикового графа

Рассмотрим реализацию предложенных процедур на примере мостикового графа  $G(4, 5)$  (рис. 2) и определим его вероятность связности. Источник и сток на рисунке отмечены квадратами:  $v_s = 1$ ,  $v_t = 4$ . Матрица смежностей графа данной сети задается формулой

$$(9) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Путей (простых цепей) в мостиковом графе всего четыре: 1 — {1, 4}, 2 — {2, 5}, 3 — {1, 3, 5}, 4 — {2, 3, 4}. Тогда матрица путей есть

$$(10) \quad \mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

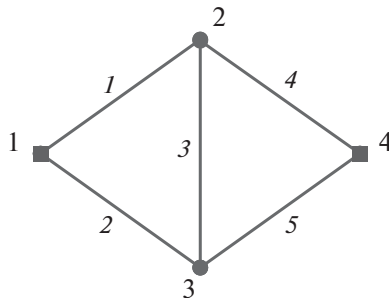


Рис. 2. Мостиковый двухполосный граф.

и матрица независимых событий —

$$(11) \quad \mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Двухполюсных сечений в мостиковом графе тоже четыре: 1 — {1, 2}, 2 — {4, 5}, 3 — {1, 3, 5}, 4 — {2, 3, 4}. Тогда матрица двухполюсных сечений равна

$$(12) \quad \mathbf{W}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица независимых событий несвязности —

$$(13) \quad \mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вероятности работоспособности ребер одинаковы:  $P(l_j) = p = 0,9$ ,  $j = 1, \dots, j$ .

Вектор вероятностей работоспособности ребер составлен из одинаковых элементов

$$\mathbf{p} = p\mathbf{1}_l = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \\ 0,9 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (11) слагаемых в выражении (7) всего четыре, т.е.  $s' = 4$ . Тогда вероятность связности графа  $G$  равна

$$\begin{aligned} P(S) &= 1 - [0,1^2 + 0,9 \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,9^2) + 0,9 \cdot 0,1^2 + 0,9^2 \cdot 0,1^3] = \\ &= 1 - (0,01 + 0,00171 + 0,009 + 0,00081) = 0,97848. \end{aligned}$$

Аналогично получается результат на основе матрицы независимых событий несвязности (13). В выражении (8) слагаемых также оказывается всего четыре, т.е.  $s' = 4$ . Тогда вероятность связности графа  $G$  будет

$$\begin{aligned} P(S) &= 0,9^2 + 0,1 \cdot 0,9^2 \cdot (1 - 0,1^2) + 0,1 \cdot 0,9^2 + 0,1^2 \cdot 0,9^3 = \\ &= 0,81 + 0,08019 + 0,081 + 0,00729 = 0,97848. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, результаты оказались идентичными.

## 6. Пример анализа вероятности связности для магистральной сети юга России

Кабельная структура магистральной сети юга России (рис. 3) доступна на официальном сайте Международного союза электросвязи [43]. На рис. 3 также представлен пронумерованный эквивалентный граф  $G(12, 21)$ , для которого при расчетах предполагается абсолютная надежность вершин. Вероятность же работоспособности ребер согласно ГОСТ [13] трактуется как коэффициент готовности, определяемый конструктивными особенностями среды распространения и их организующих технических средств [44].

Каждая линия связи двунаправленная и соединяет два оптических линейных терминала, установленных на смежных узлах [45]. Коэффициент неготовности оптического кабеля определяется на основе числа внезапных отказов в среднем на один километр на интервале  $10^9$  часов и равен 570 FIT (Failure in Time) [46], где один FIT — это один отказ за  $10^9$  часов. Следует также учесть ошибку оценки длины линии только на основе географических координат по топографической карте. Для этого необходимо использовать коэффициент искривления линий, соответствующий 2,2 [47], отражающий, во сколько раз реальная длина линий связи между двумя пунктами сети отличается от прямой. Тогда исходя из среднего времени восстановления (24 ч) коэффициент неготовности оптического кабеля произвольной длины  $d$  равен

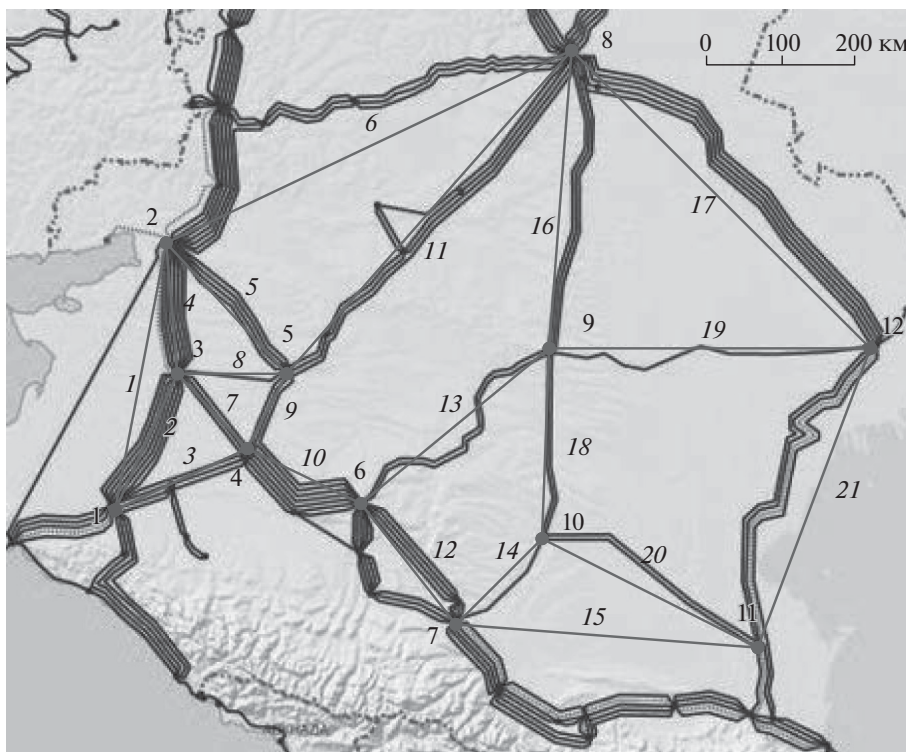


Рис. 3. Кабельная структура магистральной сети юга России.

$570 \cdot 10^{-9} \cdot 24 \cdot d \cdot 2,2 = 3,01 \cdot 10^{-5} \cdot d$  [45, 48]. Коэффициент неготовности оптического терминала —  $5,12 \cdot 10^{-7}$  [45, 49]. Естественно, что линия связи работоспособна в случае готовности всех составляющих ее элементов. В результате коэффициент готовности  $p$  отдельных линий связи вычисляется на основе протяженности  $d$ , рассчитанной на основе географических координат по топографической карте:

$$p = (1 - 3,01 \cdot 10^{-5} \cdot d)(1 - 5,12 \cdot 10^{-7})^2.$$

Отметим, что коэффициент готовности подобной линии связи протяженностью один километр составляет 0,99996888, а стокилометровой — 0,99698938.

Источник и сток на рис. 3 отмечены квадратами:  $v_s = 1$ ,  $v_t = 12$ .

Данная двухполюсная сеть содержит двести три простые цепи ( $s' = 203$ ) и сто девять сечений ( $s' = 109$ ). Алгоритм поиска простых цепей реализован на основе процедуры поиска в ширину и отбора соответствий по стокам [50]: первоначально синтезируется множество цепей от источника ко всем возможным вершинам, а затем отбираются из полученного множества только те цепи, стоки которых совпадают с заданным стоком. Алгоритм для перечисления сечений базируется на методе, использующем в качестве основы матрицу связностей и предполагающем последовательный перебор всех сочетаний вершинных сечений начиная с истока и стока [39]. Данный способ приводит к включению в общий состав сечений неминимальных, что потребовало введения дополнительной процедуры проверки добавляемого сечения на безызбыточность.

Результаты расчетов коэффициента готовности сети для обоих вариантов совпали:  $p = 0,99999489$ .

## 7. Заключение

В работе представлен набор независимых событий (связности и несвязности графа, моделирующего телекоммуникационную сеть), содержащих лишь однократное включение простых событий работоспособности отдельного ребра в форме матрицы, каждый элемент которой соответствует определенному ребру события, а значения задаются по принципу принадлежности к определенной группе. Получены аналитические выражения вероятностной функции, демонстрирующие идентичность общей формы в независимости от применяемого базиса в форме деревьев либо сечений с точностью до вектора вероятностей работоспособности ребер и единицы. На примере продемонстрирована возможность анализа надежности телекоммуникационной сети на основе предложенных моделей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филлин Б.П.* Методы анализа структурной надежности сетей связи. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.

2. *Филин Б.П.* Об аналитическом методе приближенного вычисления надежности сложных систем // А и Т. 1982. № 11. С. 159–170.
3. *Chaturvedi S.K.* Network Reliability Measures and Evaluation. Scrivener Publishing LLC. 2016. 237 p.
4. *Нетес В.А.* Выбор показателей надежности сетей доступа // Первая миля. 2019. № 8. С. 52–55. <https://doi.org/10.22184/2070-8963.2019.85.8.52.55>
5. ГОСТ Р 27.102-2021. Надежность в технике. Надежность объекта. Термины и определения. Введ. 2022-01-01. 46 с.
6. IEC 60050-192:2019. International electrotechnical vocabulary. Part 192: Dependability.
7. <https://electropedia.org/iev/iev.nsf/index?openform&part=192>
8. ГОСТ 27.002-2015. Надежность в технике. Термины и определения. Введ. 2017-03-01. 16 с.
9. ГОСТ Р 27.101-2021. Надежность в технике. Надежность выполнения задания и управление непрерывностью деятельности. Термины и определения. Введ. 2022-01-01. 28 с.
10. *Нетес В.А.* Новый международный терминологический стандарт по надежности // Надежность. 2016. № 3. С. 54–58. <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2016-16-3-54-58>
11. ГОСТ Р 27.018-2021. Надежность в технике. Методы оценки и обеспечения надежности коммуникационной сети. Введ. 2021-10-08. 35 с.
12. IEC 62673:2013. Methodology for communication network dependability assessment and assurance.
13. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. – Введ. 2008–12–18. М.: Стандартинформ, 2009. 16 с.
14. IEC 61907:2009. Communication network dependability engineering.
15. *Дудник Б.Я., Овчаренко В.Ф., Орлов В.К. и др.* Надежность и живучесть систем связи / Под ред. Дудника Б.Я. М.: Радио и связь, 1984.
16. *Нетес В.А.* О нормативных требованиях к живучести сетей электросвязи // Вестник связи. 2023. № 1. С. 2–4.
17. *Батенков К.А.* Анализ и синтез структур сетей связи методом перебора состояний // Вестн. СПб. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 18:3 (2022), 300-315. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.301>
18. *Рябинин И.А.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем / И.А. Рябинин, Г.Н. Черкесов. М.: Радио и связь, 1981.
19. *Батенков К.А., Батенков А.А.* Анализ и синтез структур сетей связи по детерминированным показателям устойчивости // Труды СПИИРАН. 2018. № 3. С. 128–159.
20. *Анфёров М.А.* Алгоритм поиска подкритических путей на сетевых графиках // Russ. Technol. J. 2023. No. 11(1). P. 60–69. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-1-60-69>
21. *Won J.-M., Karray F.* Cumulative update of all-terminal reliability for faster feasibility decision // IEEE Trans. Reliability. 2010. V. 59. No. 3. P. 551–562.
22. *Rodionov A., Migov D., Rodionov O.* Improvements in the efficiency of cumulative updating of all terminal network reliability // IEEE Trans. Reliability. 2012. V. 61. No. 2. P. 460–465.

23. *Martinez S.P., Calvino B.O., Rocco S.C.M.* All-terminal reliability evaluation through a Monte Carlo simulation based on an MPI implementation // European Safety and Reliability Conference: Advances in Safety, Reliability and Risk Management (PSAM 2011/ESREL 2012). Helsinki, 2012. P. 1–6.
24. *Silva J., Gomes T., Tipper D., Martins L., Kounev V.* An Effective Algorithm for Computing All-terminal Reliability Bounds // Networks. 2015. No. 66. P. 282–295. <https://doi.org/10.1002/net.21634>
25. *Davila-Frias A., Yodo N., Le T., Yadav O.P.* A deep neural network and Bayesian method based framework for all-terminal network reliability estimation considering degradation // Reliability Engineering & System Safety, 229 (2023), 305–311. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2022.108881>
26. *Li Sh., Wang J., He Sh.* Connectivity probability evaluation of a large-scale highway bridge network using network decomposition // Reliability Engineering & System Safety, Volume 236, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2023.109191>
27. *Alkaff A., Qomarudin M.N., Bilfaqih Yu.* Network reliability analysis: matrix-exponential approach // Reliability Engineering & System Safety, Volume 212, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2021.107591>
28. *Yeh W.-Ch.* A quick BAT for evaluating the reliability of binary-state networks // Reliability Engineering & System Safety, Volume 216, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2021.107917>
29. *Родионов А.С.* Можно ли добиться дальнейшего ускорения расчета характеристик связности случайного графа? // Проблемы информатики. 2022. № 4. С. 39–52. <https://doi.org/10.24412/2073-0667-2022-4-39-52>
30. *Abraham J.A.* An improved algorithm for network reliability // IEEE Trans Reliab R-28 (1979), 58–61.
31. *Locks M.O.* A minimizing algorithm for sum of disjoint products // IEEE Trans Reliab R-36 (1987), 445–453.
32. *Wilson J.M.* An improved minimizing algorithm for sum of disjoint products // IEEE Trans Reliab 39 (1990), 42–45.
33. *Beichelt F., Spross L.* An improved Abraham-method for generating disjoint sums // IEEE Trans Reliab R-36 (1987), 70–74.
34. *Beichelt F., Spross L.* Comment on “An improved Abraham-method for generating disjoint sums” // IEEE Trans Reliab 38 (1989), 422–424.
35. *Heidtmann K.D.* Smaller sums of disjoint products by subproduct inversion // IEEE Trans Reliab 38 (1989), 305–311.
36. *Gomes T., Craveirinha J.* An alternative method for calculating the probability of an union of events,  $\lambda\mu 13$  – ESREL 2002, Eur Conference System Dependability Saf, Dec Making Risk Managem, Lyon, France, Vol. 2, 19–21 March 2002, pp. 426–430.
37. *Батенков К.А.* Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. № 5. С. 1093–1118.
38. *Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б.* Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий // Информационно-управляющие системы. 2021. № 6. С. 53–63. <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-6-53-63>

39. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Формирование сечений телекоммуникационных сетей для анализа их устойчивости с различными мерами связности // Информатика и автоматизация. 2021. № 2 (20). С. 371–406. <https://doi.org/10.15622/ia.2021.20.2.5>
40. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 59. <https://doi.org/10.17223/19988605/59/10>
41. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
42. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленной. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986.
43. <https://bbmaps.itu.int/bbmaps/>
44. Rec. G.911. Parameters and calculation methodologies for reliability and availability of fibre optic systems (Previously SSITT Recommendation). 1997-04. ITU-T. 39 p.
45. Ионикова Е.П., Шувалов В.П. Анализ методов обеспечения показателей надежности сетей PON и LR-PON. Часть I // Вестник Иркут. гос. техн. ун-та. 2018. Т. 22. № 1. С. 69–88. <https://dx.doi.org/10.21285/1814-3520-2018-1-69-88>
46. Шувалов В.П., Зеленцов Б.П., Квиткова И.Г. Модель надежности оптоволоконка в условиях деградации // Вестник СибГУТИ. 2022. № 3. С. 11–14.
47. Спиридонов Ю.С., Тамм Ю.А., БухВинер Н.Ф. Использование коэффициента искривления оптоволоконных линий при проектировании инфокоммуникационных сетей мегаполиса // Проектирование и технология электронных средств. 2017. № 2. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2022-16-3-56-61>
48. Chen J., Wosinska L., Mas Machuca C., Jaeger M. Cost vs. reliability performance study of fiber access network architectures // IEEE Commun. Magazine. 2010. V. 48. No. 2. P. 56–65. <https://doi.org/10.1109/MCOM.2010.5402664>
49. Wosinska L., Chen J. How much to pay for protection in fiber access networks: Cost and reliability tradeoff // IEEE 3rd International Symposium on Advanced Networks and Telecommunication Systems (ANTS). New Delhi, India. 2009. P. 1–3. <https://doi.org/10.1109/ANTS.2009.5409852>
50. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Методы формирования множеств состояний телекоммуникационных сетей для различных мер связности // Труды СПИИРАН. 2020. № 3 (19). С. 644–673.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.*

Поступила в редакцию 21.07.2021

После доработки 08.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023