

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЙ И ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИЕЙ¹

Рассматривается проблема восстановления состояний для класса линейных систем с постоянными неизвестными параметрами и перепараметризацией при действии внешних возмущений, формируемых известным генератором с неизвестными начальными условиями. Предлагается расширенный адаптивный наблюдатель состояний, в отличие от существующих подходов позволяющий решать задачи оценивания состояний и возмущений для систем, не представленных в канонической наблюдаемой форме. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы в рамках математического моделирования.

Ключевые слова: оценивание, идентификация, адаптивный наблюдатель, исчезающее возмущение, сходимое, перепараметризация.

DOI: 10.31857/S0005231023110077, EDN: OPGNVN

1. Введение

Одной из задач теории автоматического управления является восстановление неизмеряемых состояний полностью наблюдаемых линейных систем:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= C^T x(t) \end{aligned}$$

с неизвестными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^n$.

Для ее решения в отечественной и зарубежной литературе предложены различные наблюдатели, основанные на технике инвариантных эллипсоидов [1], методах сильной обратной связи [2, 3], разделения движений по темпам [3, 4] и теории параметрической идентификации [5, 6].

В отличие от других подходов наблюдатели, построенные на основе методов теории идентификации [5, 6], реализуют алгоритмы параметрической

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

адаптации и поэтому обычно требуют меньшего объема априорной информации о параметрах системы. Однако, начиная с базовых решений [7–10], класс систем, подходящих для синтеза адаптивных наблюдателей, традиционно ограничивается моделями в канонической форме наблюдаемости:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0 \xi(t) + \psi_a y(t) + \psi_b u(t) = A_a \xi(t) + \psi_b u(t), \\ y(t) &= C_0^T \xi(t), \end{aligned}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_n & I_{n-1} \\ & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad A_a = \begin{bmatrix} \psi_a & I_{n-1} \\ & 0_{n-1}^T \end{bmatrix},$$

$$\psi_a = \begin{bmatrix} -a_{n-1} \\ -a_{n-2} \\ \vdots \\ -a_0 \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где ψ_a и ψ_b – параметры характеристических полиномов линейного оператора

$$W_{uy}(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

и связаны с матрицами модели (1.1) через матрицу подобия T :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \psi_a &= T A T^{-1} C_0, \quad \psi_b = T B, \quad C_0^T = C^T T^{-1}, \\ \mathcal{O}_n &= \mathcal{O} [0_{1 \times (n-1)} \quad 1]^T, \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{bmatrix} C & A^T C & \dots & (A^{n-1})^T C \end{bmatrix}^T, \quad T^{-1} = [A^{n-1} \mathcal{O}_n \quad A^{n-2} \mathcal{O}_n \quad \dots \quad \mathcal{O}_n].$$

Дело в том, что по измеряемому управлению $u(t)$ и выходу $y(t)$ однозначно идентифицируемы параметры только данной формы пространства состояний [5, с. 269]. Состояния $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ модели (1.2) являются виртуальными и связаны с физическими координатами объекта $x(t) \in \mathbb{R}^n$ через неособое преобразование $\xi(t) = T x(t)$.

Поэтому оценки $\hat{\xi}(t)$, формируемые классическими адаптивными наблюдателями состояний [5, 6] в форме $(\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t))$ – оценки параметров (1.3), L – матрица коррекции, а конкретные виды функций $f_a(\cdot)$, $f_b(\cdot)$, $f_v(\cdot)$ определены в [5, 6]):

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= A_0 \hat{\xi}(t) + \hat{\psi}_a(t) y(t) + \hat{\psi}_b(t) u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)) + v(t), \\ \hat{y}(t) &= C_0^T \hat{\xi}(t), \\ \dot{\hat{\psi}}_a(t) &= f_a(u, y, \hat{y}, \hat{\psi}_a), \\ \dot{\hat{\psi}}_b(t) &= f_b(u, y, \hat{y}, \hat{\psi}_b), \\ \text{Re} \{ \lambda_i (A_0 + L C^T) \} &< 0, \\ v(t) &= f_v(u, y, \hat{\psi}_a, \hat{\psi}_b) \quad \text{или} \quad v(t) = 0_n, \end{aligned}$$

не только не совпадают с $x(t)$, но и оказываются бесполезными, например, для использования в задачах диагностики отказов, мониторинга и регистрации неизмеряемых переменных технологических процессов, построения и онлайн настройки цифровых двойников и решения других прикладных задач.

Решение данной проблемы заключается в идентификации вместе с параметрами ψ_a и ψ_b матрицы линейного подобия T . Для одного специального класса линейных систем в [7] предложен алгоритм, формирующий оценку $\hat{T}(t)$ на основе оценок $\hat{\psi}_a(t)$ и $\hat{\psi}_b(t)$. В общем случае отображение $\hat{T}(t) = f_T(\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t))$ может быть вырожденным при определенных значениях оценок $\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t)$ (см. раздел VIII из [7]). В более поздних работах [10–12], посвященных развитию методов синтеза адаптивных наблюдателей (и даже в базовых книгах по адаптивным наблюдателям линейных систем [5, 6]), насколько известно авторам, проблема оценивания с помощью адаптивных наблюдателей физических состояний $x(t)$ и идентификации матрицы линейного подобия T более не затрагивалась.

В недавней работе [13] вместо идентификации матрицы линейного подобия предложен новый подход к адаптивному восстановлению физических состояний линейных систем. Предлагается перепараметризовать матрицы системы (1.1) относительно некоторых физических параметров $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ (такое переобозначение всегда возможно, если модель (1.1) получена непосредственно на основании законов математической физики — Кирхгофа, Эйлера–Лагранжа и пр.):

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) = \Phi^T(x, u)\Theta_{AB}(\theta), \\ y(t) &= C^T x(t), \end{aligned}$$

и с помощью переобозначений $\psi_a := \psi_a(\theta)$, $\psi_b := \psi_b(\theta)$ также учесть зависимость параметров модели (1.1) от θ .

Учет перепараметризации позволяет связать матрицы моделей (1.1) и (1.2) не через преобразование подобия, а через некоторые новые функциональные преобразования вида $(\theta = \mathcal{F}(\psi_{ab})$ — обратная функция, $\mathcal{L}_{ab} \in \mathbb{R}^{n_\theta \times 2n}$ — матрица, задающая некоторое линейное преобразование, обеспечивающее $\dim\{\psi_{ab}\} = \dim\{\theta\}$)

$$\begin{aligned} \Theta_{AB}(\theta) &= (\Theta_{AB} \circ \mathcal{F})(\psi_{ab}), \\ \psi_{ab}(\theta) &= \mathcal{L}_{ab} \begin{bmatrix} \psi_a(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \end{aligned}$$

что открывает широкие возможности для проектирования адаптивных наблюдателей физических состояний $x(t)$.

В [13] показано, что при выполнении условия

$$(1.6) \quad \det^2 \{ \nabla_\theta \psi_{ab}(\theta) \} > 0, \quad \psi_{ab}(\theta) = \mathcal{L}_{ab} \begin{bmatrix} \psi_a(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

существования обратной функции $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$, а также полиномиальной зависимости $\psi_{ab}(\theta)$ и $\Theta_{AB}(\theta)$ от θ оказывается возможно без идентификации параметров $\psi_{ab}(\theta)$ и θ исключительно по измеряемым сигналам $y(t), u(t)$ и известному вектору C получить регрессионные уравнения (где $\mathcal{Y}_{AB}(t), \mathcal{Y}_L(t), \mathcal{M}_{AB}(t), \mathcal{M}_L(t)$ – измеряемые сигналы)

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{AB}(t) &= \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta_{AB}(\theta), \\ \mathcal{Y}_L(t) &= \mathcal{M}_L(t)L(\theta)\end{aligned}$$

и, как следствие, реализовать адаптивный наблюдатель состояний системы (1.5) в следующей форме:

$$(1.7) \quad \begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \Phi^T(\hat{x}, u)\hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \dot{\hat{\Theta}}_{AB}(t) &= f_{\Theta_{AB}}(\mathcal{Y}_{AB}, \mathcal{M}_{AB}, \hat{\Theta}_{AB}), \\ \dot{\hat{L}}(t) &= f_L(\mathcal{Y}_L, \mathcal{M}_L, \hat{L}),\end{aligned}$$

где $\hat{L}(t)$ – оценка матрицы $L(\theta)$ такой, что $A(\theta) - L(\theta)C^T$ – гурвицева.

Другими словами, благодаря связи $\Theta_{AB}(\theta)$ и $\psi_{ab}(\theta)$, через физические параметры θ при выполнении условия (1.6) в соответствии с [13] оказывается возможно идентифицировать $\Theta_{AB}(\theta), L(\theta)$, причем без непосредственной идентификации θ или $\psi_{ab}(\theta)$. В отличие от (1.4) наблюдатель (1.7) позволяет формировать оценки физических координат $x(t)$, а в отличие от [7] – применим для более широкого класса систем и не требует выполнения промежуточной идентификации параметров $\psi_{ab}(\theta)$.

Целью данной работы является расширение результатов [13] на класс линейных систем с перепараметризацией при действии на уравнение состояний внешних возмущений, формируемых известным генератором с неизвестными начальными условиями.

Основные определения

Определение неоднородного отображения, условия постоянного возбуждения регрессора и свойство фильтрации Крейссельмейера [10], приведенные ниже, будут использованы в данной работе².

Определение 1. Отображение $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} \geq 1$, если существуют $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times n_{\mathcal{F}}}, \Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \overline{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\omega(t) \in \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}} \times n_\theta}$ и отображение $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ такие, что для любых $\omega(t) \in \mathbb{R}$ и $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ разрешимо функциональное уравнение

$$(1.8) \quad \Pi_{\mathcal{F}}(\omega)\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)\theta),$$

так что

$$\begin{aligned}\det\{\Pi_{\mathcal{F}}(\omega)\} &\geq \omega^{\ell_{\mathcal{F}}}(t), \\ \Xi_{\mathcal{F}ij}(\omega) &= c_{ij}\omega^{\ell_{ij}}(t), \quad \overline{\Xi}_{\mathcal{F}ij}(\omega) = c_{ij}\omega^{\ell_{ij}-1}(t), \\ c_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad \ell_{ij} \geq 1.\end{aligned}$$

² Для сокращения записи зависимость от θ или t далее может опускаться.

Например, $\mathcal{F}(\theta) = \text{col}\{\theta_1\theta_2, \theta_1\}$ с $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega^2, \omega\}$, $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega, \omega\}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} = 3$.

Основное свойство $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)\theta = \bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\omega(t)\theta$ из определения 1 позволяет с помощью известной функции $\mathcal{Y}_{\theta}(t) = \omega(t)\theta$ параметризовать линейное регрессионное уравнение относительно $\mathcal{F}(\theta)$ следующим образом:

$$\Pi_{\mathcal{F}}(\omega)\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\mathcal{Y}_{\theta}),$$

$$\begin{bmatrix} \omega^2(t) & 0 \\ 0 & \omega(t) \end{bmatrix} \mathcal{F}(\theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{1\theta}(t)\mathcal{Y}_{2\theta}(t) \\ \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \end{bmatrix}.$$

Элементы отображения $\mathcal{F}(\theta)$ удовлетворяют определению 1, если они представляют собой многочлены или мономы от θ , а также некоторые из иррациональных функций.

О п р е д е л е н и е 2. Регрессор $\bar{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^n$ возбуждается постоянно ($\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$), если $\exists T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\forall t \geq t_0 \geq 0$ верно неравенство

$$(1.9) \quad \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau)\bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n,$$

где $\alpha > 0$ – степень возбуждения, I_n – единичная матрица.

Для определителя состояний устойчивого ($l > 0$) динамического фильтра

$$\dot{\varphi}(t) = -l\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)\bar{\varphi}^T(t), \quad \varphi(t_0) = 0_{n \times n},$$

верно следующее

Утверждение 1. а) Если $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, тогда для всех $t \geq t_0 + T$ выполняется неравенство

$$(1.10) \quad \Delta(t) = \det\{\varphi(t)\} \geq \alpha^n e^{-nlT} = \Delta_{\min} > 0.$$

б) Если существует $t_e \in [t_0, \infty)$, такое что для всех $t \geq t_e$ верно (1.10), то $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$.

Доказательство утверждения 1 получено в [14].

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующий класс SISO-систем с перепараметризацией при действии ограниченного внешнего возмущения:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + D(\theta)\delta(t) = \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB}(\theta), \\ y(t) &= C^T x(t), \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^T(x, u, \delta) &= [I_n \otimes x^T(t) \quad I_n \otimes u^T(t) \quad I_n \otimes \delta^T(t)] \mathcal{D}_{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n_{\Theta}}, \\ \Theta_{AB}(\theta) &= \mathcal{L}_{\Phi}[\text{vec}^T(A^T(\theta)) \quad B^T(\theta) \quad D^T(\theta)]^T \in \mathbb{R}^{n_{\Theta}}, \end{aligned}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ – физические состояния системы с неизвестными начальными условиями x_0 , $\delta(t)$ – внешнее ограниченное возмущение, $\Theta_{AB} \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – неизвестные векторы, такие что $n_\Theta \geq n_\theta$, $\mathcal{D}_\Phi \in \mathbb{R}^{(n^2+2n) \times n_\Theta}$, $\mathcal{L}_\Phi \in \mathbb{R}^{n_\Theta \times (n^2+2n)}$ – известные матрицы, вектор $C \in \mathbb{R}^n$ и отображение $\Theta_{AB} : \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\Theta}$ известны. Для измерения доступны только управление $u(t) \in \mathbb{R}$ и выход $y(t) \in \mathbb{R}$.

Относительно управления и возмущения принимаются выполненными следующие допущения.

Допущение 1. Управление $u(t)$ для всех $t \geq t_0$ гарантирует существование и ограниченность всех траекторий системы (2.1).

Допущение 2. Возмущение $\delta(t)$ непрерывно и формируется устойчивым генератором с постоянными параметрами:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= \mathcal{A}_\delta x_\delta(t), \quad x_\delta(t_0) = x_{\delta 0}, \\ \delta(t) &= h_\delta^\top x_\delta(t), \end{aligned}$$

где $x_\delta(t) \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ – состояния генератора с неизвестными начальными условиями $x_{\delta 0}$, $h_\delta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$, $\mathcal{A}_\delta(t) \in \mathbb{R}^{n_\delta \times n_\delta}$ – известные вектор и матрица, составляющие наблюдаемую пару $(h_\delta^\top, \mathcal{A}_\delta)$.

На основе двойственности задач наблюдения и управления, а также следуя результатам теории обобщенного модального синтеза [15, 16], выдвинем допущение о выполнении условий существования вектора $L(\theta) \in \mathbb{R}^n$, приводящего алгебраический спектр $\sigma\{\cdot\}$ матрицы $A^\top(\theta) - CL^\top(\theta)$ к желаемому.

Допущение 3. Пара $(A^\top(\theta), C)$ управляема, существует и известна матрица состояний $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ модального генератора

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= \Gamma \chi(t), \\ v(t) &= B^\top(\theta) \chi(t) \end{aligned}$$

такая, что пара $(B^\top(\theta), \Gamma)$ наблюдаема и $\sigma\{A(\theta)\} \cap \sigma\{\Gamma\} = 0$.

Выполнение допущений 1–3 позволяет ввести наблюдатель состояний и возмущений:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \Phi^\top \left(\hat{x}, u, \hat{\delta} \right) \hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t) (\hat{y}(t) - y(t)), \\ \hat{\delta}(t) &= h_\delta^\top \Phi_\delta(t) \hat{x}_{\delta 0}(t), \\ \dot{\Phi}_\delta(t) &= \mathcal{A}_\delta \Phi_\delta(t), \quad \Phi_\delta(t_0) = I_{n_\delta}. \end{aligned}$$

Требуется дополнить наблюдатель (2.4) законами идентификации, обеспечивающими выполнение предельных равенств

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| &= 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\delta}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\kappa}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \\ \tilde{\kappa}(t) &= [\tilde{x}_{\delta 0}^\top(t) \quad \tilde{\Theta}_{AB}^\top(t) \quad \tilde{L}^\top(t)]^\top, \end{aligned}$$

где $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ — ошибка восстановления состояния системы (2.1), $\tilde{\delta}(t) = \hat{\delta}(t) - \delta(t)$ — ошибка восстановления возмущения, $\tilde{\Theta}_{AB}(t) = \hat{\Theta}_{AB}(t) - \Theta_{AB}(\theta)$ — ошибка оценки параметров системы (2.1), $\tilde{x}_{\delta 0}(t) = \hat{x}_{\delta 0}(t) - x_{\delta 0}$ — ошибка оценки начальных условий генератора (2.2), $\tilde{L}(t) = \hat{L}(t) - L(\theta)$ — ошибка оценки $L(\theta)$.

Замечание 1. Допущения 1 и 3 являются стандартными соответственно в задачах адаптивного наблюдения [10–12] и модального синтеза [15, 16]. Допущение 2 ограничивает класс допустимых внешних возмущений.

3. Предпосылки и предварительные преобразования

Прежде чем представить решение задачи (2.5), исследуем идентифицируемость неизвестных параметров κ по измерениям $y(t)$ и $u(t)$. Для этого с помощью преобразований (1.3) представим систему (2.1) в форме (1.2):

$$(3.1) \quad \dot{\xi}(t) = A_0 \xi(t) + \psi_a(\theta) y(t) + \psi_b(\theta) u(t) + \psi_d(\theta) \delta(t),$$

$$(3.2) \quad y(t) = C^T x(t) = C_0^T \xi(t), \quad \xi(t_0) = T x_0 = \xi_0,$$

где $\psi_d(\theta) = TD(\theta)$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ — виртуальные неизмеряемые координаты состояния канонической наблюдаемой формы пространства состояний, вектор $C_0 \in \mathbb{R}^n$ и отображения $\psi_a, \psi_b, \psi_d: \mathbb{R}^{n\theta} \rightarrow \mathbb{R}^n$ известны.

Для неизвестных параметров $\eta(\theta) = \text{col}\{\psi_a(\theta), \psi_b(\theta)\}$ уравнения (3.1) при выполнении допущений 1 и 2 оказывается возможно выполнить следующую параметризацию.

Лемма 1. *Неизвестные параметры $\eta(\theta)$ удовлетворяют линейной регрессионной модели³*

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t) \eta(\theta) + \epsilon(t), \\ \mathcal{Y}(t) &= k(t) \cdot \text{adj}\{\varphi(t)\} q(t), \quad \Delta(t) = k(t) \cdot \det\{\varphi(t)\}, \end{aligned}$$

где

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{q}(t) &= -k_2 q(t) + \bar{\varphi}_f(t)(\bar{q}(t) - k_1 \bar{q}_f(t) - \beta^T(F_f(t) + l y_f(t))), \quad q(t_0) = 0_{2n}, \\ \dot{\varphi}(t) &= -k_2 \varphi(t) + \bar{\varphi}_f(t) \bar{\varphi}_f^T(t), \quad \varphi(t_0) = 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{q}}_f(t) &= -k_1 \bar{q}_f(t) + \bar{q}(t), \quad \bar{q}_f(t_0) = 0, \\ \dot{\bar{\varphi}}_f(t) &= -k_1 \bar{\varphi}_f(t) + \bar{\varphi}(t), \quad \bar{\varphi}_f(t_0) = 0_{2n}, \\ \dot{F}_f(t) &= -k_1 F_f(t) + F(t), \quad F_f(t_0) = 0_{n\delta}, \\ \dot{y}_f(t) &= -k_1 y_f(t) + y(t), \quad y_f(t_0) = 0, \end{aligned}$$

³ Без потери общности далее экспоненциально затухающее слагаемое $\epsilon(t)$ не учитывается.

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad \bar{q}(t) &= y(t) - C_0^T z(t), \quad \bar{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}^T(t)C_0 + N^T(t)\beta \\ \dot{P}^T(t)C_0 + H^T(t)\beta \end{bmatrix}, \\
\dot{z}(t) &= A_K z(t) + Ky(t), \quad z(t_0) = 0_n, \\
\dot{\Omega}(t) &= A_K \Omega(t) + I_n y(t), \quad \Omega(t_0) = 0_{n \times n}, \\
\dot{P}(t) &= A_K P(t) + I_n u(t), \quad P(t_0) = 0_{n \times n}, \\
\dot{F}(t) &= GF(t) + Gly(t) - lC_0^T \dot{z}(t), \quad F(t_0) = 0_{n_\delta}, \\
\dot{H}(t) &= GH(t) - lC_0^T \dot{P}(t), \quad H(t_0) = 0_{n_\delta \times n}, \\
\dot{N}(t) &= GN(t) - lC_0^T \dot{\Omega}(t), \quad N(t_0) = 0_{n_\delta \times n},
\end{aligned}$$

и при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ для всех $t \geq t_0 + T$ выполняется $\Delta_{\max} \geq \Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$.

Здесь $\epsilon(t)$ – экспоненциально затухающее слагаемое, $k(t) \geq k_{\min} > 0$ – коэффициент усиления (может быть нестационарным), $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – постоянные фильтров, $A_K = A_0 - KC_0^T$, G – устойчивые матрицы соответствующих размерностей, вектор $l \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ такой, что пара (G, l) управляема, а G выбрана из условия $\sigma \{A_\delta\} \cap \sigma \{G\} = 0$, параметр $\beta \in \mathbb{R}^{n_\delta}$ задается решением системы уравнений

$$\begin{aligned}
M_\delta A_\delta - GM_\delta &= l\bar{h}_\delta^T, \quad \bar{h}_\delta^T = h_\delta^T A_\delta, \\
\beta &= \bar{h}_\delta^T M_\delta^{-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

В общем случае поставленная цель (2.5) недостижима, поскольку по измеряемым сигналам $u(t)$, $y(t)$ на основании параметризации (3.3) при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ идентифицируемы [5] только параметры ψ_a , ψ_b характеристических полиномов передаточной функции $W_{uy}(s) = C^T(sI_n - A(\theta))^{-1}B(\theta)$. Однако в важном для приложений частном случае и в соответствии с постановкой задачи параметры Θ_{AB} , ψ_d , L известным образом нелинейно зависят от физических параметров θ . В свою очередь, параметры ψ_a , ψ_b характеристических полиномов передаточной функции $W_{uy}(s)$ тоже нелинейно зависят от θ . Поэтому при выполнении условия

$$(3.7) \quad \det^2 \{ \nabla_\theta \psi_{ab}(\theta) \} > 0, \quad \psi_{ab}(\theta) = \mathcal{L}_{ab} \eta(\theta) \in \mathbb{R}^{n_\theta},$$

по теореме об обратной функции [17] существует обратное преобразование $\theta = \mathcal{F}(\psi_{ab})$, а значит, становится возможно: *i*) рассчитать параметры системы Θ_{AB} и наблюдателя L по параметрам ψ_{ab} , *ii*) построить оценки $\hat{x}_{\delta 0}(t)$ начальных условий генератора (2.2), *iii*) реализовать адаптивный наблюдатель (2.4), формирующий оценки $\hat{x}(t)$ и $\hat{\delta}(t)$.

В данной работе для разрешимости задачи восстановления неизмеряемых состояний $x(t)$ и внешнего возмущения $\delta(t)$ при выполнении условия (3.7) дополнительно выдвигаются следующие предположения относительно $\psi_{ab}(\theta)$, $\Theta_{AB}(\theta)$, и $\psi_d(\theta)$.

Предположение 1. Существуют неоднородные в терминах (1.8) отображения $\mathcal{G}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{S}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$, такие что:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{S}(\psi_{ab}) &= \mathcal{G}(\psi_{ab}) \mathcal{F}(\psi_{ab}) = \mathcal{G}(\psi_{ab}) \theta, \\ \Pi_\theta(\omega) \mathcal{G}(\psi_{ab}) &= \mathcal{T}_\mathcal{G}(\Xi_\mathcal{G}(\omega) \psi_{ab}), \\ \Pi_\theta(\omega) \mathcal{S}(\psi_{ab}) &= \mathcal{T}_\mathcal{S}(\Xi_\mathcal{S}(\omega) \psi_{ab}), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{G}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{G} \times n_\theta}$, $\Xi_\mathcal{S}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{S} \times n_\theta}$, $\det\{\Pi_\theta(\omega)\} \geq \omega^{\ell_\theta}(t)$, $\text{rank}\{\mathcal{G}(\psi_{ab})\} = n_\theta$, $\ell_\theta \geq 1$, $\mathcal{T}_\mathcal{G}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{T}_\mathcal{S}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$ и все отображения известны.

Предположение 2. Существуют неоднородные в терминах (1.8) отображения $\mathcal{X}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{Z}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\theta}$, такие что:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{Z}(\theta) &= \mathcal{X}(\theta) \Theta_{AB}(\theta), \\ \Pi_\Theta(\omega) \mathcal{X}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{X}(\Xi_\mathcal{X}(\omega) \theta), \\ \Pi_\Theta(\omega) \mathcal{Z}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{Z}(\Xi_\mathcal{Z}(\omega) \theta), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{X}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{X} \times n_\theta}$, $\Xi_\mathcal{Z}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{Z} \times n_\theta}$, $\det\{\Pi_\Theta(\omega)\} \geq \omega^{\ell_\Theta}(t)$, $\text{rank}\{\mathcal{X}(\theta)\} = n_\Theta$, $\ell_\Theta \geq 1$, $\mathcal{T}_\mathcal{X}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\Theta \times n_\Theta}$, $\mathcal{T}_\mathcal{Z}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\Theta}$ и все отображения известны.

Предположение 3. Существуют неоднородные в терминах (1.8) отображения $\mathcal{W}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}: \mathbb{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, такие что:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(\theta) &= \mathcal{R}(\theta) \psi_d(\theta), \\ \Pi_{\psi_d}(\omega) \mathcal{R}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{R}(\Xi_\mathcal{R}(\omega) \theta), \\ \Pi_{\psi_d}(\omega) \mathcal{W}(\theta) &= \mathcal{T}_\mathcal{W}(\Xi_\mathcal{W}(\omega) \theta), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{W}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{W} \times n_\theta}$, $\Xi_\mathcal{R}(\omega) \in \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{R} \times n_\theta}$, $\det\{\Pi_{\psi_d}(\omega)\} \geq \omega^{\ell_{\psi_d}}(t)$, $\text{rank}\{\mathcal{R}(\theta)\} = n$, $\ell_{\psi_d} \geq 1$, $\mathcal{T}_\mathcal{R}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{T}_\mathcal{W}: \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{W}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и все отображения известны.

Предположения 1–3 выполняются, если соответствующие отображения заданы с использованием элементарных алгебраических функций в полиномиальном виде. Например, для векторов $\Theta_{AB}(\theta) = \text{col}\left\{\theta_2^2 \theta_1^2 + (\theta_2 + \theta_1)^3, \theta_2\right\}$ и $\psi_{ab}(\theta) = \text{col}\left\{\theta_1 \theta_2 + \theta_2^2, \theta_2 + \theta_1\right\}$ преобразования соответственно из (3.9) и (3.8) примут вид

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_\mathcal{X}(\Xi_\mathcal{X}(\mathcal{M}_\theta) \theta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_\theta^4 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_\mathcal{Z}(\Xi_\mathcal{Z}(\mathcal{M}_\theta) \theta) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_\theta^4 \theta_2^2 \theta_1^2 + \mathcal{M}_\theta^4 (\theta_2 + \theta_1)^3 \\ \mathcal{M}_\theta \theta_2 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{S}(\psi_{ab}) &= \begin{bmatrix} \psi_{1ab} \\ \psi_{2ab}^2 - \psi_{1ab} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}(\psi_{ab}) = \begin{bmatrix} \psi_{2ab} & 0 \\ 0 & \psi_{2ab} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}_\mathcal{G}(\Xi_\mathcal{G}(\Delta) \psi_{ab}) &= \begin{bmatrix} \Delta \psi_{2ab} & 0 \\ 0 & \Delta^2 \psi_{2ab} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_\mathcal{S}(\Xi_\mathcal{S}(\Delta) \psi_{ab}) = \begin{bmatrix} \psi_{1ab} \Delta \\ \Delta^2 \psi_{2ab}^2 - \Delta^2 \psi_{1ab} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Основной смысл предположений 1–3 состоит в возможности в силу свойства $\Xi_{(\cdot)}(\omega) = \bar{\Xi}_{(\cdot)}(\omega)\omega(t)$ параметризации линейных регрессионных уравнений относительно неизвестных параметров θ , $\Theta_{AB}(\theta)$, $\psi_d(\theta)$ с помощью измеряемых сигналов $\mathcal{Y}_{ab}(t) = \mathcal{L}_{ab}\mathcal{Y}(t) = \Delta(t)\psi_{ab}(\theta)$ и $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$ соответственно.

Например, (3.11) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{2\theta}^2\mathcal{Y}_{1\theta}^2 + \mathcal{M}_\theta(\mathcal{Y}_{2\theta} + \mathcal{Y}_{1\theta})^3 \\ \mathcal{Y}_{2\theta} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{2ab} & 0 \\ 0 & \Delta\mathcal{Y}_{2ab} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{1ab} \\ \mathcal{Y}_{2ab} - \Delta\mathcal{Y}_{1ab} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а значит, для прямого измерения доступны линейные регрессионные уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) &= \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\Theta_{AB}(\theta), \\ \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) &= \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\theta, \end{aligned}$$

где сигналы $\mathcal{Y}_\theta(t)$ и $\mathcal{M}_\theta(t)$ вычислены по второму уравнению следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\theta(t) &= \text{adj}\{\mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}\mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}), \\ \mathcal{M}_\theta(t) &= \det\{\mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}. \end{aligned}$$

Требование (3.7) и предположения 1–3 хотя и ограничительны с математической точки зрения, но являются практико-ориентированными и выполняются для большого числа моделей реальных технических систем.

4. Основной результат

Будем считать выполненными условия разрешимости (3.7)–(3.10) и запишем уравнения в отклонениях между (2.4) и (2.1), $\hat{\delta}(t)$ и $\delta(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) - \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB} = \\ &= \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\hat{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) - \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB} \pm \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\Theta_{AB} = \\ &= \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\tilde{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) - \Phi^T(x, u, \delta)\Theta_{AB} + \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\Theta_{AB} = \\ (4.1) \quad &= A(\theta)\tilde{x}(t) + D(\theta)\tilde{\delta}(t) + \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\tilde{\Theta}_{AB}(t) - \hat{L}(t)\tilde{y}(t) \pm L(\theta)\tilde{y}(t) = \\ &= A_m\tilde{x}(t) + D(\theta)h_\delta^T\Phi_\delta(t)\tilde{x}_{\delta 0}(t) + \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta})\tilde{\Theta}_{AB}(t) - \tilde{L}(t)\tilde{y}(t) = \\ &= A_m\tilde{x}(t) + \phi^T(t)\tilde{\kappa}(t), \\ \tilde{\delta}(t) &= h_\delta^T\Phi_\delta(t)\hat{x}_{\delta 0} - h_\delta^T\Phi_\delta(t)x_{\delta 0} = h_\delta^T\Phi_\delta(t)\tilde{x}_{\delta 0}(t), \end{aligned}$$

где

$$\phi^T(t) = \left[D(\theta) h_\delta^T \Phi_\delta(t) \quad \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta}) \quad -\tilde{y}(t)I_n \right]$$

и $A_m = A(\theta) - L(\theta)C^T$ – гурвицева по допущению 3 матрица.

Для достижение цели (2.5) в соответствии с уравнениями (4.1) требуется построить закон идентификации, гарантирующий экспоненциальную сходимость к нулю ошибки $\tilde{\kappa}(t)$ и экспоненциальную устойчивость положения равновесия ошибки наблюдения $\tilde{x}(t)$. Таким образом, задача восстановления возмущения $\delta(t)$ и неизмеряемых состояний $x(t)$ системы (2.1) сводится к задаче параметрической идентификации. Задача параметрической идентификации, в свою очередь, может быть разрешена при выполнении предпосылок (3.7)–(3.10). Чтобы построить закон идентификации, гарантирующий достижение цели (2.5), на основании выдвинутых предположений 1–3 и результатов леммы 1 сначала выполним параметризацию статического регрессионного уравнения относительно κ .

Лемма 2. Вектор неизвестных параметров κ удовлетворяет линейному регрессионному уравнению

$$\mathcal{Y}_\kappa(t) = \mathcal{M}_\kappa(t)\kappa,$$

$$(4.2) \quad \mathcal{Y}_\kappa(t) = \text{adj} \left\{ \text{blkdiag} \left\{ \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)I_{n_\delta}, \mathcal{M}_{AB}(t)I_{n_\Theta}, \mathcal{M}_L(t)I_n \right\} \right\} \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) \\ \mathcal{Y}_{AB}(t) \\ \mathcal{Y}_L(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}_\kappa(t) = \det \left\{ \text{blkdiag} \left\{ \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)I_{n_\delta}, \mathcal{M}_{AB}(t)I_{n_\Theta}, \mathcal{M}_L(t)I_n \right\} \right\},$$

где:

1) регрессионная функция $\mathcal{Y}_{AB}(t) = \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta(\theta)$ с учетом вспомогательных вычислений

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\theta(t) &= \text{adj} \left\{ \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) \right\} \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}), \\ \mathcal{M}_\theta(t) &= \det \left\{ \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) \right\} \end{aligned}$$

определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{AB}(t) &= \text{adj} \left\{ \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) \right\} \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta), \\ \mathcal{M}_{AB}(t) &= \det \left\{ \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) \right\}. \end{aligned}$$

2) регрессионная функция $\mathcal{Y}_L(t) = \mathcal{M}_L(t)L(\theta)$ вычислена по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_L(t) &= \text{adj} \left\{ \mathcal{T}_P(\bar{\Xi}_P(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) \right\} \mathcal{T}_Q(\bar{\Xi}_Q(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}), \\ \mathcal{M}_L(t) &= \det \left\{ \mathcal{T}_P(\bar{\Xi}_P(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_P(\bar{\Xi}_P(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) &= \text{vec}^{-1} \left\{ \mathcal{M}_{AB} \text{adj} \left\{ I_n \otimes \text{vec}^{-1} \left(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{M}_{AB} \Gamma^T \otimes I_n \right\} \text{vec} \left(C(\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB})^T \right) \right\}^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_Q(\bar{\Xi}_Q(\mathcal{M}_{AB})\mathcal{Y}_{AB}) &= \\ &= \det \left\{ I_n \otimes \text{vec}^{-1} \left(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB} \right) - \mathcal{M}_{AB} \Gamma^T \otimes I_n \right\} \mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}. \end{aligned}$$

3) регрессионная функция $\mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) = \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}$ с учетом выражений

$$\begin{aligned} p(t) &= \Delta(t)\bar{q}(t) - C_0^T \Omega(t) \mathcal{L}_a \mathcal{Y}(t) - C_0^T P(t) \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t), \\ \mathcal{Y}_{\psi_d}(t) &= \text{adj} \{ \mathcal{T}_{\mathcal{R}} (\bar{\Xi}_{\mathcal{R}} (\mathcal{M}_{\theta}) \mathcal{Y}_{\theta}) \} \mathcal{T}_{\mathcal{W}} (\bar{\Xi}_{\mathcal{W}} (\mathcal{M}_{\theta}) \mathcal{Y}_{\theta}), \\ \mathcal{M}_{\psi_d}(t) &= \det \{ \mathcal{T}_{\mathcal{R}} (\bar{\Xi}_{\mathcal{R}} (\mathcal{M}_{\theta}) \mathcal{Y}_{\theta}) \} \end{aligned}$$

и фильтраций

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= A_K V(t) + (h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n), \quad V(t_0) = 0_{n \times n n_{\delta}}, \\ \dot{p}_f(t) &= -k_2 \varphi(t) + \Delta(t) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t))^T V^T(t) C_0 \mathcal{M}_{\psi_d}(t) p(t), \quad p_f(t_0) = 0_{n_{\delta}}, \\ \dot{V}_f(t) &= -k_2 V_f(t) + \Delta^2(t) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t))^T V^T(t) C_0 \times \\ &\quad \times C_0^T V(t) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t)), \quad V_f(t_0) = 0_{n_{\delta} \times n_{\delta}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

задана следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) &= \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}, \\ \mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) &= \text{adj} \{ V_f(t) \} p_f(t), \quad \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t) = \det \{ V_f(t) \}, \end{aligned}$$

а при выполнении условий $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ для всех $t \geq t_0 + T$ верно неравенство $|\mathcal{M}_{\kappa}(t)| \geq \underline{\mathcal{M}}_{\kappa} > 0$.

Доказательство леммы 3 и определения матриц \mathcal{L}_{AT} , \mathcal{L}_B , \mathcal{L}_a , \mathcal{L}_b приведены в Приложении.

Имея регрессионное уравнение (4.2) со скалярным регрессором $\mathcal{M}_{\kappa}(t)$, отделенным от нуля для всех $t \geq t_0 + T$, с использованием результатов [13, 18] возможно построить закон идентификации, обеспечивающий достижение цели (2.5).

Теорема 1. Пусть известен вектор $D_{\max} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\|D(\theta)\| \leq \|D_{\max}\|$, тогда при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ и $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$ закон оценки

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\kappa}}(t) &= \dot{\tilde{\kappa}}(t) = -\gamma(t) \mathcal{M}_{\kappa}(t) (\mathcal{M}_{\kappa}(t) \hat{\kappa}(t) - \mathcal{Y}_{\kappa}(t)) = -\gamma(t) \mathcal{M}_{\kappa}^2(t) \tilde{\kappa}(t), \\ \gamma(t) &:= \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta(t) < \rho \in [\Delta_{\min}; \Delta_{\max}], \\ \frac{\gamma_0 \lambda_{\max} (\phi_{\max}(t) \phi_{\max}^T(t)) + \gamma_1}{\mathcal{M}_{\kappa}^2(t)} & \text{иначе,} \end{cases} \\ \phi_{\max}^T(t) &= \begin{bmatrix} D_{\max} h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) & \Phi^T(\hat{x}, u, \hat{\delta}) & -\tilde{y}(t) I_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

обеспечивает следующие свойства:

- 1) $\forall t \geq t_0 [\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{\kappa}^T(t)]^T \in L_\infty$;
- 2) $\forall t \geq t_0 + T$ ошибка $[\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{\kappa}^T(t)]^T$ экспоненциально сходится к нулю со скоростью, минимальное значение которой прямо пропорционально $\gamma_1 > 0$.

Доказательство первой части теоремы осуществляется аналогично доказательству второй части теоремы 1 из [18], доказательство второй части теоремы с точностью до обозначений совпадает с доказательством теоремы 1 из [13].

Из результатов теоремы в силу ограниченности $h_\delta^T \Phi_\delta(t)$ следует экспоненциальная сходимость ошибки $\tilde{\delta}(t)$, что вместе с экспоненциальной сходимостью $[\tilde{x}^T(t) \quad \tilde{\kappa}^T(t)]^T$ свидетельствует о достижении поставленной цели (2.5).

Замечание 2. Результаты леммы 2 описывают процедуру преобразования регрессионного уравнения (3.3) со скалярным регрессором относительно параметров числителя и знаменателя передаточной функции $W_{uy}(s)$ в новое уравнение (4.2) относительно параметров наблюдателя (2.4). При таком пересчете операции деления на зависящие от времени сигналы не используются, идентификация промежуточных параметров $\eta(\theta)$, $\psi_{ab}(\theta)$ или θ не выполняется, а $\mathcal{Y}_\kappa(t)$ и $\mathcal{M}_\kappa(t)$ рассчитываются исключительно с помощью сигналов $\mathcal{Y}(t)$ и $\Delta(t)$, измеряемых в соответствии с результатами леммы 1.

Замечание 3. Условия экспоненциальной устойчивости из теоремы консервативны. На практике знание $D_{\max} \in \mathbb{R}^n$ и ρ , как и реализация процедуры вычисления собственного числа $\lambda_{\max}(\phi_{\max}(t)\phi_{\max}^T(t))$ не требуются, а цель (2.5) может быть достигнута при использовании любого достаточно большого постоянного коэффициента $\gamma \geq \left(\gamma_{\min} \sim \frac{1}{\mathcal{M}_\kappa^2(t)}\right) > 0$, мажорирующего $\lambda_{\max}(\phi_{\max}(t)\phi_{\max}^T(t))$.

5. Обсуждение результатов

В этом разделе приведем четыре дополнительных технических комментария к результатам, полученным в работе.

Комментарий 1. В соответствии с оценкой снизу из (П.48) регрессор $\mathcal{M}_\kappa(t)$ пропорционален степенной функции $\Delta^{\ell_\theta \ell_\psi n_\theta + \ell_\theta \ell_\psi n(n^3 + n) + n_\delta^2(2\ell_\theta \ell_\psi d + 2)}(t)$. Поэтому при $\Delta(t) \ll 1$ или $\Delta(t) \gg 1$ возможна вычислительная ликвидация возбуждения регрессора в соответствующей программной реализации:

$$\Delta(t) \ll 1 \Rightarrow \mathcal{M}_\kappa(t) \rightarrow 0 \text{ или } \Delta(t) \gg 1 \Rightarrow \mathcal{M}_\kappa(t) \rightarrow \infty,$$

т.е. $\mathcal{M}_\kappa(t)$ может быть настолько малым или большим числом, что является непригодными для машинного счета ввиду ограниченной разрядности регистров процессора (например, в Matlab/Simulink числа менее 10^{-309} и более 10^{309} считаются равными соответственно нулю и бесконечности).

Эта проблема не имеет отношения к теоретическим результатам работы, а связана исключительно с несовершенством существующих вычислительных устройств. Для предотвращения вычислительной ликвидации возбуждения регрессора следует выбирать нестационарный амплитудный модулятор $k(t)$ в соответствии с методом нормализации возбуждения регрессора:

$$(5.1) \quad k(t) \sim \frac{1}{\Delta(t)} \quad \text{или} \quad k(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta(t) < \rho \in [\Delta_{\min}; \Delta_{\max}], \\ \frac{1}{\Delta(t)} & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\text{или} \quad k(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } t < t_e \in [t_0; \infty), \\ \frac{1}{\Delta(t)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того, при реализации параметризации (4.2) на практике желательно выполнять умножение на амплитудный модулятор, аналогичный (5.1), после каждого умножения на союзную матрицу $\text{adj}\{\cdot\}$. Подробней проблема вычислительной ликвидации возбуждения регрессора обсуждалась в разделе 3.3 работы [18].

Комментарий 2. Существующие методы идентификации с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора не позволяют гарантировать параметрическую сходимость при наличии в параметризованном регрессионном уравнении даже экспоненциально затухающего возмущения [19].

Для решения этой проблемы в [20] предложено использовать интегральную фильтрацию с периодическим сбросом на заданном интервале времени. Метод [20] позволяет итеративно уменьшать оценку сверху на значение установившейся параметрической ошибки.

Альтернативный подход состоит в расширении задачи идентификации путем параметризации экспоненциально затухающего возмущения в виде линейной регрессии с измеряемым регрессором и неизвестными параметрами — неизменяемыми начальными условиями [11–13]. Этот подход позволяет обеспечить экспоненциальную сходимость параметрической ошибки к нулю при выполнении ослабленных требований к возбуждению регрессора, но применим только для возмущений, допускающих приведение к линейной регрессионной модели. Экспоненциально затухающее возмущение $\epsilon(t)$ из (3.3) не допускает такого представления.

Поэтому в этой работе в отличие от результатов [11–13] для достижения поставленной цели (2.5) вместо ослабленных условий требуется выполнение более строгого условия не исчезающего возбуждения регрессора (1.9), при выполнении которого допустимо не использовать фильтры с памятью из [11–13] и гарантировать экспоненциальную сходимость параметрической ошибки даже при наличии в используемой параметризации экспоненциально затухающего возмущения.

Ослабить требование постоянного возбуждения регрессора представляется возможным, используя вместо (3.4) следующий фильтр:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{q}(t) &= \int_{t_\epsilon}^t e^{-k_2\tau} \bar{\varphi}_f(\tau) (\bar{q}(\tau) - k_1 \bar{q}_f(\tau) - \beta^T (F_f(\tau) + l y_f(\tau))) d\tau, \quad q(t_\epsilon) = 0_{2n}, \\ \dot{\varphi}(t) &= \int_{t_\epsilon}^t e^{-k_2\tau} \bar{\varphi}_f(\tau) \bar{\varphi}_f^T(\tau) d\tau, \quad \varphi(t_\epsilon) = 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

где $t_\epsilon \gg t_0$ — известный момент времени начала фильтрации.

Если момент времени t_ϵ подобран из условия выполнения в (П.26) для всех $t \geq t_\epsilon$ условия $\varepsilon(t) = o(\varphi(t)\eta(\theta))$, а на интервале $[t_\epsilon, t_e]$ выполняется условие конечного возбуждения регрессора, то удастся обеспечить достижение поставленной цели (2.5) при ослабленном требовании к возбуждению регрессора. Подробней свойства расширенного наблюдателя при использовании параметризации с фильтрацией (5.2) изучены в [21].

Комментарий 3. Согласно теореме 1 предложенный наблюдатель (2.4) + (4.4) обеспечивает сходимость ошибки оценивания состояний к нулю только при выполнении условий постоянного возбуждения $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ и $(h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$. Поскольку сигнал $h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n$ известен для всех $t \in [t_0, \infty)$, то условие $(h_\delta^T \Phi_\delta(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ может быть проверено оффлайн — до непосредственной реализации наблюдателя. Условие $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$, строго говоря, непроверяемо как оффлайн, так и онлайн, поскольку зависит от всех предыдущих и будущих значений регрессора $\bar{\varphi}(t)$. Обычно выполнение условия постоянного возбуждения регрессора в параметризациях вида (П.25) линейных систем связывают с ограничением управления системы в классе частотно богатых функций [5, 6], т.е. функций, содержащих в разложении Фурье достаточное число гармоник. Для используемой в этой работе параметризации (П.25), (3.4), к сожалению, на данном этапе, затруднительно указать точное число гармоник, которое должно содержать управление для выполнения условия $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$. Это является одним из основных недостатков предлагаемого решения и существенно понижает его практическое значение.

Однако на основании импликации из утверждения 1

$$\bar{\varphi}(t) \in \text{PE} \Leftrightarrow \exists t \geq t_e \in [t_0, \infty) \Delta(t) \geq \Delta_{\text{LB}} > 0$$

можно порекомендовать дополнить предлагаемый наблюдатель следующей эвристической процедурой поиска управления, доставляющего $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$

Инициализация. Задать $k = 1$ и $m = 1$.

Шаг 1. Выбрать

$$(5.3) \quad u(t) = u_b(t) + \sum_{i=1}^m a_i \sin(\omega_i t),$$

где $u_b(t)$ – стабилизирующая компонента управления, например P -регулятор, a_i – произвольная амплитуда i -й гармоники, а частоты $\omega_i(t)$ такие, что $\omega_i \neq \omega_j$ для всех $i \neq j$.

Шаг 2. Подать на систему $u(t)$ и вычислить величину $\Delta(t)$ на $[t_{k-1}, t_k]$, где $t_k - t_{k-1}$ – достаточно большое число.

Шаг 3. Если существует $\Delta_{LB} > 0$ такое, что $\Delta(t) \geq \Delta_{LB}$ для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, то согласно утверждению 1 верно

$$(5.4) \quad \int_t^{t+T} \bar{\varphi}(\tau) \bar{\varphi}^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n$$

для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

Предположим, что результат, полученный на $[t_{k-1}, t_k]$, можно интерполировать на всю ось времени $[t_0, \infty)$, тогда на основании утверждения 1 найдено управление, доставляющее выполнение условия $\bar{\varphi}(t) \in PE$.

Если не существует $\Delta_{LB} > 0$ такого, что $\Delta(t) \geq \Delta_{LB}$ для всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, то установить $m = m + 1$ и $k = k + 1$, вернуться на шаг 1.

Суть приведенного алгоритма состоит в последовательном увеличении числа гармоник в сигнале управления до тех пор, пока на достаточно большом интервале времени скалярный регрессор $\Delta(t)$ не будет отделен от нуля. Если предположить, что существует m_{\max} такое, что при $m = m_{\max}$ управление (5.3) обеспечивает выполнение условия $\bar{\varphi}(t) \in PE$, то можно утверждать, что данный алгоритм за конечное число итераций m_{\max} позволяет сформировать управление, обеспечивающее выполнение условия $\bar{\varphi}(t) \in PE$. Отметим, что приведенная процедура является нестрогой, поскольку построена в существенном предположении, что выполнение условия (5.4) на достаточно большом интервале времени позволяет сделать вывод о выполнении условия (5.4) на всей оси времени. Вообще говоря, такой вывод сделать нельзя. Однако в практических задачах упомянутое упрощение допустимо, а описанная процедура может быть работоспособной.

Комментарий 4. Если дополнительно к требованиям допущений 1–3 в расширенной системе

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= (A_e(\theta) + A_\delta) x_e(t) + B_e u(t) = \Phi^T(x_e, u) \Theta_{AB}(\theta) + A_\delta x_e(t), \\ y(t) &= C_e^T x_e(t), \quad x_e(t_0) = [x_0 \quad x_{\delta 0}]^T, \end{aligned}$$

$$A_e(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & D(\theta) h_\delta^T \\ 0_{n_\delta \times n} & 0_{n_\delta \times n_\delta} \end{bmatrix}, \quad A_\delta = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n_\delta} \\ 0_{n_\delta \times n} & \mathcal{A}_\delta \end{bmatrix},$$

$$B_e(\theta) = \begin{bmatrix} B(\theta) \\ 0_{n_\delta} \end{bmatrix}, \quad x_e(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_\delta(t) \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} C \\ 0_{n_\delta} \end{bmatrix},$$

$$\Phi^T(x_e, u) = [I_{n+n_\delta} \otimes x_e^T(t) \quad I_{n+n_\delta} \otimes u^T(t)] \mathcal{D}_\Phi \in \mathbb{R}^{(n+n_\delta) \times n_\Theta},$$

$$\Theta_{AB}(\theta) = \mathcal{L}_\Phi [\text{vec}^T(A_e^T(\theta)) \quad B_e^T(\theta)]^T \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$$

пара (C_e^T, A_e) наблюдаема, то расширенный наблюдатель в форме

$$(5.6) \quad \dot{\hat{x}}_e(t) = \Phi^T(\hat{x}_e, u) \hat{\Theta}_{AB}(t) + A_\delta \hat{x}_\delta(t) - \hat{L}_e(t)(\hat{y}(t) - y(t)),$$

дополненный только законами идентификации $\Theta_{AB}(\theta)$ и $L_e(\theta)$, не требует параметризации (4.3) регрессионного уравнения $\mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) = \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}$, идентификации начальных условий $x_{\delta 0}$ генератора (2.2) и при выполнении условия (1.9) при использовании (3.4) или конечного возбуждения при использовании (5.2) обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибок $\tilde{x}(t)$, $\tilde{\delta}(t)$. В (5.5) $\hat{L}_e(t)$ является оценкой вектора $L_e(\theta) \in \mathbb{R}^{n+n_\delta}$, доставляющего желаемый алгебраический спектр матрице $A_e(\theta) + A_\delta$. Параметризация линейного регрессионного уравнения относительно $L_e(\theta)$ осуществляется аналогично параметризации $\mathcal{Y}_L(t) = \mathcal{M}_L(t)L(\theta)$, но только в пространстве $n + n_\delta$. Более подробно свойства альтернативной версии расширенного наблюдателя изложены в [21].

6. Математическое моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенного адаптивного наблюдателя. Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-4}$ секунды.

В качестве примера рассмотрим двухмассовую упругую механическую систему, приведенную на рис. 1.

Здесь $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ – жесткости пружин, $d > 0$ – коэффициент демпфирования, $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ – приведенные массы тел.

Математическая модель рассматриваемой системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$(6.1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\theta_1(\theta_2 + \theta_3) & -2\theta_1\theta_4 & \theta_1\theta_3 & \theta_1\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \theta_5\theta_3 & \theta_5\theta_4 & -\theta_3\theta_5 & -2\theta_4\theta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_5 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta,$$

$$y = [0 \ 0 \ 1 \ 0]x,$$

где $\theta = \text{col}\{m_1^{-1}, c_0, c_1, d, m_2^{-1}\}$,

$$\Theta(\theta) = \text{col}\{1, \theta_1(\theta_2 + \theta_3), \theta_1\theta_4, \theta_1\theta_3, \theta_3\theta_5, \theta_4\theta_5, \theta_1, \theta_5\}.$$

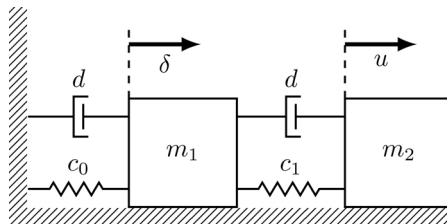


Рис. 1. Двухмассовая упругая механическая система.

В канонической наблюдаемой форме (3.1) параметры системы (6.1) определены следующим образом:

$$(6.2) \quad \psi_a(\theta) = \begin{bmatrix} -2\theta_4(\theta_1 + \theta_5) \\ -\theta_1(3\theta_5\theta_4^2 + \theta_2 + \theta_3) - \theta_3\theta_5 \\ -2\theta_1\theta_4\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \\ -\theta_1\theta_2\theta_3\theta_5 \end{bmatrix}, \quad \psi_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_5 \\ 2\theta_1\theta_4\theta_5 \\ \theta_1\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix},$$

$$\psi_d(\theta) = [0 \ 0 \ \theta_1\theta_4\theta_5 \ \theta_1\theta_3\theta_5]^T,$$

откуда следует выполнение условия (3.7) для

$$\psi_{ab}(\theta) = \begin{bmatrix} -2\theta_4(\theta_1 + \theta_5) \\ -\theta_1(3\theta_5\theta_4^2 + \theta_2 + \theta_3) - \theta_3\theta_5 \\ \theta_1\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \\ 2\theta_1\theta_4\theta_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix}.$$

Выполним параметризацию регрессионного уравнения (4.2) с помощью преобразований, введенных в предположениях 1–3 и лемме 2.

Шаг 1. Параметризация $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$. Разрешив относительно θ систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\psi_{ab}(\theta) = \begin{bmatrix} -2\theta_4(\theta_1 + \theta_5) \\ -\theta_1(3\theta_5\theta_4^2 + \theta_2 + \theta_3) - \theta_3\theta_5 \\ \theta_1\theta_5(\theta_2 + \theta_3) \\ 2\theta_1\theta_4\theta_5 \\ \theta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1ab} \\ \psi_{2ab} \\ \psi_{3ab} \\ \psi_{4ab} \\ \psi_{5ab} \end{bmatrix},$$

получаем преобразования $\mathcal{S}(\psi_{ab})$ и $\mathcal{G}(\psi_{ab})$ из (3.10):

$$\mathcal{S}(\psi_{ab}) = \begin{bmatrix} \psi_{4ab}\psi_{5ab} \\ \psi_{3ab}\psi_{5ab}(-\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab}) + \\ + \psi_{4ab}((\psi_{2ab}\psi_{5ab} + \psi_{3ab})\psi_{5ab} + \frac{3}{4}\psi_{4ab}(-\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab})) \\ (\psi_{2ab}\psi_{5ab} + \psi_{3ab})\psi_{5ab} + \frac{3}{4}\psi_{4ab}(-\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab}) \\ -\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab} \\ \psi_{5ab}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{G}(\psi_{ab}) = \text{diag} \begin{bmatrix} -\psi_{4ab} - \psi_{1ab}\psi_{5ab} \\ \psi_{4ab}\psi_{5ab}^3 \\ -\psi_{5ab}^3 \\ 2\psi_{5ab}^2 \\ \psi_{5ab} \end{bmatrix}.$$

Тогда преобразования $\mathcal{T}_S (\bar{\Xi}_S (\Delta) \mathcal{Y}_{ab})$, $\mathcal{T}_G (\bar{\Xi}_G (\Delta) \mathcal{Y}_{ab})$ задаются следующим образом:

$$\mathcal{T}_S (\bar{\Xi}_S (\Delta) \mathcal{Y}_{ab}) = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{4ab} \mathcal{Y}_{5ab} \\ \mathcal{Y}_{3ab} \mathcal{Y}_{5ab} (-\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab}) + \\ + \mathcal{Y}_{4ab} ((\mathcal{Y}_{2ab} \mathcal{Y}_{5ab} + \Delta \mathcal{Y}_{3ab}) \mathcal{Y}_{5ab} + \frac{3}{4} \Delta \mathcal{Y}_{4ab} (-\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab})) \\ (\mathcal{Y}_{2ab} \mathcal{Y}_{5ab} + \Delta \mathcal{Y}_{3ab}) \mathcal{Y}_{5ab} + \frac{3}{4} \mathcal{Y}_{4ab} (-\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab}) \\ -\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab} \\ \mathcal{Y}_{5ab}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{T}_G (\bar{\Xi}_G (\Delta) \mathcal{Y}_{ab}) = \text{diag} \begin{bmatrix} -\Delta \mathcal{Y}_{4ab} - \mathcal{Y}_{1ab} \mathcal{Y}_{5ab} \\ \mathcal{Y}_{4ab} \mathcal{Y}_{5ab}^3 \\ -\mathcal{Y}_{5ab}^3 \\ 2\mathcal{Y}_{5ab}^2 \\ \Delta \mathcal{Y}_{5ab} \end{bmatrix},$$

что позволяет вычислить $\mathcal{Y}_\theta(t)$ и $\mathcal{M}_\theta(t)$.

Шаг 2. Пользуясь полученным на предыдущем шаге выражением $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$, составляем преобразования

$$\mathcal{T}_Z (\bar{\Xi}_Z (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{col} \{ \mathcal{M}_\theta, \mathcal{Y}_{1\theta} (\mathcal{Y}_{2\theta} + \mathcal{Y}_{3\theta}), \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{4\theta}, \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{3\theta}, \mathcal{Y}_{3\theta} \mathcal{Y}_{5\theta}, \mathcal{Y}_{4\theta} \mathcal{Y}_{5\theta}, \mathcal{Y}_{1\theta}, \mathcal{Y}_{5\theta} \},$$

$$\mathcal{T}_X (\bar{\Xi}_X (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{blkdiag} \{ \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta^2 I_5, \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta \},$$

что позволяет вычислить $\mathcal{Y}_{AB}(t)$ и $\mathcal{M}_{AB}(t)$.

Шаг 3. Имея уравнение $\mathcal{Y}_{AB}(t) = \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta_{AB}(\theta)$, с помощью формул из второй части леммы 2 можем вычислить $\mathcal{Y}_L(t)$ и $\mathcal{M}_L(t)$.

Шаг 4. Пользуясь полученным на первом шаге выражением $\mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta$, составляем преобразования:

$$\mathcal{T}_W (\bar{\Xi}_W (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{col} \{ 0, 0, \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{4\theta} \mathcal{Y}_{5\theta}, \mathcal{Y}_{1\theta} \mathcal{Y}_{3\theta} \mathcal{Y}_{5\theta} \},$$

$$\mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) = \text{diag} \{ \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta, \mathcal{M}_\theta^3, \mathcal{M}_\theta^3 \},$$

что по формулам из третьей части леммы 2 позволяет вычислить $\mathcal{Y}_{\psi_d}(t)$, $\mathcal{M}_{\psi_d}(t)$ и $\mathcal{Y}_{x_{\delta_0}}(t)$, $\mathcal{M}_{x_{\delta_0}}(t)$.

Теперь, имея $\mathcal{Y}_{AB}(t)$, $\mathcal{Y}_L(t)$, $\mathcal{Y}_{x_{\delta_0}}(t)$, можем составить уравнение (4.2) с измеряемыми функцией $\mathcal{Y}_\kappa(t)$ и регрессором $\mathcal{M}_\kappa(t)$, а также реализовать наблюдатель (2.4) и закон идентификации (4.4).

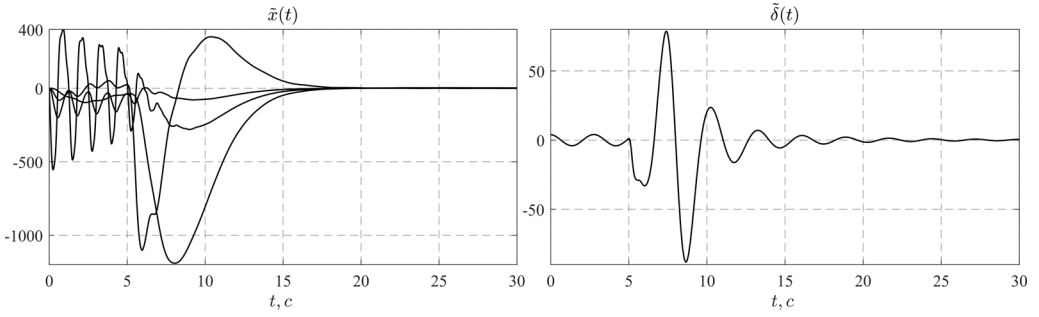


Рис. 2. Временные диаграммы по $\tilde{x}(t)$ и $\tilde{\delta}(t)$.

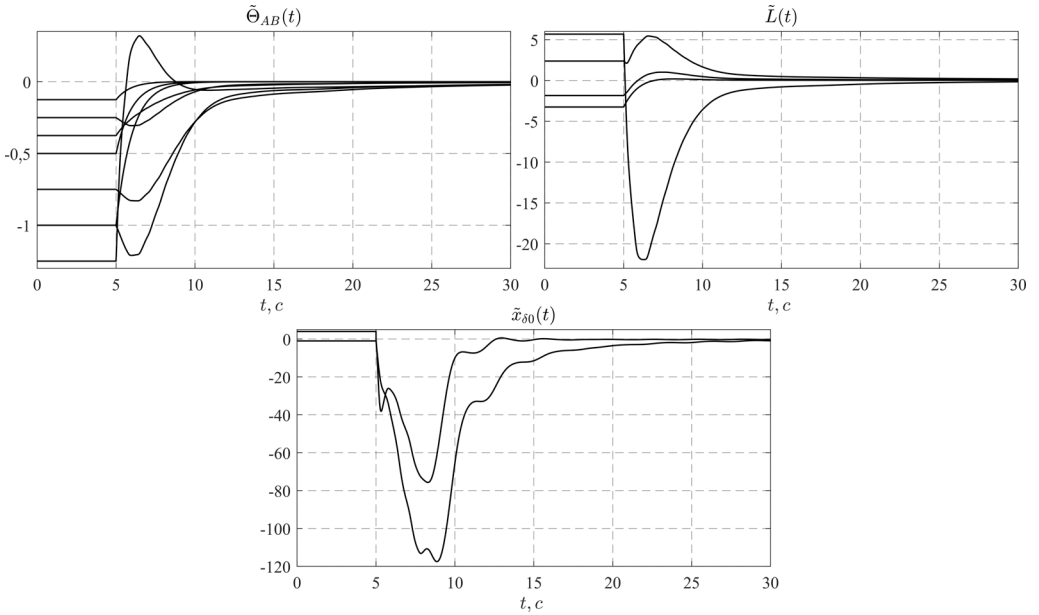


Рис. 3. Временные диаграммы по $\tilde{\Theta}_{AB}(t)$, $\tilde{L}(t)$, $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$.

Неизвестные параметры системы (6.1), параметры генератора возмущения (2.2) и модальной модели (2.3) установим следующим образом:

$$(6.3) \quad \theta = [1 \ 0,5 \ 0,75 \ 0,25 \ 0,5]^T, \quad x_0 = [0 \ 0 \ -1 \ 0]^T, \quad x_{\delta 0} = [-4 \ 1]^T, \\ \mathcal{A}_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_\delta^T = [1 \ 0], \quad \sigma\{\Gamma\} = [-1 \ -1 \ -1 \ -1]^T.$$

Управление $u(t)$ будем формировать по П-закону с экспериментально подобранным заданием, обеспечивающим $\varphi(t) \in PE$:

$$(6.4) \quad u(t) = 50(r(t) - y(t)), \\ r(t) = 25 \sin(10t) + 25 \sin(20t) + 100 \cos(0,1t).$$

Параметры фильтров (3.4)–(3.6), (4.3) и закона настройки (4.4) установим в соответствии с выражением

$$\det \{sI_4 - A_K\} = (s + 1)^4, \quad G = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad l = [1 \quad 2]^T,$$

$$(6.5) \quad \beta = [15 \quad -5,5]^T, \quad k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < 5 \\ \Delta^{-1}(t), & \text{если } t \geq 5, \end{cases} \quad k_1 = 25, \quad k_2 = 0,1,$$

$$\rho = 10^{-4}, \quad \gamma_0 = 10^{-9}, \quad \gamma_1 = 1.$$

На рис. 2 представлены временные диаграммы по ошибкам восстановления координат состояний $\tilde{x}(t)$ и внешнего возмущения $\tilde{\delta}(t)$.

Выбросы по $\tilde{x}(t)$ на отрезке [5, 15] объясняются прежде всего замыканием обратной связью $\tilde{L}(t)(\hat{y}(t) - y(t))$ уравнения в отклонениях (4.1) с ненулевыми начальными условиями [22]. Выбросы по $\tilde{\delta}(t)$ объясняются влиянием возмущения $\epsilon(t)$ на переходные процессы по $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$.

На рис. 3 приведены графики изменения параметрических ошибок $\tilde{\Theta}_{AB}(t)$, $\tilde{L}(t)$ и $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$.

Колебания в полученных переходных процессах по параметрическим ошибкам $\tilde{\Theta}_{AB}(t)$, $\tilde{L}(t)$, $\tilde{x}_{\delta 0}(t)$ вызваны влиянием экспоненциально затухающего возмущения $\epsilon(t)$ из параметризации (3.3). В целом результаты моделирования свидетельствуют о достижении поставленной цели (2.5).

7. Заключение

Разработан адаптивный наблюдатель состояний и возмущений линейных систем с перепараметризацией. Решение при выполнении условия неисчезающего возбуждения регрессора (частотном богатстве управления/задания) обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибок восстановления состояний системы и внешнего возмущения, формируемого известным генератором с неизвестными начальными условиями. В отличие от ближайших аналогов [10–12] предложенный наблюдатель позволяет восстанавливать не виртуальные, а физические координаты системы в произвольной форме пространства состояний.

Целью дальнейших исследований может являться:

- применение разработанного наблюдателя в задачах управления по динамической обратной связи;
- ослабление условия (1.9) путем замены (3.3) на параметризацию, не содержащую $\epsilon(t)$ (предварительный результат в этом направлении получен в комментарии 2 и работе [21]);
- расширении полученных результатов на системы с новыми, возможно нелинейными, моделями внешних возмущений;
- учет возмущений, аддитивно действующих непосредственно на измеряемый выход $y(t)$;

— следуя подходу [12], уменьшение всплесков ошибок в переходном процессе путем формирования оценок состояний $x(t)$ с помощью алгебраического, а не дифференциального уравнения (предварительный результат в этом направлении для систем без возмущений получен в [23]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Параметризация (3.3) получена объединением результатов [12, 24] с процедурой динамического расширения и смешивания [14, 19]. Доказательство леммы 1 выведено на основе результатов леммы 1 и теоремы 2 из [24]. Для облегчения понимания принятых обозначений и обеспечения вложенности результатов работы далее приведем доказательство леммы в соответствии с доказательством, изложенным в [24]. В отличие от результатов из [24] в данной работе по допущению 2 параметр β известен, что позволяет избавиться от перепараметризации в (3.3) (см. (П.23)).

Шаг 1. Рассмотрим ошибку:

$$(П.1) \quad \tilde{\xi}(t) = \xi(t) - z(t) - \Omega(t)\psi_a(\theta) - P(t)\psi_b(\theta).$$

Запишем производную (П.1):

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}(t) &= A_0\xi(t) + \psi_a(\theta)y(t) + \psi_b(\theta)u(t) + \psi_d(\theta)\delta(t) - A_Kz(t) - \\ &- Ky(t) - (A_K\Omega(t) + I_n y(t))\psi_a(\theta) - (A_KP(t) + I_n u(t))\psi_b(\theta) = \\ &= A_0\xi(t) - A_Kz(t) - Ky(t) - A_K\Omega(t)\psi_a(\theta) - A_KP(t)\psi_b(\theta) + \psi_d(\theta)\delta(t) = \\ &= A_K\tilde{\xi}(t) + \psi_d(\theta)\delta(t). \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (П.2) примет вид

$$(П.3) \quad \tilde{\xi}(t) = e^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + \bar{\delta}(t),$$

где внешнее возмущение $\bar{\delta}(t)$ описывается системой уравнений

$$(П.4) \quad \begin{cases} \dot{\bar{\delta}}(t) = A_K\bar{\delta}(t) + \psi_d(\theta)\delta(t), \\ v_f(t) = C_0^T\bar{\delta}(t). \end{cases}$$

Подставив (П.3) в (П.1), можем записать:

$$(П.5) \quad \begin{aligned} e^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + \bar{\delta}(t) &= \xi(t) - z(t) - \Omega(t)\psi_a(\theta) - P(t)\psi_b(\theta), \\ &\Downarrow \\ \xi(t) &= e^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + \bar{\delta}(t) + z(t) + \Omega(t)\psi_a(\theta) + P(t)\psi_b(\theta). \end{aligned}$$

Умножив (П.5) на C_0^T , получаем:

$$(П.6) \quad \begin{aligned} y(t) &= C_0^T\xi(t) = \\ &= C_0^Tz(t) + C_0^T\Omega(t)\psi_a(\theta) + C_0^TP(t)\psi_b(\theta) + v_f(t) + C_0^Te^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0). \end{aligned}$$

В силу уравнения (П.6) продифференцируем функцию $\bar{q} = y(t) - C_0^Tz(t)$:

$$(П.7) \quad \dot{\bar{q}}(t) = C_0^T\dot{\Omega}(t)\psi_a(\theta) + C_0^T\dot{P}(t)\psi_b(\theta) + \dot{v}_f(t) + C_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0).$$

Шаг 2. Параметризуем составляющую $\dot{v}_f(t)$ уравнения (П.7) в виде линейной регрессионной функции с измеряемым регрессором. Для этого перепишем систему (П.4) в виде вход-выход:

$$(П.8) \quad v_f(t) = C_0^T (sI_n - A_K)^{-1} \psi_d(\theta) \delta(t) = W_f [\delta(t)].$$

Представим производную возмущения $\delta(t)$ в следующем виде:

$$(П.9) \quad \dot{\delta}(t) = h_\delta^T \mathcal{A}_\delta x_\delta(t) + \delta(t_0) D_\delta(t),$$

где $D_\delta(t)$ – функция Дирака.

Введем в рассмотрение виртуальную переменную $\delta_d(t) = h_\delta^T \mathcal{A}_\delta x_\delta(t)$. Тогда оказываются верны равенства

$$(П.10) \quad \begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= \mathcal{A}_\delta x_\delta(t), \\ \delta_d(t) &= \bar{h}_\delta^T x_\delta(t), \quad \bar{h}_\delta^T = h_\delta^T \mathcal{A}_\delta. \end{aligned}$$

Продифференцировав (П.8) и подставив (П.9), (П.10), имеем:

$$(П.11) \quad \begin{aligned} \dot{v}_f &= sW_f [\delta(t)] = W_f [\dot{\delta}(t)] = \\ &= W_f [h_\delta^T \mathcal{A}_\delta x_\delta(t) + \delta(t_0) D_\delta(t)] = \underbrace{W_f [\delta_d(t)]}_{v_f(t)} + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)]. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу гурвицевости матрицы A_K для параметризации $\dot{v}_f(t)$ достаточно параметризовать составляющую $v_f(t)$. Для этого рассмотрим вспомогательную переменную $\zeta(t) = M_\delta x_\delta(t)$, где матрица линейного подобия M_δ является решением уравнения Сильвестра

$$(П.12) \quad M_\delta \mathcal{A}_\delta - G M_\delta = l \bar{h}_\delta^T,$$

которое имеет единственное решение [15, 16, 24], так как по допущению 2 пара $(h_\delta^T, \mathcal{A}_\delta)$ наблюдаема, а по условию леммы (G, l) управляема и $\sigma \{ \mathcal{A}_\delta \} \cap \sigma \{ G \} = 0$.

Дифференцируя $\zeta(t)$, получим:

$$(П.13) \quad \dot{\zeta}(t) = M_\delta \mathcal{A}_\delta x_\delta(t) = G M_\delta x_\delta(t) + l \bar{h}_\delta^T x_\delta(t) = G \zeta(t) + l \delta_d(t),$$

откуда в силу $x_\delta(t) = M_\delta^{-1} \zeta(t)$ следует

$$(П.14) \quad \delta_d(t) = \bar{h}_\delta^T M_\delta^{-1} \zeta = \beta^T \zeta, \quad \beta = \bar{h}_\delta^T M_\delta^{-1}.$$

С учетом выражения (П.14) можем переписать (П.11) в следующем виде:

$$(П.15) \quad \begin{aligned} \dot{v}_f(t) &= W_f [\beta^T \zeta(t)] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] = \\ &= \beta^T W_f [\zeta(t)] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] = \beta^T \zeta_w(t) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)]. \end{aligned}$$

Вместо $\delta_d(t)$ пропустим через фильтр (П.13) сигнал $v_f(t)$:

$$(П.16) \quad \zeta_f(t) = (sI - G)^{-1} l [v_f(t)] + e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0),$$

тогда с учетом $\zeta(t) = (sI - G)^{-1}l[\delta_d(t)] + e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
 \zeta_w(t) &= W_f[\zeta(t)] = W_f\left[(sI - G)^{-1}l[\delta_d(t)] + e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right] = \\
 &= (sI - G)^{-1}lW_f[\delta_d(t)] + W_f\left[e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right] = \\
 \text{(II.17)} \quad &= (sI - G)^{-1}lv_f + W_f\left[e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right] = \\
 &= \zeta_f(t) - e^{G(t-t_0)}\zeta_f(t_0) + W_f\left[e^{G(t-t_0)}\zeta(t_0)\right].
 \end{aligned}$$

Подставив выражение (II.17) в (II.15), имеем:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_f(t) &= \beta^T\zeta_f(t) - \beta^Te^{G(t-t_0)}\zeta_f(t_0) + \\
 \text{(II.18)} \quad &+ \beta^TW_f\left[e^{G(t-t_0)}\xi(t_0)\right] + W_f[\delta(t_0)D_\delta(t)].
 \end{aligned}$$

Введем наблюдатель состояний $\zeta_f(t)$ в следующем виде:

$$\text{(II.19)} \quad \hat{\zeta}_f(t) = F(t) + H(t)\psi_b(\theta) + N(t)\psi_a(\theta) + ly(t).$$

Дифференцируя ошибку $\tilde{\zeta}_f(t) = \zeta_f(t) - \hat{\zeta}_f(t)$, в силу уравнений (II.7), (II.11), (II.16), (II.19) имеем:

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{\zeta}}_f &= G\zeta_f(t) + lv_f(t) - GF(t) - Gly(t) + lC_0^T\dot{z}(t) - \\
 &- \left(GH(t) - lC_0^T\dot{P}(t)\right)\psi_b(\theta) - \left(GN(t) - lC_0^T\dot{\Omega}(t)\right)\psi_a(\theta) - \\
 &- lC_0^T\dot{z}(t) - lC_0^T\dot{\Omega}(t)\psi_a(\theta) - lC_0^T\dot{P}(t)\psi_b(\theta) - \\
 \text{(II.20)} \quad &- l(v_f(t) + W_f[\delta(t_0)D_\delta(t)]) - lC_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) = \\
 &= G\zeta_f(t) - \underbrace{GF(t) - Gly(t) - GH(t)\psi_b(\theta) - GN(t)\psi_a(\theta)}_{G\hat{\zeta}_f(t)} - \\
 &- lW_f[\delta(t_0)D_\delta(t)] - lC_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) = \\
 &= G\tilde{\zeta}_f - lC_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) - lW_f[\delta(t_0)D_\delta(t)].
 \end{aligned}$$

Решим систему (II.20):

$$\begin{aligned}
 \text{(II.21)} \quad &\tilde{\zeta}_f(t) = \zeta_f(t) - \hat{\zeta}_f(t) = \\
 &= e^{G(t-t_0)}\tilde{\zeta}_f(t_0) - \mathfrak{H}\left[C_0^TA_Ke^{A_K(t-t_0)}\tilde{\xi}(t_0) + W_f[\delta(t_0)D_\delta(t)]\right],
 \end{aligned}$$

что позволяет переписать (П.18) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_f(t) &= \beta^T \hat{\zeta}_f(t) + \beta^T e^{G(t-t_0)} \tilde{\zeta}_f(t_0) - \\
 &\quad - \beta^T \mathfrak{H} \left[C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] \right] - \\
 (П.22) \quad &\quad - \beta^T e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0) + \beta^T W_f \left[e^{G(t-t_0)} \xi(t_0) \right] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] = \\
 &= \beta^T (F(t) + ly(t)) + \beta^T H(t) \psi_b(\theta) + \beta^T N(t) \psi_a(\theta) + \\
 &\quad + \beta^T e^{G(t-t_0)} \tilde{\zeta}_f(t_0) - \beta^T \mathfrak{H} \left[C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] \right] - \\
 &\quad - \beta^T e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0) + \beta^T W_f \left[e^{G(t-t_0)} \xi(t_0) \right] + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)],
 \end{aligned}$$

где $\mathfrak{H}[\cdot] = (sI_{n_\delta} - G)^{-1} l[\cdot]$.

Подставив выражение (П.22) в (П.7) имеем:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}(t) &= C_0^T \dot{\Omega}(t) \psi_a(\theta) + C_0^T \dot{P}(t) \psi_b(\theta) + \\
 &\quad + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \beta^T H(t) \psi_b(\theta) + \beta^T N(t) \psi_a(\theta) + \\
 (П.23) \quad &\quad + \beta^T e^{G(t-t_0)} \tilde{\zeta}_f(t_0) - \beta^T \mathfrak{H} \left[C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] \right] - \\
 &\quad - \beta^T e^{G(t-t_0)} \zeta_f(t_0) + \beta^T W_f \left[e^{G(t-t_0)} \xi(t_0) \right] + \\
 &\quad + W_f [\delta(t_0) D_\delta(t)] + C_0^T A_K e^{A_K(t-t_0)} \tilde{\xi}(t_0) = \\
 &= \bar{\varphi}^T(t) \eta(\theta) + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \bar{\varepsilon}(t),
 \end{aligned}$$

где $\bar{\varepsilon}(t)$ – агрегированные экспоненциально затухающие функции.

Шаг 3. Теперь с использованием процедуры динамического расширения и смешивания приведем регрессионное уравнение (П.23) к виду (3.3). Для этого, дифференцируя $\chi(t) = \bar{q}(t) - k_1 \bar{q}_f(t)$ в силу (П.23), (3.5), получим:

$$\begin{aligned}
 (П.24) \quad \dot{\chi}(t) &= \bar{\varphi}^T(t) \eta(\theta) + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \bar{\varepsilon}(t) - k_1 (-k_1 \bar{q}_f(t) + \bar{q}(t)) = \\
 &= -k_1 \chi(t) + \bar{\varphi}^T(t) \eta(\theta) + \beta^T (F(t) + ly(t)) + \bar{\varepsilon}(t).
 \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (П.24) позволяет записать:

$$\begin{aligned}
 (П.25) \quad \bar{q}(t) - k_1 \bar{q}_f(t) - \beta^T (F_f(t) + ly_f(t)) &= \\
 &= e^{-k_1(t-t_0)} \bar{q}(t_0) + \bar{\varphi}_f^T(t) \eta(\theta) + \bar{\varepsilon}_f(t),
 \end{aligned}$$

где $\dot{\bar{\varepsilon}}_f(t) = -k_1 \bar{\varepsilon}_f(t) + k_1 \bar{\varepsilon}(t)$, $\bar{\varepsilon}_f(t_0) = 0$.

Решение первого дифференциального уравнения из (3.4) в силу (П.25) удовлетворяет выражению

$$(П.26) \quad q(t) = \varphi(t) \eta(\theta) + \varepsilon(t),$$

где $\dot{\varepsilon}(t) = -k_2 \varepsilon(t) + \bar{\varphi}_f(t) (\bar{\varepsilon}_f(t) + e^{-k_1(t-t_0)} \bar{q}(t_0))$, $\varepsilon(t_0) = 0_{2n}$.

Умножив выражение (П.26) на $k(t)\text{adj}\{\varphi(t)\}$ и применив свойство

$$\text{adj}\{\varphi(t)\}\varphi(t) = \det\{\varphi(t)\}I_{2n},$$

имеем выражение (3.3) при $\epsilon(t) = k(t)\text{adj}\{\varphi(t)\}\epsilon(t)$.

В соответствии с леммой 6.8 из [6] при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ также верно $\bar{\varphi}_f(t) \in \text{PE}$. По утверждению 1 при $\bar{\varphi}_f(t) \in \text{PE}$ выполняется неравенство $\Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$. Поскольку сигналы $y(t)$, $u(t)$ ограничены по допущению 1, то в силу устойчивости фильтров (3.4)–(3.6) для всех $t \geq t_0$ верно неравенство $\Delta_{\max} \geq \Delta(t)$. Откуда для всех $t \geq t_0 + T$ верно $\Delta_{\max} \geq \Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$, что завершает доказательство леммы.

Доказательство леммы 2. В соответствии с определением 1 и предположением 1 в силу

$$\begin{aligned}\Xi_S(\Delta) &= \bar{\Xi}_S(\Delta)\Delta(t), \quad \Xi_G(\Delta) = \bar{\Xi}_G(\Delta)\Delta(t), \\ \mathcal{Y}_{ab}(t) &= \mathcal{L}_{ab}\mathcal{Y}(t) = \Delta(t)\mathcal{L}_{ab}\eta(\theta) = \Delta(t)\psi_{ab}(\theta), \\ \bar{\Xi}_S(\Delta)\Delta(t)\psi_{ab}(\theta) &= \bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}(t), \\ \bar{\Xi}_G(\Delta)\Delta(t)\psi_{ab}(\theta) &= \bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}(t)\end{aligned}$$

из (3.9) имеет место равенство

$$(П.27) \quad \mathcal{T}_S(\bar{\Xi}_S(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) = \mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\theta.$$

Тогда, домножив выражение (П.27) на $\text{adj}\{\mathcal{T}_G(\bar{\Xi}_G(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}$, имеем регрессионное уравнение

$$(П.28) \quad \mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta,$$

пользуясь которым вместе с выражением (3.8), можем получить:

$$(П.29a) \quad \mathcal{T}_Z(\bar{\Xi}_Z(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) = \mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\Theta_{AB}(\theta),$$

$$(П.29b) \quad \mathcal{T}_W(\bar{\Xi}_W(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta) = \mathcal{T}_R(\bar{\Xi}_R(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\psi_d(\theta).$$

Умножив выражение (П.29a) на $\text{adj}\{\mathcal{T}_X(\bar{\Xi}_X(\mathcal{M}_\theta)\mathcal{Y}_\theta)\}$, получаем регрессионное уравнение $\mathcal{Y}_{AB}(t) = \mathcal{M}_{AB}(t)\Theta_{AB}(\theta)$.

Параметризуем уравнение относительно $L(\theta)$. При выполнении допущения 2 в соответствии с результатами теории обобщенного модального синтеза [15, 16] вектор $L(\theta)$ может быть определен решением системы

$$(П.30) \quad \begin{cases} A^T(\theta)M - M\Gamma = CB^T(\theta), \\ B^T(\theta) = L^T(\theta)M, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение [15, 16], так как по допущению 3 пара $(A^T(\theta), C)$ управляема, пара $(B^T(\theta), \Gamma)$ наблюдаема и $\sigma\{A^T(\theta)\} \cap \sigma\{\Gamma\} = 0$.

Векторизовав первое уравнение из (П.30), с учетом свойств $\text{vec}(AB) = (I \otimes A)\text{vec}(B) = (B^T \otimes I)\text{vec}(A)$ имеем:

$$(П.31) \quad (I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n)\text{vec}(M) = \text{vec}(CB^T(\theta)).$$

Так как уравнения (П.30), (П.31) имеют единственное решение, то

$$\det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \neq 0,$$

а значит, домножив (П.31) на союзную матрицу $\text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\}$, можем записать:

$$(П.32) \quad \begin{aligned} & \det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(M) = \\ & = \text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(CB^T(\theta)). \end{aligned}$$

Выполним операцию, обратную векторизации ($\text{vec}^{-1}\{\cdot\}$), и подставим результат во второе уравнение системы (П.30):

$$(П.33) \quad \begin{aligned} & \underbrace{\det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} B(\theta)}_{\mathcal{Q}(\Theta_{AB})} = \\ & = \underbrace{\text{vec}^{-1} \{ \text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(CB^T(\theta)) \}}_{\mathcal{P}(\Theta_{AB})}^T L(\theta), \end{aligned}$$

где $\det \{\mathcal{P}(\Theta_{AB})\} \neq 0$.

Введем равенства:

$$(П.34) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_{AB}(t)A^T(\theta) &= \text{vec}^{-1}(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)), \\ \mathcal{M}_{AB}(t)B^T(\theta) &= [\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)]^T, \\ \mathcal{M}_{AB}(t)B(\theta) &= \mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t). \end{aligned}$$

Умножив (П.33) на $\Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} I_n$, воспользовавшись свойствами $c^n \det \{A\} = \det \{cA\}$, $c^{n-1} \text{adj} \{A\} = \text{adj} \{cA\}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, и подставив (П.34), получим:

$$(П.35) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_\mathcal{P}(\Xi_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) \Theta_{AB}) &= \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{P}(\Theta_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \mathcal{P}(\Theta_{AB}) = \\ &= \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \text{vec}^{-1} \{ \text{adj} \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec}(CB^T(\theta)) \}^T = \\ &= \text{vec}^{-1} \left\{ \mathcal{M}_{AB} \text{adj} \{I_n \otimes \text{vec}^{-1}(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}) - \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{M}_{AB} \Gamma^T \otimes I_n\} \text{vec} \left(C(\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB})^T \right) \right\}^T, \\ \mathcal{T}_\mathcal{Q}(\Xi_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) \Theta_{AB}) &= \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Q}(\Theta_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \mathcal{Q}(\Theta_{AB}) = \\ &= \mathcal{M}_{AB}^{n^2+1} \det \{I_n \otimes A^T(\theta) - \Gamma^T \otimes I_n\} B(\theta) = \\ &= \det \{I_n \otimes \text{vec}^{-1}(\mathcal{L}_{A^T} \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)) - \mathcal{M}_{AB}(t) \Gamma^T \otimes I_n\} (\mathcal{L}_B \mathcal{D}_\Phi \mathcal{Y}_{AB}(t)), \end{aligned}$$

где $\Xi_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) = \Xi_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) = \mathcal{M}_{AB}(t)$.

На основании уравнений (П.33) и (П.35) можем записать регрессионное уравнение:

$$(П.36) \quad \mathcal{T}_\mathcal{Q}(\bar{\Xi}_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) = \mathcal{T}_\mathcal{P}(\bar{\Xi}_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) L(\theta),$$

где $\bar{\Xi}_\mathcal{P}(\mathcal{M}_{AB}) = \bar{\Xi}_\mathcal{Q}(\mathcal{M}_{AB}) = 1$.

Умножив выражение (П.36) на $\text{adj} \{ \mathcal{T}_{\mathcal{P}} (\overline{\Xi}_{\mathcal{P}} (\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) \}$, имеем регрессионное уравнение $\mathcal{Y}_L(t) = \mathcal{M}_L(t)L(\theta)$.

Получим регрессионное уравнение относительно $x_{\delta 0}$. Используя свойства операции векторизации

$$\begin{aligned} \text{vec}(\psi_d(\theta)h_{\delta}^T\Phi_{\delta}(t)x_{\delta 0}) &= \underbrace{(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta))}_{n \times n_{\delta}} \underbrace{\text{vec}(h_{\delta}^T\Phi_{\delta})}_{n_{\delta}}, \\ \text{vec}((x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)) \text{vec}(h_{\delta}^T\Phi_{\delta}(t))) &= \underbrace{(h_{\delta}^T\Phi_{\delta}(t) \otimes I_n)}_{n \times nn_{\delta}} \underbrace{\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta))}_{nn_{\delta}}, \end{aligned}$$

выражение (3.1) возможно переписать следующим образом:

$$(П.37) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0\xi(t) + \psi_a(\theta)y(t) + \psi_b(\theta)u(t) + \\ &+ (h_{\delta}^T\Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)). \end{aligned}$$

Зададим ошибку:

$$(П.38) \quad e(t) = \xi(t) - z(t) - \Omega(t)\psi_a(\theta) - P(t)\psi_b(\theta) - V(t)\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)).$$

Дифференцируя (П.38), аналогично (П.2) получаем $\dot{e}(t) = A_K e(t)$. Тогда, домножив (П.38) на C_0^T , можем записать:

$$(П.39) \quad \begin{aligned} \bar{q}(t) &= C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0) + C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + \\ &+ C_0^T P(t)\psi_b(\theta) + C_0^T V(t)\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)). \end{aligned}$$

С помощью свойств

$$\begin{aligned} x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta) &= \psi_d(\theta)x_{\delta 0}, \\ \text{vec}(\psi_d(\theta)x_{\delta 0}) &= \underbrace{(I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))}_{nn_{\delta} \times n_{\delta}} x_{\delta 0} \end{aligned}$$

выражение (П.39) приводится к виду

$$(П.40) \quad \begin{aligned} \bar{q}(t) &= C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0) + C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + \\ &+ C_0^T P(t)\psi_b(\theta) + C_0^T V(t)\text{vec}(x_{\delta 0}^T \otimes \psi_d(\theta)). \end{aligned}$$

Для компенсации неизвестных слагаемых $C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + C_0^T P(t)\psi_b(\theta)$ введем вспомогательный сигнал

$$(П.41) \quad \begin{aligned} \bar{p}_e(t) &= \Delta(t)C_0^T \Omega(t)\psi_a(\theta) + \Delta(t)C_0^T P(t)\psi_b(\theta) = \\ &= C_0^T \Omega(t)\mathcal{L}_a \mathcal{Y}(t) + C_0^T P(t)\mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a \mathcal{Y}(t) &= \mathcal{L}_a \Delta(t)\eta(\theta) = \Delta(t)\mathcal{L}_a \eta(\theta) = \Delta(t)\psi_a(\theta), \\ \mathcal{L}_b \mathcal{Y}(t) &= \Delta(t)\mathcal{L}_b \eta(\theta) = \Delta(t)\psi_b(\theta). \end{aligned}$$

Умножив (П.40) на $\Delta(t)$ и вычитая из полученного выражения (П.41), имеем:

$$\begin{aligned}
 (П.42) \quad p(t) &= \Delta(t)\bar{q}(t) - \bar{p}_e(t) = \\
 &= \Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \psi_d(\theta)) x_{\delta 0} + \Delta(t)C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0) = \\
 &= \Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \psi_d(\theta)) x_{\delta 0} + \Delta(t)C_0^T e^{A_K(t-t_0)} e(t_0).
 \end{aligned}$$

Для получения возможности косвенной реализации множителя $\psi_d(\theta)$ умножим выражение (П.29b) на $\text{adj} \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \}$:

$$\begin{aligned}
 (П.43) \quad \mathcal{Y}_{\psi_d}(t) &= \mathcal{M}_{\psi_d}(t)\psi_d(\theta), \\
 \mathcal{Y}_{\psi_d}(t) &= \text{adj} \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \} \mathcal{T}_W (\bar{\Xi}_W (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta), \\
 \mathcal{M}_{\psi_d}(t) &= \det \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \}.
 \end{aligned}$$

Умножение (П.42) на $\mathcal{M}_{\psi_d}(t)$ и подстановка (П.43) позволяют получить:

$$\begin{aligned}
 (П.44) \quad \mathcal{M}_{\psi_d}(t)p(t) &= \mathcal{M}_{\psi_d}(t)\Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \psi_d(\theta)) x_{\delta 0} = \\
 &= \Delta(t)C_0^T V(t) (I_{n_\delta} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(t)) x_{\delta 0}.
 \end{aligned}$$

Пропустив (П.44) через фильтр (4.3) и умножив на $\text{adj} \{ V_f(t) \}$, имеем регрессионное уравнение $\mathcal{Y}_{x_{\delta 0}}(t) = \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)x_{\delta 0}$, что завершает доказательство возможности формирования уравнения (4.2) на основании измеряемых сигналов.

По доказанному в лемме 1 при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$ для всех $t \geq t_0 + T$ верно $\Delta(t) \geq \Delta_{\min} > 0$, а по предположениям 1–3 и доказанным выражениям:

$$\begin{aligned}
 \det^2 \{ \mathcal{X}(\theta) \} &> 0, \quad \det^2 \{ \mathcal{R}(\theta) \} > 0, \\
 \det^2 \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \} &> 0, \quad \det^2 \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \} > 0, \\
 \det \{ \Pi_\theta(\Delta) \} &\geq \Delta^{\ell_\theta}(t), \quad \det \{ \Pi_\Theta(\mathcal{M}_\theta) \} \geq \mathcal{M}_\theta^{\ell_\Theta}(t), \\
 \det \{ \Pi_{\psi_d}(\mathcal{M}_\theta) \} &\geq \mathcal{M}_\theta^{\ell_{\psi_d}}(t), \quad \det \{ \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \} \geq \mathcal{M}_{AB}^{n^3+n}(t)
 \end{aligned}$$

следует выполнение для всех $t \geq t_0 + T$ следующих неравенств при $\bar{\varphi}(t) \in \text{PE}$:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_\theta(t)| &= |\det \{ \mathcal{T}_G (\bar{\Xi}_G (\Delta) \mathcal{Y}_{ab}) \}| = |\det \{ \Pi_\theta(\Delta) \} \det \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| \geq \\
 &\geq |\det \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| \Delta_{\min}^{\ell_\theta} = \underline{\mathcal{M}}_\theta > 0, \\
 |\mathcal{M}_{AB}(t)| &= |\det \{ \mathcal{T}_X (\bar{\Xi}_X (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \}| = |\det \{ \Pi_\Theta(\mathcal{M}_\theta) \} \det \{ \mathcal{X}(\theta) \}| \geq \\
 &\geq |\det^{\ell_\Theta} \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| |\det \{ \mathcal{X}(\theta) \}| \Delta_{\min}^{\ell_\Theta \ell_\Theta} = \underline{\mathcal{M}}_{AB} > 0, \\
 |\mathcal{M}_{\psi_d}(t)| &= \det \{ \mathcal{T}_R (\bar{\Xi}_R (\mathcal{M}_\theta) \mathcal{Y}_\theta) \} = |\det \{ \Pi_{\psi_d}(\mathcal{M}_\theta) \} \det \{ \mathcal{R}(\theta) \}| \geq \\
 &\geq |\det^{\ell_{\psi_d}} \{ \mathcal{G}(\psi_{ab}) \}| |\det \{ \mathcal{R}(\theta) \}| \Delta_{\min}^{\ell_\theta \ell_{\psi_d}} = \underline{\mathcal{M}}_{\psi_d} > 0, \\
 |\mathcal{M}_L(t)| &= |\det \{ \mathcal{T}_P (\bar{\Xi}_P (\mathcal{M}_{AB}) \mathcal{Y}_{AB}) \}| = |\det \{ \Pi_L(\mathcal{M}_{AB}) \} \det \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \}| \geq \\
 &\geq |\det \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \}| \mathcal{M}_{AB}^{n^3+n} \geq |\det \{ \mathcal{P}(\Theta_{AB}) \}| \underline{\mathcal{M}}_{AB}^{n^3+n} = \underline{\mathcal{M}}_L > 0.
 \end{aligned}$$

Чтобы оценить регрессор $\mathcal{M}_{x_{\delta 0}}(t)$, сначала получим оценку снизу на решение дифференциального уравнения для $V_f(t)$ при $\overline{\varphi}(t) \in \text{PE}$ и $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$:

$$\begin{aligned}
V_f(t) &= \int_{t_0}^t e^{-k_2(t-\tau)} \Delta^2(\tau) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(\tau))^T V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) (I_{n_{\delta}} \otimes \mathcal{Y}_{\psi_d}(\tau)) d\tau = \\
&= (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \int_{t_0}^t e^{-k_2(t-\tau)} \mathcal{M}_{\psi_d}^2(\tau) \Delta^2(\tau) V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \int_{t_0}^t e^{-k_2(t-\tau)} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \left[\int_{t_0}^{t-\overline{k}T} e^{-k_2(t-\tau)} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\overline{k}} \int_{t-kT}^{t-kT+T} e^{-k_2(t-\tau)} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau \right] (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 e^{-k_2 t} (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \sum_{k=1}^{\overline{k}} \int_{t-kT}^{t-kT+T} e^{k_2 \tau} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) \geq \\
&\geq \underline{\mathcal{M}_{\psi_d}^2} \Delta_{\min}^2 (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \sum_{k=1}^{\overline{k}} e^{-k_2 k T} \int_{t-kT}^{t-kT+T} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)),
\end{aligned}$$

где $\overline{k} \geq k \geq 1$ – целые числа.

В соответствии с леммой 6.8 из [6] при $(h_{\delta}^T \Phi_{\delta}(t) \otimes I_n) \in \text{PE}$ выполняется неравенство

$$(II.45) \quad \int_t^{t+T} V^T(\tau) C_0 C_0^T V(\tau) d\tau \geq \alpha I_{nn_{\delta}},$$

а пользуясь свойствами кронекеровского произведения, имеем равенство:

$$\begin{aligned}
(I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))^T \underbrace{(I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta))}_{nn_{\delta} \times n_{\delta}} &= (I_{n_{\delta}}^T \otimes \psi_d^T(\theta)) (I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d(\theta)) = \\
(II.46) \quad &= I_{n_{\delta}} \otimes \psi_d^T(\theta) \psi_d(\theta) = \underbrace{\psi_d^T(\theta) \psi_d(\theta)}_{>0} I_{n_{\delta}}.
\end{aligned}$$

Тогда для всех $t \geq t_0 + T$ верно неравенство:

$$(П.47) \quad V_f(t) \geq \underbrace{\mathcal{M}_{\psi_d}^2 \Delta_{\min}^2 \alpha \sum_{k=1}^{\bar{k}} e^{-k_2 k T} \psi_d^T(\theta) \psi_d(\theta) I_{n_\delta}}_{>0} \geq \sqrt[n_{\bar{k}}]{\mathcal{M}_{x_{\delta 0}}} I_{n_\delta},$$

откуда для всех $t \geq t_0 + T$ имеем $\mathcal{M}_{x_{\delta 0}} \geq \underline{\mathcal{M}}_{x_{\delta 0}} > 0$, что позволяет получить:

$$(П.48) \quad \begin{aligned} \forall t \geq t_0 + T \quad |\mathcal{M}_\kappa(t)| &= |\mathcal{M}_{AB}^{n_\Theta}(t) \mathcal{M}_L^n(t) \mathcal{M}_{x_{\delta 0}}^{n_\delta}(t)| \geq \\ &\geq \underline{\mathcal{M}}_{AB}^{n_\Theta} \underline{\mathcal{M}}_L^n \underline{\mathcal{M}}_{x_{\delta 0}}^{n_\delta} = \underline{\mathcal{M}}_\kappa > 0. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 3 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // *АиТ.* 2011. № 11. С. 9–59.
Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M. Optimization of linear systems subject to bounded exogenous disturbances: The invariant ellipsoid technique // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 11. P. 2227–2275.
2. *Khalil H.K., Praly L.* High-gain observers in nonlinear feedback control // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2014. V. 24. No. 6. P. 993–1015.
3. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.
4. *Shtessel Y., Edwards C., Fridman L., Levant A.* Sliding mode control and observation. New York: Springer New York, 2014.
5. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
6. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
7. *Carroll R., Lindorff D.* An adaptive observer for single-input single-output linear systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1973. V. 18. No. 5. P. 428–435.
8. *Kudva P., Narendra K.S.* Synthesis of an adaptive observer using Lyapunov's direct method // *Int. J. Control.* 1973. V. 18. No. 6. P. 1201–1210.
9. *Luders G., Narendra K.S.* Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1974. V. 19. No. 6. P. 841–847.
10. *Kreisselmeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
11. *Katiyar A., Roy S.B., Bhasin S.* Initial Excitation Based Robust Adaptive Observer for MIMO LTI Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2022.
12. *Bobtsov A., Pyrkin A., Vedyakov A., Vediakova A., Aranovskiy S.* A Modification of Generalized Parameter-Based Adaptive Observer for Linear Systems with Relaxed Excitation Conditions // *IFAC PapersOnLine.* 2022. V. 55. No. 12. P. 324–329.
13. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Exponentially Stable Adaptive Observation for Systems Parameterized by Unknown Physical Parameters // *arXiv preprint arXiv:2212.08405.* 2022. P. 1–6.

14. *Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A.* On preserving-excitation properties of Kreisselmeiers regressor extension scheme // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2022. P. 1–6.
15. *Bhattacharyya S.P., De Souza E.* Pole assignment via Sylvester’s equation // *Syst. Control Lett.* 1982. V. 1, No. 4. P. 261–263.
16. *Dudarenko N.A., Slita O.V., Ushakov A.V.* Algebraic conditions of generalized modal control // *IFAC Proc. Volumes.* 2012. V. 45. No. 13. P. 150–155.
17. *Poznyak A.S.* Advanced mathematical tools for automatic control engineers, Elsevier Science, 2009.
18. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть I. Объекты с постоянными параметрами // *АиТ.* 2022. № 4. С. 62–99.
Glushchenko A.I., Lastochkin K.A., Petrov V.A. Exponentially stable adaptive control. Part I. Time-invariant plants // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 4. P. 548–578.
19. *Ortega R., Nikiiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // *Ann. Rev. Control.* 2020. V. 50. P. 278–293.
20. *Katiyar A., Basu Roy S., Bhasin S.* Finite excitation based robust adaptive observer for MIMO LTI systems // *Int. J. Adaptive Control Signal Proc.* 2022. V. 36. No. 2. P. 180–197.
21. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Extended Adaptive Observer for Linear Systems with Overparametrization // *Proceedings of 2023 31st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED).* Limassol: IEEE, 2023. P. 789–794.
22. *Polyak B.T., Smirnov G.* Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems // *Automatica.* 2016. V. 74. P. 297–307.
23. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Parameter Estimation-Based Observer for Linear Systems with Polynomial Overparametrization // *Proceedings of 2023 31st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED).* Limassol: IEEE, 2023. P. 795–799.
24. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ.* 2004. № 11. С. 40–48.
Nikiiforov V.O. Observers of external deterministic disturbances. II. Objects with unknown parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 23.01.2023

После доработки 23.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023