

# Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),  
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ЧАСТЬ III. ОБЪЕКТЫ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ<sup>1</sup>

Предлагается адаптивная система управления по вектору состояний классом линейных систем в канонической управляемой форме с переменными неизвестными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Решение гарантирует глобальную экспоненциальную устойчивость замкнутой системы при конечном возбуждении регрессора, а также не требует априорной информации о знаке коэффициента усиления. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы в рамках математического моделирования.

*Ключевые слова:* адаптивное управление, переменные параметры, параметрическая ошибка, конечное возбуждение, идентификация, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231023110089, EDN: OOHZIG

### 1. Введение

Классические алгоритмы адаптивного беспоискового управления при постоянных неизвестных параметрах объекта гарантируют асимптотическую устойчивость ошибки слежения (разницы между регулируемыми координатами и координатами эталонной модели) [1]. Однако в приложениях реальные физические системы часто описываются моделями с переменными параметрами. В этих условиях стандартные решения встречают сложности, связанные с необходимостью компенсации в производной функции Ляпунова слагаемого, пропорционального скорости изменения неизвестных параметров [1, с. 552].

Если неизвестные переменные параметры экспоненциально сходятся к постоянному значению, то асимптотическая устойчивость ошибки слежения со-

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

храняется [2, с. 339]. При произвольном изменении неизвестных параметров и выполнении ограничительного условия не исчезающего возбуждения регрессора базовые решения гарантируют ограниченность всех сигналов и сходимость ошибки слежения в ограниченную область. Если упомянутое условие не выполняется, то применение робастных модификаций базовых законов позволяет обеспечить аналогичные свойства замкнутой системы [1, 2].

Рассмотрим основные существующие подходы к улучшению свойств базовых решений.

В [3, 4] предлагается метод «заморозки переменных — *congelation of variables*», позволяющий заменить задачу оценки переменных неизвестных параметров задачей оценки их постоянного математического ожидания. Оценка сверху на величину дисперсии параметров считается известной, а управление строится с применением статического нелинейного демпфирования. В этой схеме закон адаптации компенсирует влияние математического ожидания неизвестных параметров, а нелинейный демпфер обеспечивает подавление влияния дисперсии. Решение обеспечивает асимптотическую устойчивость ошибки слежения и ограниченность всех сигналов замкнутой системы. Недостатком описанного метода является использование в управлении степенных функций от координат объекта (регрессора) [5, с. 222–223]. В качестве еще одного недостатка метода заморозки переменных выделяют [6] невозможность компенсации параметрической неопределенности вида  $\theta(t)\varphi(x(t))$  с  $\varphi(0) \neq 0$ .

В [7–9] предложен подход, основанный на использовании комбинированных законов адаптации, в которых настройка параметров осуществляется с использованием ошибки слежения и ошибки предсказания. По сравнению с базовыми решениями [1, 2] комбинированные законы при тех же допущениях (выполнение условия не исчезающего возбуждения регрессора или применение робастных модификаций) обеспечивают сходимость ошибки слежения в область меньшего размера. В отличие от метода заморозки переменных [3, 4] асимптотическая устойчивость не достигается. Подробный обзор некоторых комбинированных законов идентификации переменных параметров приведен во введении [10].

Также стоит отметить исследования [11–15]. В [11] предлагается простая схема настройки среднегеометрического корня замкнутой системы, гарантирующая асимптотическую устойчивость ошибки слежения. Недостатком решения является необходимость знания коэффициента усиления объекта. В [12] разработан закон адаптации с астатизмом первого порядка, расширяющий применимость базовых законов настройки на класс систем с линейным изменением неизвестных параметров. В [13–15] предлагается схема робастного управления нестационарными линейными системами в форме вход-выход. Ограничением подхода является необходимость знания знака высокочастотного коэффициента усиления объекта и оценок сверху на все неизвестные переменные параметры системы.

Рассмотренные подходы [3–15], не используют априорную информацию о функциональном характере изменения неизвестных параметров системы. Однако, как известно [16], учет такой информации может существенно улучшить свойства замкнутой системы. Недавно в [17, 18] был предложен основанный на параметрической идентификации наблюдатель состояний нестационарных систем. Параметры системы описываются известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Задача оценки состояний системы приводится к задаче идентификации начальных условий генераторов и объекта. При выполнении условия конечного возбуждения регрессора (наблюдаемости системы на конечном интервале) гарантируется экспоненциальная или финитная сходимости параметрической ошибки и ошибки наблюдения.

На основе результатов [17, 18] в этой работе предлагается свести задачу управления к задаче оценки начальных условий генераторов параметров системы.

Рассматривается класс линейных полностью управляемых систем с переменными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями. Разница между идеальным и формируемым управлением представляется в виде линейного регрессионного уравнения с неизвестным регрессором относительно неизвестных начальных условий генераторов. Затем по измеряемым состояниям и управлению в соответствии с результатами [18] строится измеримое регрессионное уравнение со скалярным невырожденным регрессором относительно начальных условий генераторов. По полученной регрессии с использованием результатов первой части [19] вводится закон настройки, в отличие от [3–15] при конечном возбуждении регрессора гарантирующий экспоненциальную сходимости ошибки слежения к нулю.

Предложенное расширение результатов первой части [19] на класс систем с переменными параметрами, кроме конечного возбуждения регрессора, дополнительно требует:

- знания оценок снизу и сверху на модуль коэффициента усиления объекта;
- постоянства знака коэффициента усиления;
- использования проекционного оператора, предотвращающего деление на ноль в управлении.

По сравнению с [3–11, 13–15] предложенный подход требует знания матриц состояний и выхода нестационарных генераторов, а значит и физической природы процессов, вызывающих изменения параметров системы.

#### *Основные определения*

При доказательстве теорем и утверждений будут использованы определение конечного возбуждения регрессора и следствие из леммы Калмана–Якубовича–Попова [1, 2].

*Определение 1.* Регрессор  $\omega(t)$  возбуждается конечно  $\omega(t) \in FE$  на отрезке  $[t_r^+; t_e]$ , если существуют  $t_r^+ \geq 0$ ,  $t_e > t_r^+$  и  $\alpha$  такие, что верно неравенство

$$(1.1) \quad \int_{t_r^+}^{t_e} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_{n \times n},$$

где  $\alpha > 0$  — степень возбуждения,  $I_{n \times n}$  — единичная матрица.

*Следствие 1.* Для любой матрицы  $D > 0$  управляемой пары  $(A, B)$  с  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , гурвицевой матрицей  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  существуют матрицы  $P = P^T > 0$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$  и число  $\mu > 0$  такие, что

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A^T P + PA &= -QQ^T - \mu P, & PB &= QK, \\ K^T K &= D + D^T. \end{aligned}$$

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим класс непрерывных линейных систем с переменными параметрами<sup>2</sup>:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(t_0^+) &= x_0, \\ A(t) &= A_0 + e_1 \vartheta^T(t), & B(t) &= e_1 \beta(t), \\ A_0 &= \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0_{1 \times n} & \end{bmatrix}, & e_1 &= \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — координаты состояния с неизвестными начальными условиями  $x_0$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}$  — управляющее воздействие,  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — известная матрица состояний,  $B(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^n$  — неизвестные векторы,  $t_0^+$  — известный начальный момент времени. Пара  $(A(t), B(t))$  полностью управляема для всех  $t \geq t_0^+$  в смысле критерия [20].

Относительно неизвестных переменных параметров системы (2.1) принимаются следующие допущения.

*Допущение 1.* Векторы  $\vartheta(t)$ ,  $B(t)$  ограничены, непрерывны и формируются нестационарными генераторами<sup>3</sup>:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_\vartheta(t) = \mathcal{A}_\vartheta(t)x_\vartheta(t), & x_\vartheta(t_0^+) = x_{\vartheta_0}, \\ \vartheta(t) = h_\vartheta x_\vartheta(t), \\ \dot{x}_B(t) = \mathcal{A}_B(t)x_B(t), & x_B(t_0^+) = x_{B_0}, \\ B(t) = h_B x_B(t), \end{cases}$$

<sup>2</sup> Результаты могут быть обобщены на МИМО системы в случае, если известна конкретная структура матриц  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

<sup>3</sup> Матрицы  $\mathcal{A}_\vartheta(t)$ ,  $\mathcal{A}_B(t)$  в общем случае могут нелинейно зависеть от состояний системы  $x(t)$ .

где  $x_{\vartheta}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta}}$ ,  $x_B(t) \in \mathbb{R}^{n_B}$  — координаты генераторов с неизвестными начальными условиями  $x_{\vartheta}(t_0^+)$ ,  $x_B(t_0^+)$ ,  $h_{\vartheta} \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta} \times n_{\vartheta}}$ ,  $h_B \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$ ;  $\mathcal{A}_{\vartheta}(t) \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta} \times n_{\vartheta}}$ ,  $\mathcal{A}_B(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$  — известные векторы и матрицы.

*Допущение 2.* Для  $|\beta(t)|$  известны оценки снизу  $\beta_{\min} > 0$  и сверху  $\beta_{\max} > \beta_{\min}$ .

*Допущение 3.* Коэффициент усиления  $\beta(t)$  имеет постоянный, но неизвестный знак ( $\text{sgn}(\beta(t)) = \text{const}$ ).

Требуемое качество управления в замкнутой управлением  $u(t)$  системе (2.1) зададим эталонной моделью с постоянными параметрами:

$$(2.3) \quad \forall t \geq t_0^+ \quad \dot{x}_{ref}(t) = A_{ref}x_{ref}(t) + B_{ref}r(t), \quad x_{ref}(t_0^+) = x_{0ref},$$

где  $x_{ref}(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор координат состояния эталонной модели с известными начальными условиями  $x_{0ref}$ ;  $r(t) \in \mathbb{R}$  — сигнал задания;  $A_{ref} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — гурвицева матрица состояний эталонной модели;  $B_{ref} \in \mathbb{R}^n$  — вектор коэффициентов усиления эталонной модели.

Для объекта (2.1) и эталонной модели (2.3) при управляемости пары  $(A(t), B(t))$  и выполнении допущения 3 возможно предположить выполнение условия идеального отслеживания.

*Допущение 4.* Существуют матрица  $K_x(t) = A_{ref} - A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и вектор  $K_r(t) = [B^T(t)B(t)]^{-1}B^T(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  такие, что верно

$$(2.4) \quad A(t) + B(t)K_r(t)K_x(t) = A_{ref}, \quad B(t)K_r(t)B_{ref} = B_{ref}.$$

С учетом допущения 2 уравнение в отклонениях между уравнением объекта (2.1) и эталонной модели (2.3) имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) &= A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)u(t) - (A_{ref} - A(t))x(t) - B_{ref}r(t) = \\ &= A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)(u(t) - u^*(t)), \end{aligned}$$

где  $e_{ref}(t) = x(t) - x_{ref}(t)$ ,  $u^*(t) = K_r(t)(K_x(t)x(t) + B_{ref}r(t))$ .

Требуется построить закон управления  $u(t)$ , гарантирующий достижение цели экспоненциального регулирования:

$$(2.6) \quad \Phi(t) \in \text{FE} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{ref}(t)\| = 0 \text{ (exp)},$$

где  $\Phi(t)$  — некоторый обобщенный вектор измеримых сигналов.

*Замечание 1.* Допущение 1 из общего класса линейных систем с переменными параметрами выделяет группу систем, для которых в работе ставится и решается задача экспоненциального регулирования (2.6). В предложенном решении задачи используется информация о  $\beta_{\max} > \beta_{\min} > 0$ , что требует принятия допущения 2. Математическое моделирование показывает возможность выбора  $\beta_{\max} \rightarrow \infty$ ,  $\beta_{\min} \rightarrow 0$ , что несколько ослабляет строгость этого требования. Допущение 3 гарантирует непрерывность коэффициентов  $K_x(t)$ ,  $K_r(t)$  управления  $u^*(t)$ . Допущение 4 накладывает тре-

бование структурного соответствия матриц эталонной модели (2.3) матрицам объекта (2.1).

*Замечание 2.* Системы (2.1) с согласованной параметрической неопределенностью (2.4) часто встречаются на практике. Например, уравнения динамики углов Эйлера твердого тела при допущении его симметричности описываются звеном второго порядка с согласованной неопределенностью. Другим хорошим примером задачи управления при согласованных неопределенностях является регулирование координат манипулятора в формализме Эйлера–Лагранжа.

### 3. Основной результат

В разделе 3.1 поставленную задачу экспоненциального регулирования (2.6) сведем к задаче идентификации начальных условий  $x_{B_0}, x_{\vartheta_0}$ . В разделе 3.2 из измеримых сигналов составим регрессионное уравнение относительно  $x_{B_0}, x_{\vartheta_0}$  и введем закон идентификации, доставляющий выполнение цели (2.6).

#### 3.1. Параметризация управления

Запишем управление  $u^*(t)$  через измеримые состояния объекта (2.1), (2.2) и неизвестные параметры  $x_{B_0}, x_{\vartheta_0}$ . Для этого получим решения уравнений (2.2):

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} \vartheta(t) &= h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta}(t) x_{\vartheta_0}, \\ B(t) &= h_B \Phi_B(t) x_{B_0}, \end{aligned}$$

где при выполнении допущений 2 и 3 выполняется неравенство

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} 0 < \beta_{\min}^2 &\leq x_{B_0}^T G(t) x_{B_0} \leq \lambda_{\max}(G(t)) \|x_{B_0}\|^2, \\ G(t) &= \Phi_B^T(t) h_B^T h_B \Phi_B(t), \end{aligned}$$

а фундаментальные матрицы  $\Phi_{\vartheta}(t)$  и  $\Phi_B(t)$  измеримы и определены уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\vartheta}(t) &= \mathcal{A}_{\vartheta}(t) \Phi_{\vartheta}(t), & \Phi_{\vartheta}(t_0^+) &= I_{n_{\vartheta}}, \\ \dot{\Phi}_B(t) &= \mathcal{A}_B(t) \Phi_B(t), & \Phi_B(t_0^+) &= I_{n_B}. \end{aligned}$$

С учетом (2.4) и (3.1.1) можем переписать уравнение идеального управления  $u^*(t)$  в требуемом виде

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} u^*(t) &= K_r(t) (K_x(t)x(t) + B_{ref}r(t)) = \\ &= \frac{x_{B_0}^T \Phi_B^T(t) h_B^T}{x_{B_0}^T \Phi_B^T(t) h_B^T h_B \Phi_B(t) x_{B_0}} \left( (A_{ref} - A_0)x(t) - e_1 \vartheta^T(t)x(t) + B_{ref}r(t) \right) = \\ &= \frac{x_{B_0}^T \Phi_B^T(t) h_B^T}{F(t)} e_1 \left( e_1^T (A_{ref} - A_0)x(t) - x_{\vartheta_0}^T \Phi_{\vartheta}^T(t) h_{\vartheta}^T x(t) + e_1^T B_{ref}r(t) \right), \end{aligned}$$

где  $F(t) = x_{B_0}^T G(t) x_{B_0} > 0$ .

Поскольку в соответствии с описанием системы (2.5) параметры  $x_{B_0}$  и  $x_{\vartheta_0}$  неизвестны, то выражение (3.1.3) мотивирует использование управления с настраиваемыми параметрами:

$$(3.1.4) \quad u(t) = \frac{\hat{x}_{B_0}^T(t)\Phi_B^T(t)h_B^T}{\hat{F}(t)} e_1 \left( e_1^T (A_{ref} - A_0) x(t) - \hat{x}_{\vartheta_0}^T(t)\Phi_{\vartheta}^T(t)h_{\vartheta}^T x(t) + e_1^T B_{ref} r(t) \right),$$

где  $\hat{F}(t) = \hat{x}_{B_0}^T(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t)$ .

*Утверждение 1. Ошибка  $u(t) - u^*(t)$  между формируемым (3.1.4) и идеальным управлением (3.1.3) имеет вид*

$$(3.1.5) \quad u(t) - u^*(t) = \tilde{\theta}^T(t)\omega(t),$$

где  $\tilde{\theta}(t) = [\tilde{x}_{\vartheta_0}^T(t) \ \tilde{x}_{B_0}^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta}+n_B}$  — параметрическая ошибка,  $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n_{\vartheta}+n_B}$  — неизмеримый регрессор.

Доказательство утверждения 1 и функциональное определение регрессора  $\omega(t)$  приведены в Приложении.

Подставив (3.1.5) в (2.5), имеем:

$$(3.1.6) \quad \dot{e}_{ref}(t) = A_{ref}e_{ref}(t) + B(t)\tilde{\theta}^T(t)\omega(t).$$

Тогда в соответствии с результатами первой части работы требуется определить преобразования

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \mathcal{F}_1(t, x(t), u(t), \Phi_{\vartheta}(t), \Phi_B(t)), \quad z(t) = \mathcal{F}_2(x(t)), \\ \dot{\hat{\theta}}(t) &= \mathcal{G}(\Phi(t), z(t)), \end{aligned}$$

совместно гарантирующие достижение цели экспоненциального регулирования в расширенном пространстве ошибок:

$$(3.1.7) \quad \Phi(t) \in FE \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0 \quad (\exp),$$

где  $\xi(t) = [e_{ref}^T(t) \ \tilde{\theta}^T(t)]^T$  — обобщенная ошибка слежения.

### 3.2. Синтез адаптера

Получим регрессионное уравнение относительно неизвестных постоянных параметров  $x_{B_0}$  и  $x_{\vartheta_0}$  идеального закона управления (3.1.3). Результат такой параметризации представим в виде утверждения.

*Утверждение 2. На основании состояний набора фильтров ( $A_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — гурвицева матрица)*

$$(3.2.1) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_K \hat{x}(t) - A_K x(t), \quad \hat{x}(t_0^+) = 0_n, \\ \dot{\varphi}(t) &= A_K \varphi(t) + e_1 x^T(t) h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta}(t), \quad \varphi(t_0^+) = 0_{n \times n_{\vartheta}}, \\ \dot{\psi}(t) &= A_K \psi(t) + h_B \Phi_B(t) u(t), \quad \psi(t_0^+) = 0_{n \times n_B}, \\ \dot{v}(t) &= A_K v(t) + A_0 x(t), \quad v(t_0^+) = 0_n, \end{aligned} \quad A_K = \begin{bmatrix} K \in \mathbb{R}^n & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix},$$

процедур нормализации

$$(3.2.2) \quad z(t) := \frac{e_1^T (x(t) - \bar{x}(t) - v(t))}{1 + \Phi^T(t)\Phi(t)} \quad \Psi^T(t) := \frac{\Phi^T(t)}{1 + \Phi^T(t)\Phi(t)},$$

$$\Phi^T(t) := \left[ e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} \quad e_1^T \varphi(t) \quad e_1^T \psi(t) \right],$$

динамического расширения

$$(3.2.3a) \quad \dot{\Delta}(t) = e^{-\sigma(t-t_0^+)} \Psi(t) \Psi^T(t), \quad \Delta(t_0^+) = 0_{(n_\vartheta+n_B+n) \times (n_\vartheta+n_B+n)},$$

$$(3.2.3b) \quad \dot{y}(t) = e^{-\sigma(t-t_0^+)} \Psi(t) z(t), \quad y(t_0^+) = 0_{(n_\vartheta+n_B+n)}$$

и смешивания

$$(3.2.3c) \quad Y(t) := \text{adj} \{ \Delta(t) \} y(t), \quad \Omega(t) := \det \{ \Delta(t) \}$$

имеем регрессионное уравнение относительно параметров  $x_{B_0}$  и  $x_{\vartheta_0}$ :

$$(3.2.4) \quad \Upsilon(t) := \mathfrak{L} Y(t) = \Omega(\Phi(t)) \theta, \quad \mathfrak{L} = \left[ 0_{(n_\vartheta+n_B) \times n} \quad I_{(n_\vartheta+n_B) \times (n_\vartheta+n_B)} \right],$$

где если  $\Phi(t) \in \text{FE}$ , то  $\forall t \geq t_e$  верно неравенство  $\Omega_{UB}(t) \geq \Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0$ .

Доказательство утверждения 2 приведено в Приложении.

По уравнению (3.2.4) в соответствии с результатами теоремы 1 из [19] при измеримом  $\omega(t)$  возможно ввести закон настройки, гарантирующий достижение цели (3.1.7). В следующей теореме опишем закон настройки, решающий задачу (3.1.7) при неизмеримом  $\omega(t)$ .

*Теорема 1.* Пусть выполнены допущения 1–4 и  $\Phi(t) \in \text{FE}$ , тогда закон настройки

$$(3.2.5) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma(t)\Omega(t) \left( \Omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t) \right) = -\gamma(t)\Omega^2(t)\tilde{\theta}(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0,$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega(t) < \rho \in (0; \Omega_{LB}], \\ \frac{\gamma_0 \lambda_{\max}(\hat{\omega}(t)\hat{\omega}^T(t)) + \gamma_1}{\Omega^2(t)} & \text{иначе} \end{cases}$$

при выборе  $\gamma_0 > 0$ ,  $\gamma_1 \geq 0$  гарантирует:

- 1)  $\left| \tilde{\theta}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\theta}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b$ ;
- 2)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0}) \\ |V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t)x_{B_0}| \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}(t) > 0$ ;
- 3)  $\forall t \geq t_0^+$  ограниченность  $\xi(t) \in L_\infty$ ;
- 4) экспоненциальную сходимость  $\xi(t)$  к нулю для всех  $t \geq t_e$ .



Доказательство теоремы и определение величин  $V_1(t)$ ,  $\hat{\omega}(t)$  приведены в Приложении.

При невыполнении условий второго пункта теоремы в управлении (3.1.4) возможно деление на ноль. Поэтому на практике закон управления (3.1.4) следует дополнить проекционным оператором:

$$(3.2.6) \quad u(t) = \frac{\hat{x}_{B_0}^T(t)\Phi_B^T(t)h_B^T}{\hat{F}_{\text{prj}}(t)}e_1 \times \\ \times (e_1^T(A_{ref} - A_0)x(t) - \hat{x}_{\vartheta_0}^T(t)\Phi_{\vartheta}^T(t)h_{\vartheta}^T x(t) + e_1^T B_{ref}r(t)), \\ \hat{F}_{\text{prj}}(t) := \begin{cases} \hat{x}_{B_0}^T(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t), & \text{если } \hat{x}_{B_0}^T(t)G(t)\hat{x}_{B_0}(t) > \beta_{\min}^2 > 0, \\ \beta_{\min}^2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предложенные преобразования  $\mathcal{F}_1(\cdot)$  и  $\mathcal{F}_2(\cdot)$  описываются выражениями (3.2.1), (3.2.2), а преобразование  $\mathcal{G}(\cdot)$  — соответственно (3.2.3)–(3.2.5). В целом разработанная адаптивная система управления состоит из закона управления (3.1.4), процедур обработки измеримых сигналов (3.2.1)–(3.2.4) и закона адаптации (3.2.5). Фильтрация (3.2.1) позволяет по измеримым сигналам  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\Phi_{\vartheta}(t)$ ,  $\Phi_B(t)$  построить статическое регрессионное уравнение относительно неизвестных параметров  $x_{B_0}$ ,  $x_{\vartheta_0}$ ,  $x_0$ . Нормализация (3.2.2) гарантирует ограниченность регрессора  $\Psi(t)$ , что по доказанному в утверждении 1 из [19] достаточно для ограниченности сверху  $\Omega(t)$ . Процедуры расширения и смешивания (3.2.3) позволяют перейти от векторного регрессора  $\Psi(t)$  сначала к матричному  $\Delta(t)$ , а затем и к скалярному  $\Omega(t)$ . Деление в законе настройки (3.2.5) на  $\Omega^2(t)$  является безопасной операцией в силу  $\Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0$  и при правильном выборе параметра  $\rho$  позволяет обеспечить заданное величиной  $\gamma_0\lambda_{\max}(\hat{\omega}(t)\hat{\omega}^T(t)) + \gamma_1$  значение скорости сходимости параметрической ошибки  $\hat{\theta}(t)$  к нулю.

Согласно результатам теоремы предложенная система, в отличие от большинства известных подходов [3–15] к управлению линейными системами с переменными параметрами, обеспечивает экспоненциальное регулирование (2.6).

*Замечание 3.* Использование проекционного оператора (3.2.6) является классическим и хорошо известным приемом для устранения сингулярности в схемах адаптивного управления (см., например, [1, с. 400]). При выполнении условий второго пункта теоремы выбор  $\beta_{\min} \rightarrow 0$  обеспечивает отсутствие переключений в (3.2.6). В противном случае выбор  $\beta_{\min} \rightarrow 0$  гарантирует конечное число переключений.

*Замечание 4.* На интервале  $[t_0^+; t_e]$  или при  $\Phi(t) \notin \text{FE}$  контур настройки (3.2.5) параметров управления (3.1.4) разомкнут, а при произвольном выборе начальных условий  $\hat{\theta}(t_0^+)$  качество управления может быть произвольно плохим вплоть до потери устойчивости. Поэтому на практике при использовании предложенной адаптивной системы:

и) выбор начальных условий  $\hat{\theta}(t_0^+)$  должен осуществляться с применением техник робастного управления таким образом, чтобы было априорно известно об асимптотической устойчивости системы

$$\dot{x}(t) = \left( A(t) + B(t)\hat{K}_r(t)\hat{K}_x(t) \right) x(t) \text{ при } \dot{\hat{\theta}}(t) \equiv 0 \text{ для всех } t \geq t_0^+,$$

ii) закон управления (3.1.4) должен быть снабжен дополнительной робастной составляющей, гарантирующей ограниченность ошибки  $\xi(t)$  и удовлетворительное качество управления.

Например, а) при известном  $\text{sgn}(\beta(t))$  и оценках  $\beta_{\min}$ ,  $\beta_{\max}$  можно использовать закон управления

$$u(t) = \{(3.1.4), (3.2.6)\} - \gamma_3 \text{sgn}(\beta(t)) e_{ref}(t) P e_1 \hat{w}(t) \hat{w}^T(t), \quad \gamma_3 > 0$$

(см. лемму 2.2 из [5]), б) при неизвестном  $\text{sgn}(\beta(t))$ , но известных оценках  $\beta_{\min}$ ,  $\beta_{\max}$  можно воспользоваться управлением с демпфером и функцией Нуссбаума [21]:

$$u(t) = \{(3.1.4), (3.2.6)\} - \gamma_3 N(w(t)) e_{ref}^T(t) P e_1 \hat{w}(t) \hat{w}^T(t), \quad \gamma_3 > 0,$$

$$N(w(t)) = w^2(t) \cos(w(t)),$$

$$\dot{w}(t) = \gamma_3 \gamma_4 e_{ref}^T(t) P e_1 e_1^T P e_{ref}(t) \hat{w}(t) \hat{w}^T(t), \quad \gamma_4 > 0.$$

#### 4. Численное моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенной адаптивной системы управления при выполнении и нарушении условий второго пункта теоремы. Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование явным методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации  $\tau_s = 10^{-4}$  с.

$$4.1. \text{sgn}(V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t) x_{B_0})$$

$$u |V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t) x_{B_0}|$$

Матрицы объекта управления (2.1) для всех  $t \geq 0$  зададим следующим образом:

$$(4.1.1) \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \sin(a_2 t) & a_4 e^{a_3 t} + a_5 (1 - e^{a_3 t}) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \cos(b_2 t) + b_4 e^{b_3 t} + b_5 \end{bmatrix}, \quad x(t_0^+) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = b_3 = -0,25$ ,  $b_2 = \sqrt{12}$  — известные постоянные,  $a_1 = -10$ ,  $a_4 = 1$ ,  $a_5 = 7$ ,  $b_1 = 0,25$ ,  $b_4 = -2$ ,  $b_5 = -4$  — неизвестные постоянные.

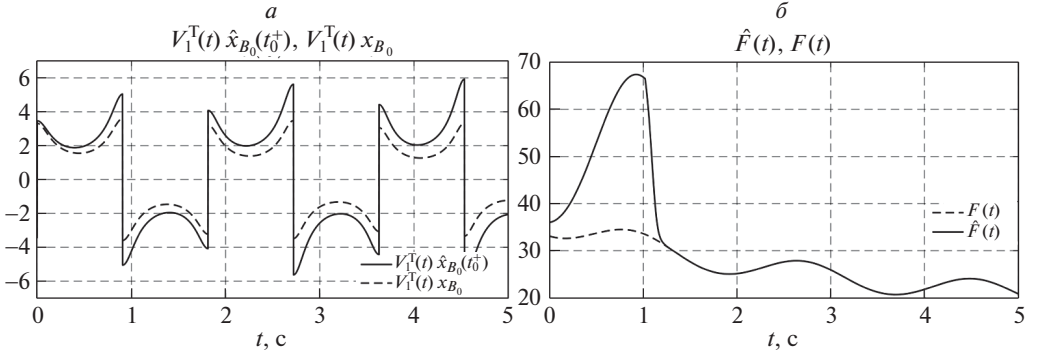


Рис. 1. Переходные процессы по  $V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)$  и  $V_1^T(t)x_{B_0}$  — а,  $\hat{F}(t)$  и  $F(t)$  — б.

Тогда матрицы и начальные условия генераторов (2.2) примут вид:

$$(4.1.2) \quad \mathcal{A}_\vartheta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_{\vartheta_0} = \begin{bmatrix} -a_1 a_2 \\ 0 \\ a_4 - a_5 \\ a_5 \end{bmatrix}, \quad h_\vartheta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}, \quad x_{B_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_5 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad h_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы эталонной модели (2.3), параметры фильтров (3.2.1), (3.2.3) и некоторые параметры закона настройки (3.2.5) установим следующим образом:

$$(4.1.3) \quad A_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad A_K = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = 5,$$

$$\rho = 10^{-62}, \quad \beta_{\min} = 0,1, \quad \beta_{\max} = 10, \quad \gamma_0 = 10^{-8}, \quad \gamma_1 = 0,$$

$$\hat{\theta}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -8 \ 1]^T.$$

Прежде всего проверим выполнение в эксперименте требований второй части теоремы. На рис. 1 представлено сравнение функций  $V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)$  и  $V_1^T(t)x_{B_0}$ , и  $\hat{F}(t)$  с  $F(t)$ .

Разрывы на рис. 1 вызваны изменением направления собственного вектора  $V_1(t)$  (переходом элементов матрицы  $G(t)$  через ноль). Из рис. 1,а следует, что сделанный выбор начальных условий (4.1.3) гарантирует в проводимом эксперименте выполнение условий второго пункта теоремы. Совместно рис. 1,а и 1,б подтверждают импликацию

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0}) \\ |V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t)x_{B_0}| \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{F}(t) > 0.$$

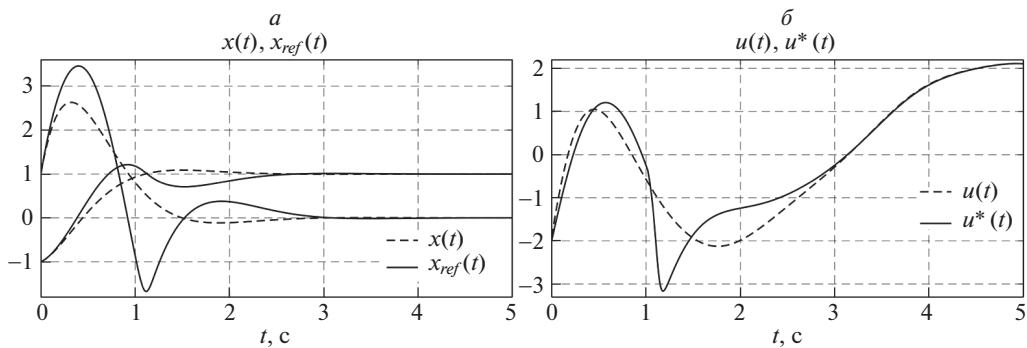


Рис. 2. Переходные процессы по  $x(t)$  и  $x_{ref}(t)$  — а,  $u^*(t)$  и  $u(t)$  — б.

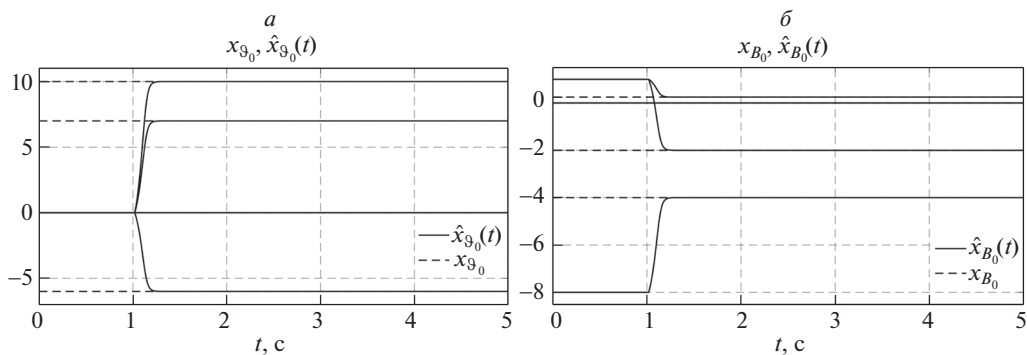


Рис. 3. Переходные процессы по  $x_{\vartheta_0}$  и  $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$  — а,  $x_{B_0}$  и  $\hat{x}_{B_0}(t)$  — б.

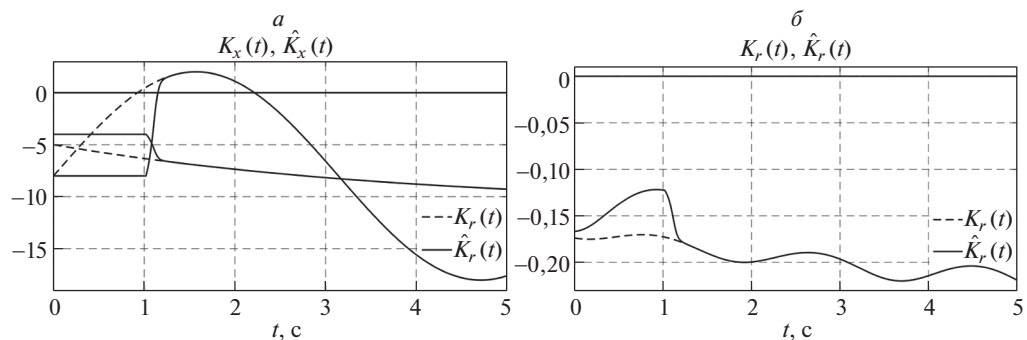


Рис. 4. Переходные процессы по  $\hat{K}_x(t)$  и  $K_x(t)$  — а,  $\hat{K}_r(t)$  и  $K_r(t)$  — б.

Удостоверившись в выполнении условия  $\hat{F}(t) > 0$ , продолжим моделирование адаптивной системы. На рис. 2,а приведено сравнение координат состояния эталонной модели  $x_{ref}(t)$  (при  $x_{0ref} = x_0$ ) и координат объекта управления  $x(t)$ , а на рис. 2,б идеального  $u^*(t)$  и настраиваемого  $u(t)$  управлений.

На рис. 3,а приведены сравнения параметров  $x_{\vartheta_0}$  и  $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$ , на рис. 3,б —  $x_{B_0}$  и  $\hat{x}_{B_0}(t)$ .

На рис. 4 приведены сравнения параметров  $K_x(t)$ ,  $K_r(t)$  и их оценок  $\hat{K}_x(t)$ ,  $\hat{K}_r(t)$ , рассчитанных с помощью  $\hat{x}_{\vartheta_0}(t)$ ,  $\hat{x}_{B_0}(t)$ .

Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы, полученные в теореме 1. Действительно, при  $\gamma_0 > 0$ ,  $\gamma_1 \geq 0$  предложенная адаптивная система гарантирует достижение поставленной цели (2.6).

Переходные процессы, представленные на рис. 2–4, подтверждают отмеченный в замечании 3 недостаток предложенной системы. На интервале  $[0; 1]$  система управления функционирует с разомкнутым контуром адаптации (3.2.5), что приводит к осцилляциям по  $x(t)$ .

$$4.2. \operatorname{sgn} (V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn} (V_1^T(t)x_{B_0})$$

Рассмотрим тот же объект управления (4.1.1), (4.1.2) при тех же параметрах (4.1.3) эталонной модели (2.3), фильтров (3.2.1), (3.2.3), закона настройки (3.2.5), но при более реалистичном для практики сценарии  $\operatorname{sgn} (V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn} (V_1^T(t)x_{B_0})$ . Будем использовать модифицированный закон управления (3.2.6) и в соответствии с результатами первой серии экспериментов установим  $\gamma_0 = 10^{-10}$ ,  $\gamma_1 = 10$  и  $\beta_{\min} = 1$ ,  $\rho = 10^{-81}$ ,  $\hat{\theta}_0 = [0 \ -8 \ -2 \ -2 \ 0 \ 1 \ -8 \ 1]^T$ .

На рис. 5 представлено сравнение функций  $V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)$  и  $V_1^T(t)x_{B_0}$ , а также  $\hat{F}(t)$ ,  $\hat{F}_{\text{прj}}(t)$  с  $F(t)$ .

Разрывы на рис. 5 вызваны изменением направления собственного вектора  $V_1(t)$  (переходом элементов матрицы  $G(t)$  через ноль). Из рис. 5,а следует, что сделанный выбор начальных условий доставляет выполнение условию  $\operatorname{sgn} (V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn} (V_1^T(t)x_{B_0})$ . Рисунок 5,б демонстрирует работу проекционного оператора (3.2.6). Совместно рис. 5,а и 5,б подтверждают импликацию

$$\operatorname{sgn} (V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \operatorname{sgn} (V_1^T(t)x_{B_0}) \Rightarrow \hat{F}(t) \geq 0.$$

На рис. 6 приведено сравнение координат эталонной модели  $x_{ref}(t)$  (при  $x_{0ref} = x_0$ ) и координат объекта управления  $x(t)$ , а также параметров  $K_x(t)$ ,  $K_r(t)$  и оценок  $\hat{K}_x(t)$ ,  $\hat{K}_r(t)$ .

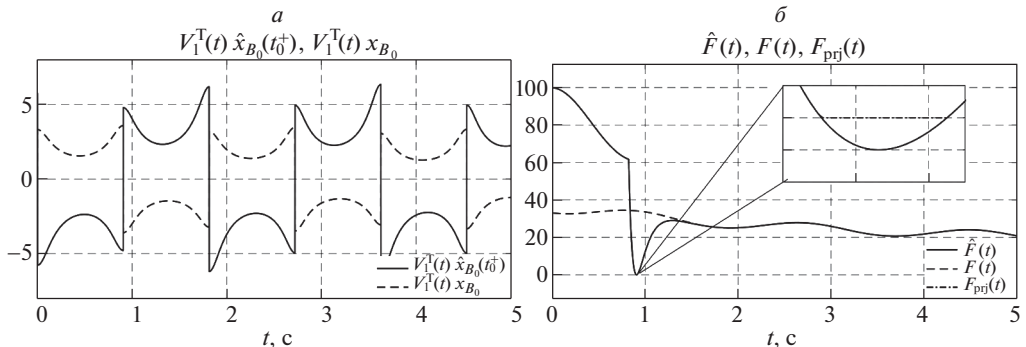


Рис. 5. Переходные процессы по  $\hat{\Theta}_0^i(t)$  и  $\Theta_0^i(t)$  — а,  $\hat{F}(t)$ ,  $\hat{F}_{\text{прj}}(t)$  и  $F(t)$  — б.

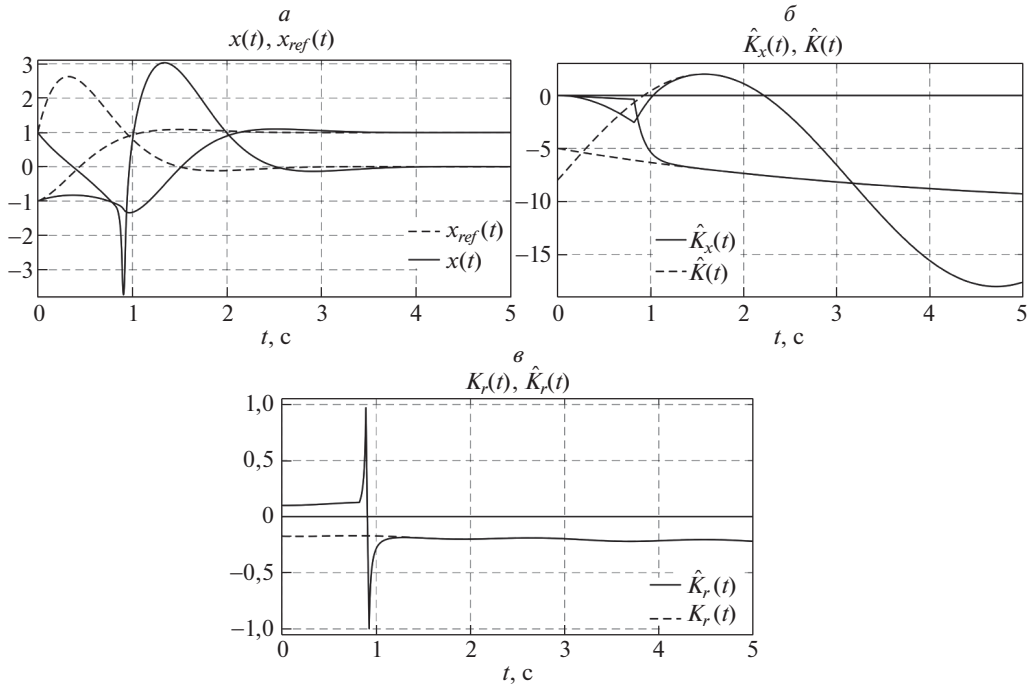


Рис. 6. Сравнение:  $x(t)$  и  $x_{ref}(t)$  — а,  $K_x(t)$  и  $\hat{K}_x(t)$  — б,  $K_r(t)$  и  $\hat{K}_r(t)$  — в.

Результаты эксперимента подтверждают способность настраиваемого закона управления (3.2.6) эффективно противостоять возможному делению на ноль при  $\text{sgn}(V_1^T(t)\hat{x}_{B_0}(t_0^+)) \neq \text{sgn}(V_1^T(t)x_{B_0})$ .

Проведенные эксперименты полностью подтвердили теоретические выводы, сделанные в теореме 1, замечаниях 3 и 4.

## 5. Заключение

Результаты первой части работы распространены на класс линейных систем с переменными неизвестными параметрами, описываемыми известными нестационарными генераторами с неизвестными начальными условиями.

Для этого класса систем предложено управление, решающее задачу отслеживания траекторий стационарной эталонной модели нестационарным объектом. Такое управление вычисляется по измеримым сигналам и неизвестным начальным условиям генераторов параметров системы. Для идентификации начальных условий генераторов предложен закон идентификации, гарантирующий экспоненциальную устойчивость ошибки слежения  $e_{ref}(t)$  при конечном возбуждении регрессора. Решение не требует знания знаков коэффициента усиления, но требует оценок на его модуль.

Результат имеет общий с [19, 22] недостаток, а именно требует выполнения условия конечного возбуждения регрессора даже для обеспечения ограничен-

ности ошибки слежения. В замечании 4 приведены некоторые способы решения этой проблемы для систем с одним входом. Для систем с несколькими входами обеспечение ограниченности без знания знака элементов матрицы усиления является открытой проблемой.

Целью дальнейших исследований может являться распространение результатов на а) задачи управления по выходу системами с переменными параметрами, б) задачи управления при нарушении условий согласованности, в) системы с несколькими входами.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(t) &= h_{\vartheta} \Phi_{\vartheta}(t) \hat{x}_{\vartheta_0}(t), \\
 \hat{B}(t) &= h_B \Phi_B(t) \hat{x}_{B_0}(t), \\
 v(t) &= e_1^T (A_{ref} - A_0) x(t) + e_1^T B_{ref} r(t).
 \end{aligned}
 \tag{П.1}$$

С учетом (П.1) разность  $u(t) - u^*(t)$  имеет вид (для краткости зависимости от времени временно опущены):

$$\begin{aligned}
 u - u^* &= \frac{\hat{B}^T}{\hat{F}} e_1 (v - \hat{v}^T x) - \frac{B^T}{F} e_1 (v - \vartheta^T x) \pm \\
 \pm \frac{B^T}{F} e_1 (v - \hat{v}^T x) &= -\frac{B^T e_1}{F} \tilde{v}^T x + \left( \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F}} - \frac{B^T e_1}{F} \right) (v - \hat{v}^T x).
 \end{aligned}
 \tag{П.2}$$

Приведем разность  $\frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F}} - \frac{B^T e_1}{F}$  к виду с линейной зависимостью относительно  $\tilde{B}$  и  $\tilde{F}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F}} - \frac{B^T e_1}{F} &= \frac{\hat{B}^T e_1 F \pm \hat{B}^T e_1 \hat{F} - B^T e_1 \hat{F}}{\hat{F} F} = \\
 &= \frac{-\hat{B}^T e_1 (\hat{F} - F) + (\hat{B}^T - B^T) e_1 \hat{F}}{\hat{F} F} = \\
 &= \frac{-\hat{B}^T e_1 \tilde{F} + \tilde{B}^T e_1 \hat{F}}{\hat{F} F} = \frac{-\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \tilde{F} + \frac{\tilde{B}^T e_1}{\hat{F}}.
 \end{aligned}
 \tag{П.3}$$

Рассмотрим ошибку  $\tilde{F}$  отдельно:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F} &= \hat{B}^T \hat{B} - B^T B + B^T \hat{B} - B^T \hat{B} = \\
 &= (\hat{B}^T - B^T) \hat{B} + B^T (\hat{B} - B) = \tilde{B}^T \hat{B} + B^T \tilde{B}.
 \end{aligned}
 \tag{П.4}$$

Подстановка выражений (П.4), (П.3) в (П.2) позволяет получить:

$$\begin{aligned}
 u - u^* &= -\frac{B^T e_1}{F} \tilde{\vartheta}^T x - \left( \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \tilde{B}^T \hat{B} + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T \tilde{B} - \tilde{B}^T \frac{e_1}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) = \\
 &= -\frac{B^T e_1}{F} x^T \tilde{\vartheta} - \left( \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T - \frac{e_1^T}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) \tilde{B} = \\
 \text{(П.5)} \quad &= -\frac{B^T e_1}{F} x^T h_\vartheta \Phi_\vartheta \tilde{x}_{\vartheta_0} - \\
 &\quad - \left( \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T - \frac{e_1^T}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) h_B \Phi_B \tilde{x}_{B_0} = \tilde{\theta}^T \omega,
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\theta} = [\tilde{x}_{\vartheta_0}^T \quad \tilde{x}_{B_0}^T]^T, \quad \omega = \begin{bmatrix} -\left( \frac{B^T e_1}{F} x^T h_\vartheta \Phi_\vartheta \right)^T \\ -\Phi_B^T h_B^T \left[ \left( \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\hat{F} F} B^T - \frac{e_1^T}{F} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) \right]^T \end{bmatrix},$$

что завершает доказательство утверждения 1.

*Доказательство утверждения 2.* Введем в рассмотрение ошибку  $\chi(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ . Дифференцируя  $\chi(t)$  по времени, получим:

$$\begin{aligned}
 \dot{\chi}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t) = \\
 &= A(t)x(t) + B(t)u(t) - A_K \bar{x}(t) + A_K x(t) = \\
 \text{(П.6)} \quad &= A_K (x(t) - \bar{x}(t)) + A(t)x(t) + B(t)u(t) = \\
 &= A_K \chi(t) + A_0 x(t) + e_1 x^T(t) \vartheta(t) + B(t)u(t) = \\
 &= A_K \chi(t) + A_0 x(t) + e_1 x^T(t) h_\vartheta \Phi_\vartheta(t) x_{\vartheta_0} + h_B \Phi_B(t) u(t) x_{B_0}.
 \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (П.6) с учетом домножения на  $e_1^T$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
 e_1^T [\chi(t) - v(t)] &= e_1^T [x(t) - \bar{x}(t) - v(t)] = \\
 &= e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} x(t_0^+) + e_1^T \varphi(t) x_{\vartheta_0} + e_1^T \psi(t) x_{B_0} = \\
 \text{(П.7)} \quad &= e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} x_0 + e_1^T \varphi(t) x_{\vartheta_0} + e_1^T \psi(t) x_{B_0} = \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^T e^{A_K(t-t_0^+)} & e_1^T \varphi(t) & e_1^T \psi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{\vartheta_0} \\ x_{B_0} \end{bmatrix} := \Phi^T(t) \eta.
 \end{aligned}$$



Применив к регрессионному уравнению (П.7) процедуры нормализации (3.2.2), динамического расширения (3.2.3а), (3.2.3б) и смешивания (3.2.3с), пользуясь свойством  $\text{adj} \{ \Delta(t) \} \Delta(t) = \det \{ \Delta(t) \} I_{(n_\vartheta+n_B+n) \times (n_\vartheta+n_B+n)}$ , имеем измеримое регрессионное уравнение (3.2.4).

Доказательство выполнения для всех  $t \geq t_e$  неравенства  $\Omega_{UB}(t) \geq \Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0$  при выполнении условия  $\Phi(t) \in \text{FE}$  было получено в утверждении 4 из [23].

*Доказательство теоремы 1.* Доказательство первой части теоремы совпадает с доказательством первой части теоремы из [19].

В целях доказательства второй части теоремы выполним собственное разложение матрицы  $G(t)$ :

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad F(t) &= x_{B_0}^T V(t) \Lambda(t) V^T(t) x_{B_0} = \\ &= x_{B_0}^T V_1(t) \Lambda_1(t) V_1^T(t) x_{B_0} = \Theta^T(t) \Lambda_1(t) \Theta(t), \\ V(t) &= [V_1(t) \quad V_2(t)], \quad \Lambda(t) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(t) & 0_{r_G(t) \times \bar{r}_G(t)} \\ 0_{\bar{r}_G(t) \times r_G(t)} & 0_{\bar{r}_G(t)} \end{bmatrix}, \\ \Lambda_1(t) &= \text{diag} \{ \lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_{r_G(t)}(t) \}, \quad \lambda_{\min}(\Lambda_1(t)) > 0, \end{aligned}$$

где  $V_1(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times r_G(t)}$ ,  $V_2(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times \bar{r}_G(t)}$ ,  $\Lambda(t) \in \mathbb{R}^{n_B \times n_B}$ ,  $r_G(t) = \text{rank} \{ G(t) \}$ ,  $\bar{r}_G(t) = n_B - r_G(t)$ .

На основании введенного разложения запишем оценку снизу на функцию  $\hat{F}(t)$ :

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad \hat{F}(t) &= \hat{B}^T(t) \hat{B}(t) = \hat{x}_{B_0}^T(t) V_1(t) \Lambda_1(t) V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t) = \\ \text{(П.8)} \quad &= \hat{\Theta}^T(t) \Lambda_1(t) \hat{\Theta}(t) \geq \lambda_{\min}(\Lambda_1(t)) \left\| \hat{\Theta}(t) \right\|^2 > 0. \end{aligned}$$

На основании выражения (П.8) для  $\hat{F}(t) > 0$  необходимо и достаточно удовлетворить неравенство

$$\begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad \left\| \hat{\Theta}(t) \right\|^2 &= \sum_{i=1}^{r_G(t)} \left( \hat{\Theta}_i(t) \right)^2 \neq 0, \\ \text{(П.9)} \quad &\updownarrow \\ \forall i \in \overline{1, r_G(t)} \quad \left| \hat{\Theta}_i(t) \right| &\neq 0, \end{aligned}$$

где  $\hat{\Theta}^i(t)$  —  $i$ -й элемент вектора  $\hat{\Theta}(t) \in \mathbb{R}^{r_G(t)}$ .

Получим для всех  $t \geq t_0^+$  функциональное определение оценки  $\hat{\Theta}_i(t)$ . Для этого решим дифференциальное уравнение (3.2.5)

$$\text{(П.10)} \quad \forall t \geq t_0^+ \quad \tilde{x}_{B_0}(t) = \phi(t, t_0^+) \tilde{x}_{B_0}(t_0^+),$$

умножим (П.10) на  $V_1^T(t)$  и прибавим  $\Theta(t)$  к левой и правой частям произведения:

$$(П.11) \quad \begin{aligned} V_1^T \tilde{x}_{B_0}(t) + \Theta(t) &= \hat{\Theta}(t) = \phi(t, t_0^+) V_1^T(t) \tilde{x}_{B_0}(t_0^+) + \Theta(t), \\ &\quad \updownarrow \\ \hat{\Theta}_i(t) &= \phi(t, t_0^+) \tilde{\Theta}_i^0(t) + \Theta_i(t), \end{aligned}$$

где  $\phi(t, t_0^+) = e^{-\beta_{\max} \int_{t_0^+}^t \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } t < t_e, \\ \gamma_0 \lambda_{\max}(\dot{\omega}(\tau) \dot{\omega}^T(\tau)) + \gamma_1 \text{ иначе} \end{array} \right. d\tau}$ ,  $\tilde{\Theta}_i^0(t) = \hat{\Theta}_i^0(t) - \Theta_i(t)$ ,  $\hat{\Theta}_i^0(t)$  —  $i$ -й элемент вектора  $V_1^T \hat{x}_{B_0}(t_0^+)$ .

Тогда (П.9) выполняется, если верно

$$(П.12) \quad \begin{aligned} \hat{\Theta}_i(t) = \phi(t, t_0^+) \tilde{\Theta}_i^0(t) + \Theta_i(t) \neq 0 &\Rightarrow \phi(t, t_0^+) \tilde{\Theta}_i^0(t) \neq -\Theta_i(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{\text{sgn}(\phi(t, t_0^+))}_{=1} \neq \text{sgn}\left(\frac{-\Theta_i(t)}{\tilde{\Theta}_i^0(t)}\right) &= \text{sgn}\left(\frac{-\Theta_i(t)}{\hat{\Theta}_i^0(t) - \Theta_i(t)}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sgn}(\hat{\Theta}_i^0(t) - \Theta_i(t)) \neq -\text{sgn}(\Theta_i(t)) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \text{sgn}(\hat{\Theta}_i^0(t)) = \text{sgn}(\Theta_i(t)) \right\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ |\hat{\Theta}_i^0(t)| > |\Theta_i(t)| \right\} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \text{sgn}(V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)) = \text{sgn}(V_1^T(t) x_{B_0}) \right\} & \\ \Rightarrow \left\{ |V_1^T(t) \hat{x}_{B_0}(t_0^+)| > |V_1^T(t) x_{B_0}| \right\}, & \end{aligned}$$

что подтверждает справедливость второй части теоремы.

Перейдем к доказательству третьей и четвертой частей теоремы. Согласно следствию из леммы Калмана–Якубовича–Попова для пары  $(A_{ref}, I_{n \times n})$ , любой постоянной матрицы  $D > 0$  найдутся матрицы  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и постоянная  $\mu > 0$ , такие что существует решение системы уравнений

$$(П.13) \quad \begin{aligned} A_{ref}^T P + P A_{ref} &= -Q Q^T - \mu P, \quad P I_{n \times n} = Q K, \\ K^T K &= D + D^T, \end{aligned}$$

или эквивалентного в частном случае  $D = 0,5k^2 I_{n \times n}$ ,  $K = k^2 I_{n \times n}$ ,  $k = 1$  уравнения Риккати

$$(П.14) \quad A_{ref}^T P + P A_{ref} + P P^T + \mu P = 0.$$

Для анализа устойчивости введем следующую квадратичную форму:

$$(II.15) \quad \begin{aligned} V &= \xi^T H \xi = \gamma_0 e_{ref}^T P e_{ref} + \frac{\beta_{\max}^2}{2} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}, \\ H &= \text{blockdiag} \left\{ \gamma_0 P, \quad \frac{\beta_{\max}^2}{2} I_{(n_\vartheta + n_B) \times (n_\vartheta + n_B)} \right\}, \\ \underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\xi\|^2 &\leq V(\|\xi\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\xi\|^2, \end{aligned}$$

где матрица  $P$  соответствует решению системы (II.13) при  $K = k^2 I_{n \times n}$ ,  $D = 0,5k^2 I_{n \times n}$ ,  $k = 1$  или эквивалентному уравнению Риккати (II.14).

Производная квадратичной формы (II.15) в силу уравнений (3.1.6) и (3.2.5) имеет вид

$$(II.16) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \gamma_0 \left[ e_{ref}^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T P B \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= \gamma_0 \left[ -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T Q Q^T e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T P I_{n \times n} B \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= \gamma_0 \left[ -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T Q Q^T e_{ref} + 2\tilde{\theta}^T \omega B^T Q^T e_{ref} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Дополнив выражение (II.16) до полного квадрата, получим:

$$(II.17) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= \gamma_0 \left[ -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T Q Q^T e_{ref} + 2e_{ref}^T Q B \omega^T \tilde{\theta} \pm \right. \\ &\quad \left. \pm 2\tilde{\theta}^T \omega B^T B \omega^T \tilde{\theta} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} = \\ &= \gamma_0 \left[ -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - \left( e_{ref}^T Q - B \omega^T \tilde{\theta} \right)^2 + \tilde{\theta}^T \omega B^T B \omega^T \tilde{\theta} \right] - \\ &\quad - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta} \leq \\ &\leq \gamma_0 \left[ -\mu e_{ref}^T P e_{ref} + \tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} \right] - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \gamma \Omega^2 \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим две ситуации  $t < t_e$  и  $t \geq t_e$ . В первой ситуации, в наиболее консервативном случае, согласно утверждению 1 верно  $\Omega(t) = 0$  и  $\|\tilde{\theta}(t)\| = \|\tilde{\theta}(t_0^+)\|$ .

Тогда для любого  $t < t_e$  можем переписать уравнение (II.17) в виде

$$(II.18) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu \gamma_0 e_{ref}^T P e_{ref} + \gamma_0 \tilde{\theta}^T(t_0^+) \omega F \omega^T \tilde{\theta}(t_0^+) \pm \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\mu \gamma_0 e_{ref}^T P e_{ref} - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} + \gamma_0 \tilde{\theta}^T(t_0^+) \omega F \omega^T \tilde{\theta}(t_0^+) + \\ &\quad + \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T(t_0^+) \tilde{\theta}(t_0^+). \end{aligned}$$

Введем понятие максимального собственного числа матрицы  $\omega(t)B^T(t)B(t)\omega^T(t)$  на интервале времени  $[0; t_e]$ :

$$(II.19) \quad \delta = \sup_{\forall t < t_e} \max \lambda_{\max}(\omega(t)B^T(t)B(t)\omega^T(t)).$$

Функция  $F(t)$  ограничена по допущению 2, скорость изменения регрессора  $\omega(t)$  при выполнении допущения 1 не превосходит экспоненциальной, а поэтому верно  $\delta \in L_\infty$ .

С учетом (П.19) уравнение (П.18) для  $t < t_e$  может быть переписано в виде

$$(П.20) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu\gamma_0\lambda_{\min}(P)\|e_{ref}\|^2 - \beta_{\max}^2\|\tilde{\theta}\|^2 + (\gamma_0\delta + \beta_{\max}^2)\|\tilde{\theta}(t_0^+)\|^2 \leq \\ &\leq -\eta_1 V + r_B, \end{aligned}$$

где  $\eta_1 = \min\left\{\frac{\mu\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}; 2\right\}$ ,  $r_B = (\gamma_0\delta + \beta_{\max}^2)\|\tilde{\theta}(t_0^+)\|^2$ .

Решив дифференциальное уравнение (П.20), имеем:

$$(П.21) \quad \forall t < t_e: V(t) \leq e^{-\eta_1(t-t_0^+)}V(t_0^+) + \frac{r_B}{\eta_1}.$$

Учитывая  $\lambda_m\|\xi(t)\|^2 \leq V(t)$  и  $V(t_0^+) \leq \lambda_M\|\xi(t_0^+)\|^2$ , из (П.21) имеем оценку для всех  $t < t_e$  на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$(П.22) \quad \|\xi(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}e^{-\eta_1(t-t_0^+)}\|\xi(t_0^+)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m\eta_1}} \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}\|\xi(t_0^+)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m\eta_1}}.$$

Откуда следует ограниченность  $\xi(t)$  для всех  $t < t_e$ .

Для второй ситуации, учитывая справедливость по утверждению 1 для всех  $t \geq t_e$  неравенства  $0 < \Omega_{LB} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{UB}$  и определение коэффициента усиления  $\gamma$ , из (П.18) для  $t \geq t_e$  получим:

$$(П.23) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mu\gamma_0e_{ref}^T P e_{ref} + \gamma_0\tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} - \\ &- \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T \frac{(\gamma_0\lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) + \gamma_1)\Omega^2}{\Omega^2} \tilde{\theta} = \\ &= -\mu\gamma_0e_{ref}^T P e_{ref} + \gamma_0\tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} - \beta_{\max}^2 \tilde{\theta}^T [\gamma_0\lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) + \gamma_1] \tilde{\theta}. \end{aligned}$$

Определим регрессор  $\hat{\omega}(t)$  следующим образом:

$$\hat{\omega}(t) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\beta_{\max}}{\beta_{\min}^2}x^T h_\vartheta \Phi_\vartheta\right)^T \\ -\Phi_B^T h_B^T \left[ \left( \frac{\hat{B}^T e_1}{\beta_{\min}^2 \hat{F} e_1^T e_1} \hat{B}^T + \frac{\hat{B}^T e_1}{\beta_{\min}^2 \hat{F} e_1^T e_1} \beta_{\max} e_1^T - \frac{e_1^T}{\beta_{\min}^2 e_1^T e_1} \right) (v - \hat{\vartheta}^T x) \right]^T \end{bmatrix}.$$

Учтем справедливость для любого  $\omega(t)$  неравенства

$$(П.24) \quad \begin{aligned} &\gamma_0\tilde{\theta}^T \omega F \omega^T \tilde{\theta} - \tilde{\theta}^T \gamma_0 \beta_{\max}^2 \lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) \tilde{\theta} = \\ &= \tilde{\theta}^T \underbrace{(\gamma_0 \omega F \omega^T - \gamma_0 \beta_{\max}^2 \lambda_{\max}(\hat{\omega}\hat{\omega}^T) I_{(n_\vartheta+n_B) \times (n_\vartheta+n_B)})}_{\leq -\kappa I_{(n_\vartheta+n_B) \times (n_\vartheta+n_B)}} \tilde{\theta} \leq 0 \end{aligned}$$

и перепишем (П.23) в виде

$$(П.25) \quad \begin{aligned} \dot{V} &\leq -\gamma_0 \mu e_{ref}^T P e_{ref} - \tilde{\theta}^T (\kappa + \beta_{\max}^2 \gamma_1) \tilde{\theta} \leq \\ &\leq -\mu \gamma_0 \lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - (\kappa + \beta_{\max}^2 \gamma_1) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq -\eta_2 V, \end{aligned}$$

где  $\eta_2 = \min \left\{ \frac{\mu \lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}; 2 \left( \frac{\kappa}{\beta_{\max}^2} + \gamma_1 \right) \right\}$ .

Решив неравенство (П.25), для  $t \geq t_e$  имеем  $V(t) \leq e^{-\eta_2(t-t_e)} V(t_e)$ .

Учитывая  $\lambda_m \|\xi(t)\|^2 \leq V(t)$ ,  $V(t_e) \leq \lambda_M \|\xi(t_e)\|^2$  и выражение (П.22), получим для  $t \geq t_e$  оценку на вектор обобщенной ошибки слежения:

$$(П.26) \quad \|\xi(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} e^{-\eta_2(t-t_e)} \|\xi(t_e)\|^2} \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m} \left( \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \|\xi(t_0^+)\|^2 + \frac{r_B}{\lambda_m \eta_1} \right)}.$$

Откуда вместе с (П.22) следует  $\xi(t) \in L_\infty$  и экспоненциальная сходимость для всех  $t \geq t_e$  ошибки  $\xi(t)$  к нулю со скоростью, прямо пропорциональной параметрам  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ , что и требовалось доказать в третьем и четвертом пунктах теоремы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
2. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
3. *Chen K., Astolfi A.* Adaptive control for systems with time-varying parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 66. No. 5. P. 1986–2001.
4. *Chen K., Astolfi A.* Identification-based Adaptive Control for Systems with Time-varying Parameters // 2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2021. P. 1083–1088.
5. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York, USA: Wiley, 1995.
6. *Patil O.S., Sun R., Bhasin S., Dixon W.E.* Adaptive Control of Time-Varying Parameter Systems with Asymptotic Tracking // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 67. No. 9. P. 1–7.
7. *Na J., Xing Y., Costa-Castello R.* Adaptive estimation of time-varying parameters with application to roto-magnet plant // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. 2018. Vol. 51. No. 2. P. 731–741.
8. *Hu Y., Wu J., Zeng C.* Robust adaptive identification of linear time-varying systems under relaxed excitation conditions // IEEE Access. 2020. Vol. 8. No. 1. P. 8268–8274.
9. *Goel R., Roy S.B.* Composite Adaptive Control for Time-varying Systems with Dual Adaptation // arXiv preprint arXiv:2206.01700. 2022. P. 1–6.
10. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // IFAC-PapersOnLine. 2022. Vol. 55. No. 12. P. 91–96.

11. *Герасимов Д.Н., Лызлова М.В., Никифоров В.О.* Простые алгоритмы адаптивного и робастного управления классом линейных объектов с переменными параметрами // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 5. С. 351–361.
12. *Мирошник И.В., Никифоров В.О.* Алгоритм адаптации с астатизмом второго порядка // АиТ. 1995. № 7. С. 99–107.
13. *Цыкунов А.М.* Робастное управление многомерными нестационарными линейными объектами // АиТ. 2009. № 2. С. 109–121.
14. *Цыкунов А.М.* Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 33–40.
15. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // Проблемы управления. 2008. № 5. С. 2–7.
16. *Nikiforov V.O., Gerasimov D.N.* Adaptive Regulation: Reference Tracking and Disturbance Rejection. Springer-Verlag, 2022.
17. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A.* An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // Automatica. 2023. Vol. 147. P. 110677.
18. *Bobtsov A., Ortega R., Yi B., Nikolaev N.* Adaptive state estimation of state-affine systems with unknown time-varying parameters // Int. J. Control. 2022. Vol. 95. № 9. С. 2460–2472.
19. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть I. Объекты с постоянными параметрами // АиТ. 2022. № 4. С. 62–99.  
*Glushchenko A., Lastochkin K., Petrov V.* Exponentially Stable Adaptive Control. Part I. Time-Invariant Plants // Autom. Remote Control. 2022. Vol. 83. No. 4. P. 548–578.
20. *Leiva H., Sigmund S.* A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. Vol. 48. No. 12. P. 2229–2232.
21. *Nussbaum R.D.* Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control // Syst. Control Lett. 1983. Vol. 3. No. 5. P. 243–246.
22. *Глущенко А.И., Ласточкин К.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть II. Объекты с кусочно-постоянными параметрами // АиТ. 2023. № 3. С. 65–105.  
*Glushchenko A., Lastochkin K.* Exponentially Stable Adaptive Control. Part II. Switched Systems // Autom. Remote Control. 2023. Vol. 84. No. 3. P. 285–316.
23. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Unknown Piecewise Constant Parameters Identification with Exponential Rate of Convergence // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. 2023. Vol. 37. No. 1. P. 315–346.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.Н. Бахтадзе.*

Поступила в редакцию 20.10.2022

После доработки 07.03.2023

Принята к публикации 31.05.2023