

© 2023 г. **И.Б. ЯДЫКИН**, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),
И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТРУКТУРНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА¹

Для линейных многосвязных непрерывных стационарных устойчивых систем с простым спектром, в том числе в канонической диагональной форме, а также приведенных к каноническим формам управляемости и наблюдаемости, разработан метод и получены аналитические формулы спектральных разложений грамианов в форме различных матриц Сяо. Разработан метод и алгоритм вычисления обобщенных матриц Сяо в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Это позволяет вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости. Это позволяет получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод.

Ключевые слова: спектральные разложения грамианов, сингулярные числа, обратная матрица грамиана, устойчивость с учетом взаимодействия мод, матрицы Сяо, уравнение Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231023120036, **EDN:** NFFFED

1. Введение

Мониторинг состояния объектов управления и управление демпфированием опасных колебаний являются важными направлениями исследований в различных областях промышленности (энергетика, машиностроение, авиация и космонавтика, робототехника). Новые технологии моделирования требуют развития инструментов аппроксимации математических моделей сложных систем различной природы [1–3]. Важную роль играют методы вычисления матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра и исследование структурных свойств решений этих уравнений [4–11]. Фундаментальными свойствами линейных динамических систем, связанных с решениями этих уравнений, являются управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Важные результаты

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00673).

были получены в области вычисления грамианов для систем, модели которых представлены в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В [12] были впервые предложены методы вычисления грамианов, основанные на использовании матриц периодической структуры, для линейных систем, заданных уравнениями в формах управляемости и наблюдаемости. В [13, 14] новый подход был развит в направлении использования свойств импульсной переходной функции и матриц грамианов в виде клетчатой структуры из нулей и единиц (the zero-plaid structure of the controllability gramian). В [15] подход был развит для вычисления спектральных разложений более общего класса линейных стационарных (ЛТИ) систем со многими входами и многими выходами (ММО). В [16] с использованием данного подхода разработан метод оптимального выбора мест размещения датчиков и исполнительных устройств на графе распределенной системы управления. В работе показано, что для диагонализированной системы грамиан управляемости может быть представлен в виде произведения Адамара двух положительно полуопределенных матриц. В [17] решена задача оптимизации пропускной способности городской транспортной сети на основе минимизации следа матрицы грамиана управляемости с учетом ограничений. Различные задачи, связанные с применением грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов для вычисления системных инвариантов и энергетических индексов устойчивости, можно найти в [18, 19].

Целью настоящей работы являются развитие структурных методов решения матричных уравнений Ляпунова и получение спектральных и сингулярных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости, основанных на приведении уравнений состояния линейной стационарной системы к следующим каноническим формам: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим устойчивую непрерывную ММО ЛТИ динамическую систему вида

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$. Будем рассматривать вещественные матрицы соответствующих размеров A, B, C . Примем, что система (2.1) полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы A различны. В этом случае реализация (2.1) минимальна и существует единственная передаточная функция $W(s)$ в виде

$$W(s) = \sum_{i=1}^n M_i s^i N^{-1}(s),$$

где $N(s)$ – характеристический полином матрицы A , M_i – матрица вида

$$M_i = \sum_{j=0}^{n-1} A_j B.$$

Выше через A_i обозначена « i »-я матрица Фаддеева в разложении резольвенты матрицы A в ряд Фаддеева–Левереье [6, 7]. В соответствии с [20] запишем общую формулу вычисления грамиана управляемости по парному спектру системы (2.1)

$$(2.2) \quad P^c = - \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{1}{s_j + s_\rho} \text{Res} \left[(Is - A)^{-1}, s_j \right] B B^* \text{Res} \left[(Is - A^*)^{-1}, s_\rho \right].$$

Рассмотрим непрерывную динамическую MISO (с многими входами и одним выходом) LTI систему вида

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + b_\gamma u_\gamma(t), \quad x(0) = 0, \\ y(t) &= cx(t), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^1$, $u_\gamma(t) \in \mathbb{R}^m$, $\gamma = 1, \dots, m$, b_γ – столбец матрицы B .

Рассмотрим преобразование уравнения (2.1) системы общего вида к уравнениям состояний в канонических формах: диагональной, управляемости и наблюдаемости.

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то линейную систему можно привести к диагональному виду с помощью невырожденного преобразования координат

$$\begin{aligned} x_d &= Tx, \quad \dot{x}_d = A_d x_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ A_d &= TAT^{-1}, \quad B_d = TB, \quad C_d = CT^{-1}, \quad Q_d = TBB^T T^T, \end{aligned}$$

или

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix} = T\Lambda T^{-1},$$

где матрица T составлена из правых собственных векторов u_i , а матрица T^{-1} – из левых собственных векторов ν_i^* , соответствующих собственному числу s_i . Грамиан диагонализированной линейной части является решением уравнения Ляпунова, которое определится из формулы [15]

$$P_d^c = - \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{1}{s_j + s_\rho} \text{Res} \left[(Is - A_d)^{-1}, s_j \right] B_d B_d^* \text{Res} \left[(Is - A_d)^{-1}, s_\rho \right].$$

Грамиан управляемости P_d^c связан с грамианом P^c соотношением вида

$$P^c = TP_d^c T^T.$$

Из (2.2) следует следующее сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости системы, преобразованной в диагональную каноническую форму [21]

$$P_d^c = \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-b_{j\rho}}{s_j + s_\rho} \mathbb{1}_{j\rho}, \quad b_{j\rho} = [B_d B_d^*]_{j\rho},$$

где введено обозначение

$$\mathbb{1}_{j\rho} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{j\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим далее канал “ γ ” MISO LTI системы в канонической форме управляемости [1, 21]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x(t) &= \sum_{\gamma=1}^m R_{c_\gamma}^F x_{c_\gamma}(t). \\ \dot{x}_c(t) &= A_c^F x_{c_\gamma}(t) + b_\gamma^F u_\gamma(t), \quad x_c(0) = 0, \\ y_c^F(t) &= c_\gamma^F x_c(t), \quad \gamma = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_\gamma^F = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T,$$

$$a = [-a_0 \ -a_1 \ \dots \ -a_{n-2} \ -a_{n-1}], \quad c_\gamma^F = [\xi_0 \ \xi_1 \ \dots \ \xi_{n-2} \ \xi_{n-1}].$$

Если использовать невырожденное преобразование переменных с матрицей R_c^F , можно рассматривать MISO LTI систему в канонической форме управляемости. Вектор B_γ для MISO системы имеет вид

$$B_\gamma = [0 \ \dots \ b_\gamma \ \dots \ 0]^T.$$

Справедливы следующие соотношения [14]:

$$\begin{aligned} (R_{c_\gamma}^F)^{-1} A R_{c_\gamma}^F &= A_c^F, \quad (R_{c_\gamma}^F)^{-1} B_\gamma = b_\gamma^F, \quad C R_{c_\gamma}^F = c_\gamma^F, \\ P^c &= \sum_{\gamma=1}^m R_\gamma^{cF} P_\gamma^{cF} (R_\gamma^{cF})^T. \end{aligned}$$

В отношении систем (2.1) и (2.3) будем предполагать выполненными различные структурные условия устойчивости, управляемости, наблюдаемости и свойств спектра матрицы динамики. В [15] было получено следующее спектральное разложение грамиана управляемости:

$$P_\gamma^{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbb{1}_{j+1, \eta+1}.$$

Рассмотрим далее канал “ γ ” SIMO (с одним входом и многими выходами) ЛТИ линейной системы в канонической форме наблюдаемости [15]. В этом случае справедливы формулы

$$x_o(t) = \sum_{\gamma=1}^m R_{o\gamma}^F x_{o\gamma}(t),$$

$$\dot{x}_{o\gamma}(t) = A_c^F x_{o\gamma}(t) + b_{o\gamma}^F u_{\gamma}(t), \quad x_o(0) = 0,$$

$$y_{o\gamma}^F(t) = c_{o\gamma}^F x_{o\gamma}(t), \quad \gamma = 0, 1 \dots m.$$

$$A_o^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{-1} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_{o\gamma}^F = [\xi_0 \quad \xi_1 \quad \dots \quad \xi_{n-2} \quad \xi_{n-1}]^T,$$

$$c_{o\gamma}^F = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1].$$

В соответствии с принципом дуальности получим выражения [14]

$$P_{o\gamma}^F = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbb{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^o = \sum_{\gamma=1}^m R_{o\gamma}^F P_{\gamma}^{oF} (R_{o\gamma}^F)^T.$$

Определение 1. Назовем матрицей Сяо (Zero plaid structure) матрицу вида [12, 13]

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \dots \\ 0 & -y_3 & 0 & \dots & 0 \\ y_3 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k = 1, \dots, n; \\ y_n = \frac{1}{2Y_{n,1}}, \\ y_{n-l} = \frac{-\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i Y_{n-l, i+1} y_{n-l+i}}{Y_{n-l,1}}, \\ \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases}$$

где $Y_{i,j}$ – элемент таблицы Рауса для системы, находящийся на пересечении i строки и j столбца.

3. Основные результаты

3.1. Тождества для одного класса устойчивых полиномов, корни которых различны над полем комплексных чисел

Рассмотрим спектральное разложение грамиана управляемости по простому и парному спектру (2.2).

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^n \sum_{\eta=0}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \equiv \\ & \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}, \quad s_k + s_\rho \neq 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \omega(n, s_k, j, \eta) &= \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}, \\ \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений тождество (3.1) примет вид

$$\omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \quad \text{для } \forall s_k, s_\rho \in \mathbb{C}^-, \quad s_k + s_\rho \neq 0.$$

Доказательство следует из разложения дробно-рациональной функции $\frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(-s_k)}$ по корням характеристического уравнения $N(-s_k) = 0$.

Лемма 1. *Рассмотрим полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$ над полем комплексных чисел следующего вида:*

$$\gamma(n, s_k, -s_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} s_k^i (-s_k)^\mu, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

где s_k – корни характеристического уравнения системы (2.1), а $-s_k$ – корни характеристического уравнения ее антиустойчивой сопряженной системы. Предположим, что все собственные числа систем простые, не равные нулю комплексные числа. Тогда полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$ содержит только все четные степени чисел s_k и не содержит их нечетных степеней.

$$\begin{aligned} \gamma(n, s_k, -s_k) &= \gamma(n, s_k^0, s_k^2, \dots, s_k^{2m}), \quad n = 2m, \\ \gamma(n, s_k, -s_k) &= \gamma(n, s_k^1, s_k^3, \dots, s_k^{2m-1}) \equiv 0, \quad n = 2m - 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Легко убедиться, что результат леммы справедлив для $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \gamma(1, s_k, -s_k) &= 1, \\ \gamma(2, s_k, -s_k) &= 1 - s_k^2, \\ \gamma(3, s_k, -s_k) &= s_k^4 - s_k^2 + 1. \end{aligned}$$

Применим метод математической индукции. Предположим, что результат леммы справедлив для полинома $\gamma(n, s_k, -s_k)$:

$$\gamma(n, s_k, -s_k) = \begin{cases} \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) & \text{для четного } n = 2m, \\ \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) & \text{для нечетного } n = 2m-1. \end{cases}$$

Покажем, что он справедлив и для полинома $\gamma(n+1, s_k, -s_k)$. При увеличении n на единицу полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$ принимает вид

$$\gamma(n+1, s_k, -s_k) = \begin{cases} \gamma(2m+1, s_k, -s_k) & \text{для четного } n = 2m, \\ \gamma(2m, s_k, -s_k) & \text{для нечетного } n = 2m-1. \end{cases}$$

Рассмотрим вначале случай четного n .

$$\begin{aligned} \gamma(n+1, s_k, -s_k) &= \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) + \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) s_k^{2m+1} - \\ &- \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) s_k^{2m+1} + s_k^{2m+1} (-s_k)^{2m+1} = \\ &= \gamma(2m, s_k^0, \dots, s_k^{2m})^2 - s_k^{2(2m+1)}. \end{aligned}$$

Для случая нечетного n аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \gamma(n+1, s_k, -s_k) &= \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) + \\ &+ \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m+1}) s_k^{2(2m+1)} - \\ &- \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m+1}) s_k^{2(m+1)} + s_k^{2(2m+1)} = \\ &= \gamma(2m-1, s_k^0, \dots, s_k^{2m}) + s_k^{2(2m+1)}, \end{aligned}$$

где первые три слагаемых содержат четные степени s_k по предположению.

Следствие 1. Рассмотрим мультипликатор $\omega(n, s_k, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по простому спектру (2.2). Справедливы тождества

$$(3.2) \quad \omega(n, s_k, j, \eta) \equiv 0, \text{ если } j + \eta = 2m - 1,$$

$$(3.3) \quad \omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}, \text{ если } j + \eta = 2m.$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{\gamma(n, s_k, -s_k, j, \eta)}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}$$

и применим лемму.

Следствие 2. Рассмотрим мультипликатор $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру (2.2). Справедливы тождества

$$(3.4) \quad \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \equiv 0, \text{ если } j + \eta = 2m - 1,$$

$$(3.5) \quad \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}, \text{ если } j + \eta = 2m.$$

Доказательство. Выразим мультипликатор через полином $\gamma(n, s_k, -s_k)$

$$\omega(n, s_k, j, \eta) \equiv \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) \text{ для } \forall s_k, s_\rho \in \mathbb{C}^-, s_k + s_\rho \neq 0$$

и применим лемму.

Следствия 1, 2 доказывают, что для всех непрерывных устойчивых МИМО ЛТИ систем с простым спектром, приведенных к каноническим формам управляемости и наблюдаемости, существуют спектральные разложения в форме матриц Сяо. Для систем, представленных в канонических формах управляемости и наблюдаемости, это позволяет вместо вычисления n^2 элементов матрицы вычислять только n диагональных элементов по формулам (3.2)–(3.5).

Замечание. Следует с осторожностью использовать мультипликатор $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в спектральном разложении грамиана управляемости по парному спектру (2.2). Например, в случае МИМО ЛТИ системы, приведенной к диагональной канонической форме, спектральное разложение грамиана управляемости имеет простой вид

$$(3.6) \quad P_d^c = \sum_{j=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-b_{j\rho}}{s_j + s_\rho} \mathbf{1}_{j\rho}, \quad b_{j\rho} = [B_d B_d^*]_{j\rho}.$$

С другой стороны, имеем

$$(3.7) \quad P_d^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \omega(n, s_j, j, \rho) A_j B_d B_d^* A_\rho^*, \omega(n, s_k, j, \rho) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)}.$$

Заметим, что обе формулы (3.6), (3.7) дают одинаковый численный результат, который соответствует *различным* спектральным разложениям. Приведем пример.

Иллюстративный пример 1

Рассмотрим задачу управления двухзонной печью. Модель объекта управления – нагревательной печи можно описать уравнениями состояния вида

$$\Sigma_1: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = 0, \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В данном случае можно вычислить выражения

$$N(s) = s^2 + 1,5s + 0,5, \quad \dot{N}(s) = 2s + 1,5,$$

$$(Is - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+0,5 \end{bmatrix} (s^2 + 1,5s + 0,5)^{-1},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad BB^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 1,5 & 4,25 \end{bmatrix}.$$

Грамиан управляемости, вычисленный по формуле (3.6), равен

$$P^c = \begin{bmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2,125 \end{bmatrix}.$$

Выражение разложения грамиана управляемости имеет вид

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{k=1}^2 \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} A_j BB^T A_\rho^T,$$

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{k=1}^2 \frac{s_k^j (-s_k)^\rho}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \frac{-b_{j\rho}}{s_j + s_\rho} \mathbf{1}_{j\rho},$$

где A_j – матрица Фаддеева, построенная для матрицы A с помощью алгоритма Фаддеева–Леверье [6, 7]. Вычислим матрицы $A_j BB^T A_\rho^T$:

$$A_0 BB^T A_0^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 0,75 & 1,0625 \end{bmatrix}, \quad A_0 BB^T A_1^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 1,5 & 2,125 \end{bmatrix},$$

$$A_1 BB^T A_0^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 0,75 & 2,125 \end{bmatrix}, \quad A_1 BB^T A_1^T = \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 1,25 & 4,25 \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (3.7), получим спектральное разложение:

$$P^c = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 0,75 & 1,0625 \end{bmatrix} \frac{2}{3} + \begin{bmatrix} 1,25 & 1,5 \\ 1,25 & 4,25 \end{bmatrix} \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} 1,25 & 1 \\ 1 & 2,125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов являются симметричными и положительно определенными, и таковой является их сумма. Путем прямой подстановки проверяем, что вычисленный грамиан управляемости является решением уравнения Ляпунова. Сепарабельное спектральное разложение грамиана управляемости, вычисленное по формуле (3.6), имеет вид

$$P^c = \begin{bmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2,125 \end{bmatrix}.$$

Матрицы бесконечных субграмианов в этом разложении не являются симметричными и положительно определенными, хотя таковой является их сумма. Пример показывает, что один и тот же грамиан может иметь несколько разных спектральных разложений.

3.2. Разложение грамианов в форме произведений Адамара [3]

Введем матрицы мультипликатора грамиана управляемости непрерывной МИМО LTI системы в виде

$$\Omega_c = [\omega_{c,j\eta}]_{n \times n}$$

и ее грамиана наблюдаемости в виде

$$\Omega_o = [\omega_{o,j\eta}]_{n \times n},$$

где j – индекс строки, а η – индекс столбца матриц мультипликаторов.

Введем матрицы Ψ_c и Ψ_o в виде

$$\Psi_c = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} A_i B B^T A_\mu^T,$$

$$\Psi_o = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} A_i^T C^T C A_\mu.$$

Введем поэлементное представление этих матриц в виде

$$\psi_{c,j\eta} = e_j^T \Psi_c e_\eta,$$

$$\psi_{o,j\eta} = e_j^T \Psi_o e_\eta.$$

Теорема 1 [15]. Рассмотрим устойчивую непрерывную динамическую МИМО LTI систему с простым спектром

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0,$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$.

Тогда субграмиан управляемости P^c является матрицей вида (2.2), и в соответствии с [7] формулами (2.1), (2.2) определяется как

$$(3.8) \quad P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} P_{j,\eta}^c, \quad P_{j,\eta}^c = \omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) A_j B B^T A_\eta^T,$$

где

$$\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если индекс } j + \eta \text{ нечетен,} \\ \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_\rho + s_k} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)}, & \text{если индекс } j + \eta \text{ четен.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Как известно, спектральное разложение грамиана управляемости в условиях теоремы 1 имеет вид [7, 20]

$$P^c = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^n \frac{-1}{s_\rho + s_k} \frac{s_k^j s_\rho^\eta}{\dot{N}(s_k) \dot{N}(s_\rho)} A_j B B^T A_\eta^T.$$

Подставим вновь введенную скалярную функцию $\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)$ в эту формулу и получим формулу (3.8).

Теорема 2 [13]. Рассмотрим непрерывную МИМО ЛТИ систему вида (2.1). Предположим, что система устойчива и все корни ее характеристического уравнения различны. Тогда ее грамианы управляемости и наблюдаемости имеют вид обобщенных матриц Сяо следующего вида:

$$(3.9) \quad P^c = \Omega_c \circ \Psi_c = [p_{j\eta}^c]_{n \times n}, \quad j, \eta = 1, \dots, n.$$

$$\Psi_c = [\psi_{c,j\eta}]_{n \times n}, \quad j, \eta = 1, \dots, n. \quad \Psi_c = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} \Psi_{c,i\mu}, \quad \Psi_{c,i\mu} = M_i M_\mu^*,$$

$$M_i = A_i B, \quad \Omega_c = [\omega_c(n, j, \eta)]_{n \times n}, \quad j, \eta = 1, \dots, n. \\ p_{j\eta}^c = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{c,j\eta}.$$

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся спектральным разложением грамиана управляемости (2.2). Введем представление грамианов в форме произведений Адамара

$$(3.10) \quad P^c = \Omega_c \circ \Psi_c,$$

$$(3.11) \quad P^o = \Omega_o \circ \Psi_o.$$

Это представление позволяет выписать простые формулы для вычисления элементов грамианов управляемости и наблюдаемости МИМО ЛТИ систем P^c и P^o в виде [13]

$$(3.12) \quad p_{j\eta}^c = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{c,j\eta},$$

$$(3.13) \quad p_{j\eta}^o = \omega_c(n, j, \eta) \times \psi_{o,j\eta}.$$

Далее используем тождества для одного класса устойчивых полиномов, корни которых различные над полем комплексных чисел (Лемма). Формулы (3.10)–(3.13) выражают алгоритмы вычисления элементов обобщенных матриц Сяо в форме произведений элементов матриц мультипликатора и элементов сумм всевозможных произведений матриц $A_j B B^T A_\eta^T$, записанных в форме произведений матриц Адамара

$$\Omega_c \circ \Psi_c.$$

Следствие 3. Рассмотрим важный частный случай непрерывных линейных SISO (с одним входом и одним выходом) систем, представленных уравнениями состояния в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В этом случае грамианы управляемости и наблюдаемости определяются формулами [15]

$$(3.14) \quad P^{cF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}, \\ P^{oF} = \sum_{k=1}^n \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}.$$

Представление грамианов в форме Адамара согласно (3.10)–(3.11) принимает вид

$$P^{cF} = \Omega_{cF} \circ \Psi_c, \quad \Psi_c = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{j+1\eta+1},$$

$$P^{oF} = \Omega_{oF} \circ \Psi_o, \quad \Psi_o = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_{j+1\eta+1}.$$

Отсюда вытекают тождества

$$(3.15) \quad P^{cF} \equiv \Omega_{cF},$$

$$(3.16) \quad P^{oF} \equiv \Omega_{oF}.$$

Это означает, что грамиан управляемости в канонической форме управляемости совпадает с матрицей мультипликатора для этого грамиана, что позволяет применить формулы (3.15), (3.16) для расчета всех элементов грамиана и устанавливает принадлежность грамиана к классу матриц Сяо. Аналогичный результат справедлив для грамиана наблюдаемости в канонической форме наблюдаемости.

Матрицы мультипликаторов в разных канонических формах имеют вид

$$\Omega_{cF} \equiv \Omega_{oF} = [\omega(n, s_k, s_\rho, j, \eta)]_{n \times n} = [\omega(n, s_k, j, \eta)]_{n \times n}.$$

3.3. Спектральные и сингулярные разложения обратных матриц грамианов

Общие формулы вычисления обратных матриц грамианов (далее обратных грамианов) для непрерывных МИМО ЛТИ систем имеют вид [1]

$$(P^c)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(P^c)^{n-1} + \gamma_{n-1}(P^c)^{n-2} + \dots + \gamma_2 P^c + \gamma_1 I \right];$$

$$(P^o)^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(P^o)^{n-1} + \gamma_{n-1}(P^o)^{n-2} + \dots + \gamma_2 P^o + \gamma_1 I \right].$$

В случае непрерывных SISO ЛТИ систем эти формулы в соответствии с (3.15), (3.16) приобретают форму

$$[P^{cF}(\omega(n, s_k, j, \eta))]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(\Omega_{cF})^{n-1} + \gamma_{n-1}(\Omega_{cF})^{n-2} + \dots + \gamma_2 \Omega_{cF} + \gamma_1 I \right];$$

$$[P^{oF}(\omega(n, s_k, j, \eta))]^{-1} = \frac{-1}{\gamma_0} \left[(\Omega_{oF})^{n-1} + \gamma_{n-1}(\Omega_{oF})^{n-2} + \dots + \gamma_2 \Omega_{oF} + \gamma_1 I \right].$$

Наличие степеней матриц мультипликатора в правой части формул приводит к появлению сложных дробно-рациональных функций собственных чисел s_k , что ограничивает область применения формул спектральных разложений обратных грамианов системами малой и средней размерности. Вернемся

к устойчивым непрерывным ММО ЛТИ системам с простым спектром и заметим, что грамианы управляемости и наблюдаемости представляют собой симметричные комплекснозначные матрицы. В этом случае существуют их сингулярные разложения вида [1]

$$\begin{aligned} P^c &= P^{c*} = V_c \Lambda V_c^*, \\ P^o &= P^{o*} = V_o \Lambda V_o^*, \end{aligned}$$

где матрица V_c образована правыми сингулярными векторами матрицы P^c , матрица V_c^* образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c , а матрица Λ является диагональной матрицей вида

$$\Lambda = \text{diag} \{ |\lambda_1| |\lambda_2| \dots |\lambda_n| \}.$$

Определим матрицы S и U в виде

$$\begin{aligned} S &= \text{diag} \{ \text{sgn} \lambda_1 \text{sgn} \lambda_2 \dots \text{sgn} \lambda_n \}, \quad U_c = V_c S, \\ \text{sgn} \lambda &= \begin{cases} +1, & \text{если } \lambda \geq 0, \\ -1, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} P^c &= U_c \Lambda V_c^*, \\ P^o &= U_o \Lambda V_o^*, \end{aligned}$$

где матрица U_c образована левыми сингулярными векторами матрицы P^c . Поскольку Λ , U_c , V_c являются несингулярными матрицами, то

$$(3.17) \quad (P^c)^{-1} = (U_c)^{-1} \Lambda^{-1} (V_c^*)^{-1} = V_c^* \Lambda^{-1} U_c.$$

Аналогичным образом получаем

$$(3.18) \quad (P^o)^{-1} = (U_o)^{-1} \Lambda^{-1} (V_o^*)^{-1} = V_o^* \Lambda^{-1} U_o.$$

Поскольку матрица Λ диагональна, ее обратную матрицу можно представить в виде

$$(3.19) \quad \Lambda^{-1} = \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \dots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right].$$

Подставив (3.19) в (3.17), (3.18), получим следующие сингулярные разложения обратных грамианов управляемости и наблюдаемости по их сингулярному спектру:

$$\begin{aligned} (P^c)^{-1} &= V_c^* \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \dots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right] U_c; \\ (P^o)^{-1} &= V_o^* \left[|\lambda_1|^{-1} \mathbf{1}_{11} + |\lambda_2|^{-1} \mathbf{1}_{22} + \dots + |\lambda_n|^{-1} \mathbf{1}_{nn} \right] U_o. \end{aligned}$$

Теорема 3. Рассмотрим непрерывную устойчивую и полностью управляемую динамическую ММО LTI систему вида (2.1).

Сингулярные разложения ее обратного грамиана управляемости по собственным числам матрицы грамиана имеют следующий вид.

Для простого спектра матрицы грамиана

$$(3.20) \quad (P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma_\lambda},$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_λ – собственное число матрицы грамиана P^c .

Для кратного спектра матрицы грамиана

$$(3.21) \quad (P^c)^{-1} = - \sum_{\delta=1}^q \sum_{\rho=1}^{m_\delta} \frac{K_{\delta\rho}}{(-\sigma_\delta)^{m_\delta-j+1}},$$

$$(3.22) \quad K_{\delta\rho} = \frac{1}{(\rho-1)!} \left\{ \frac{d^{\rho-1}}{d\sigma^{\rho-1}} \left[\frac{(\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta} \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j P_j^c}{\prod_{\delta=1}^n (\sigma - \sigma_\delta)^{m_\delta}} \right] \right\} \Big|_{s=\sigma_\delta},$$

где P^c – матрица грамиана управляемости, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты грамиана, σ_δ – собственное число матрицы грамиана P^c кратности m_δ , ρ – индекс кратности собственного числа σ_δ .

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим разложение резольвенты матрицы грамиана управляемости в виде отрезка ряда Фаддеева [6]

$$(3.23) \quad (I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma^j}{N_c(\sigma)}.$$

Обозначим: $N_c(\sigma) = s^n + a_{c,n-1}\sigma^{n-1} + \dots + a_{c,1}\sigma + a_{c,0}$, $j = 1, \dots, n$; $N_c(\sigma)$ – характеристический полином резольвенты матрицы грамиана, P_j^c – матрица Фаддеева в разложении резольвенты в ряд Фаддеева, $j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим вначале случай, когда все сингулярные числа σ_λ грамиана различны. В этом случае разложение (3.23) преобразуется к виду

$$(3.24) \quad (I\sigma - P^c)^{-1} = \frac{\sum_{\lambda=1}^n \sum_{j=0}^{n-1} P_j^c \sigma_\lambda^j}{\dot{N}_c(\sigma_\lambda)} \frac{1}{\sigma - \sigma_\lambda}.$$

Итеративный алгоритм вычисления матриц Фаддеева и коэффициентов характеристического уравнения:

Первый шаг: $a_{c,n-1} = 1$, $R_n = I$,

Шаг «k»: $a_{c,n-k} = -\frac{1}{k} \text{tr}(P^c R_{n-k+1})$, $R_{n-k} = a_{c,n-k} I + P^c R_{n-k+1}$, $k = 1, \dots, n$;

$$A = \begin{bmatrix} -4,67 & 3 & -1,33 & 2,33 \\ -2,17 & 2,33 & -3,83 & 5,17 \\ 1,5 & -0,33 & -1,5 & 0,17 \\ 2,17 & -3,33 & 3,83 & -6,17 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -7 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведем собственные значения матрицы динамики системы

$$\lambda_i = -4; -3; -2; -1.$$

Для построения сингулярного разложения обратного грамиана управляемости системы по сингулярным числам матрицы грамиана вычислим грамиан управляемости по формуле (3.6)

$$P^c = \begin{bmatrix} 2,5 & 3 & 2,5 & 0,56 \\ 3 & 11,2 & 13,2 & 5,1 \\ 2,5 & 13,2 & 16,6 & 6,9 \\ 0,56 & 5,1 & 6,9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что формула (3.6) справедлива не только для устойчивых линейных систем, но и для неустойчивых систем, в которых не нарушается условие $s_k + s_p \neq 0$. Оно нарушается в случае $s_k = 0$ или $s_k = +j\omega$, $s_{k+1} = -j\omega$ [21].

Тогда сингулярные числа этого грамиана примут вид

$$\sigma_i = 30,7; 2,5; 0,17; 0,0002.$$

Грамиан управляемости системы представлен симметричной матрицей, поэтому существует его SVD-разложение [1]

$$P^c = \begin{bmatrix} -0,13 & 0,86 & -0,48 & -0,009 \\ -0,6 & 0,28 & 0,67 & 0,35 \\ -0,73 & -0,25 & -0,25 & -0,58 \\ -0,3 & -0,32 & -0,51 & 0,74 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} -0,13 & 0,86 & -0,48 & -0,009 \\ -0,6 & 0,28 & 0,67 & 0,35 \\ -0,73 & -0,25 & -0,25 & -0,58 \\ -0,3 & -0,32 & -0,51 & 0,74 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с алгоритмом Фаддеева–Леверьё вычислим матрицы Фаддеева и коэффициенты характеристического уравнения для обратного грамиана

$$P_0^c = \begin{bmatrix} -0,01 & 0,05 & -0,07 & 0,08 \\ 0,05 & -1,62 & 2,69 & -3,4 \\ -0,07 & 2,69 & -4,5 & 5,6 \\ 0,08 & -3,4 & 5,6 & -7,2 \end{bmatrix}, \quad P_1^c = \begin{bmatrix} 21,8 & -23,5 & 8,4 & 17 \\ -23,5 & 44,6 & -29,5 & -5,5 \\ 8,4 & -29,5 & 33 & -25 \\ 17 & -5,5 & -25 & 65,7 \end{bmatrix}, \\ P_2^c = \begin{bmatrix} -31 & 3 & 2,5 & 0,56 \\ 3 & -22,1 & 13,2 & 5,1 \\ 2,5 & 13,2 & -16,7 & 6,9 \\ 0,56 & 5,1 & 6,9 & -30,3 \end{bmatrix}, \quad P_3^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$a_{c,0} = 0,0031, \quad a_{c,1} = -13,3, \quad a_{c,2} = 82,6, \quad a_{c,3} = -33,3, \quad a_{c,4} = 1.$$

Тогда обратный грамиан можно будет вычислить по формуле (3.20)

$$(P^c)^{-1} = \begin{bmatrix} 1,97 & -14,8 & 22,3 & -26,2 \\ -14,8 & -517 & -856 & 1083 \\ 22,3 & -856 & 1422 & -1803 \\ -26,2 & 1083 & -1803 & 2290 \end{bmatrix}.$$

3.4. Спектральные разложения энергетических функционалов и новые критерии устойчивости

Рассмотрим в рамках сделанных выше предположений SISO LTI систему вида (2.4), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости, и вычислим энергетический функционал J , который представляет собой значение квадрата H_2 -нормы передаточной функции системы и дает оценку риска потери устойчивости [1, 19, 22]. Для этого используем (3.12) и (3.14) и для определенности выберем спектральное разложение грамиана управляемости по простому спектру

$$(3.27) \quad J = \text{tr} C^F \Omega_c (C^F)^T = \\ = \left(\frac{\xi_0^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} - \frac{\xi_1^2 \sum_{k=1}^n s_k^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \xi_{n-1}^2 \sum_{k=1}^n s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k) N(-s_k)} \right).$$

Получили инвариантное спектральное разложение энергетического функционала по простому спектру матрицы динамики. Эта простая формула показывает преимущество применения спектральных разложений в канонической форме перед разложением общего вида (3.23). Разложение не зависит от выбора невырожденной матрицы линейных преобразований координат системы. Два основных фактора влияют на значение риска потери устойчивости J :

- 1) значения диагональных членов матрицы Сяо Ω_c ,
- 2) квадраты элементов приведенного вектора выхода.

Выражение (3.27) можно упростить за счет упрощения SISO LTI системы. В [14] показано, что матрица Сяо является грамианом управляемости для SISO LTI системы с передаточной функцией

$$(3.28) \quad W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Асимптотическая устойчивость SISO LTI систем вида (2.4) равносильна асимптотической устойчивости этой системы. Более того, покажем, что асимптотическая устойчивость MIMO LTI систем вида (2.1) равносильна ее асимптотической устойчивости. Энергетический функционал J для системы

(3.28) согласно (3.27) равен

$$(3.29) \quad J = \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k)N(-s_k)} - \frac{\sum_{k=1}^n s_k^2}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k)N(-s_k)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n s_k^{2n}}{\sum_{k=1}^n \dot{N}(s_k)N(-s_k)} \right).$$

Теорема 4. Рассмотрим непрерывную полностью управляемую динамическую МИМО LTI систему с простым спектром вида (2.1), а также непрерывную динамическую SISO LTI систему с тем же спектром, уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости вида (2.4).

Тогда достаточным условием асимптотической устойчивости системы (2.1) по Ляпунову является ограниченность энергетического функционала (3.29) для SISO LTI системы с тем же спектром и передаточной функцией (3.28)

$$(3.30) \quad J < +\infty,$$

$$(3.31) \quad \text{для любого } s_k \text{ принадлежащего } C^-, \quad k = 1, \dots, n.$$

Доказательство теоремы 4. Напомним, что МИМО LTI система (2.1) полностью управляема и наблюдаема, все собственные числа матрицы А различны, реализация системы (2.1) минимальна и существует единственная передаточная функция системы. При выполнении указанных условий ограниченность функционала \sqrt{J} является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (2.1) по Ляпунову [1, Теорема 5.14]. Таким образом, ограниченность функционала J является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (3.27)

$$J < \infty.$$

Но функционал J есть след матрицы Сяо SISO LTI системы (2.4), уравнения состояния которой приведены к канонической форме управляемости. Отсюда вытекает вывод о том, что ограниченность энергетического функционала простой SISO LTI системы (3.28) в форме неравенства (3.30) гарантирует асимптотическую устойчивость сложной МИМО LTI системы вида (2.1). Проверка условия (3.31) требует использования асимптотических моделей грамианов [22].

Таким образом, получен новый критерий устойчивости сложной стационарной линейной динамической МИМО LTI системы в виде критерия ограниченности следа матрицы Сяо Ω_c для простой SISO LTI системы (3.21), уравнения которой приведены в каноническую форму управляемости. Новый критерий не противоречит известному критерию принадлежности собственных чисел матрицы динамики линейной системы левой полуплоскости плоскости собственных чисел, но уточняет его с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод (кратные собственные числа, близкие аperiodические и колебательные моды) [22].

4. Заключение

В данной статье, посвященной развитию спектральных методов решения уравнения Ляпунова, основные результаты получены с использованием структурных методов в разрабатываемых новых методах и инструментах, тесно связанных с фундаментальными свойствами линейных динамических систем: управляемостью, наблюдаемостью и устойчивостью. Среди инструментов прежде всего следует назвать два: определение структуры матрицы решения в виде матрицы Сяо и спектральные разложения решения в форме произведений Адамара. Разработан метод и алгоритм вычисления матриц в виде произведения Адамара для многосвязных непрерывных линейных систем со многими входами и многими выходами. Это позволяет вычислять элементы соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости в виде произведений соответствующих элементов матриц мультипликаторов и матрицы, являющейся суммой всевозможных произведений матриц числителя матричной передаточной функции системы. При использовании канонических форм управляемости или наблюдаемости разложение Адамара соответствующих грамианов сводится к матрице мультипликатора, след которого равен энергетическому функционалу SISO LTI системы. Новые результаты получены в виде спектральных и сингулярных разложений обратных грамианов управляемости и наблюдаемости. Это позволяет получить инвариантные разложения энергетических функционалов и сформулировать новые критерии устойчивости линейных систем с учетом нелинейных эффектов взаимодействия мод [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadelphia, 2005.
2. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Теория автоматического управления. Учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
3. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 1. С. 3–20.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
5. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.
6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
7. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
8. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами М.: Наука, 1976. 424 с.
9. *Годунов С.К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 2002. 216 с.
10. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3–39.

- Proskurnikov A.V., Fradkov A.L.* Problems and methods of network control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740.
<https://doi.org/10.1134/S0005117916100015>
11. *Жабко А.П., Харитонов В.Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления: учебное пособие / СПбГУ СПб.: Изд-во СПб. универ-та, 1993. 318 с.
 12. *Sreeram V., Athoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form // IEE Proc. D. Control. Theory Appl. 1991. V. 138. No. 6. P. 529–534. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1991.0074>
 13. *Xiao C., Feng Z., Shan X.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038>
 14. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA June 10–12, 2009. P. 5345–5351. <https://doi.org/978-1-4244-4524-0/09>
 15. *Yadykin I.B.* Spectral Decompositions of Gramians of Continuous Stationary Systems Given by Equations of State in Canonical Forms // Mathematics. 2022. V. 10. No. 13. P. 2339. <https://doi.org/10.3390/math10132339>
 16. *Dilip A.S.A.* The controllability Gramian, the Hadamard product and the optimal actuator // Leader Sensor Select. Problem Nature Phys. 2015. V. 11. P. 779–786. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278>
 17. *Bianchin G., Pasqualetti F.* Gramian-Based Optimization for the Analysis and Control of Traffic Networks // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2022. V. 21. No. 7. P. 3013–3024. <https://doi.org/10.1109/TITS.2019.2922900>
 18. *Himpe C.* The Empirical Gramian Framework // Algorithms. 2018. V. 11. No. 91. <https://doi.org/10.3390/a11070091>
 19. *Benner P., Goyal P., Duff I.P.* Gramians, Energy Functionals, and Balanced Truncation for Linear Dynamical Systems With Quadratic Outputs // IEEE Transact. Autom. Control. 2022. V. 67. No. 2. P. 886–893. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3086319>
 20. *Ядыкин И.Б.* О свойствах грамианов непрерывных систем управления // АиТ. 2010. № 6. С. 39–50. <https://doi.org/10.1134/S0005117910060032>
 21. *Yadykin I.B., Galyaev A.A.* On the methods for calculation of grammians and their use in analysis of linear dynamic systems Automation and Remote Control // Pleiades Publishing Ltd. V. 74. No. 2. P. 207–224.
 22. *Ядыкин И.Б., Искаков А.Б.* Энергетический подход к анализу устойчивости линейных стационарных динамических систем // АиТ. 2016. № 12. С. 37–58.
 23. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж. Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными параметрами. М.: Физматлит, 1961.
Gardner M.F., Barns J.L. Transients in linear systems studied by the Laplace transformation / V. 1. Lumped-constant systems. New York, London. Wiley, Chapman and Hall. 1942.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.

Поступила в редакцию 31.05.2023

После доработки 10.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023