

© 2023 г. Е.Н. ХОБОТОВ, д-р техн. наук (e\_khobotov@mail.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)  
Е.Е. АВЕРЬЯНОВА (ail19@yandex.ru)  
(ООО «Фирма Резерв-Инвест», Москва)

## ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ СКЛАДОВ

Рассматриваются задачи управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов при постоянном спросе в условиях ограниченной вместимости складов. Снабжение системы складов может производиться несколькими поставщиками. Для решения этих задач предлагаются модели и методы, позволяющие в соответствии с имеющимся спросом определять время и величину пополнения всех складов, находящихся на различных уровнях такой системы складов.

*Ключевые слова:* запасы, иерархические системы складов, спрос на продукцию, пополнение запасов, снабжение складов, методы управления запасами, оптимизация, многономенклатурные запасы, дефицит продукции.

DOI: 10.31857/S0005231023120061, EDN: NGDIUW

### 1. Введение

Повышенный интерес в последнее время начинают вызывать задачи управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов и методы их решения. Это обусловлено тем, что с использованием таких систем складов часто организуется и производится снабжение регионов продукцией, лекарствами, запасными частями, особенно автомобильными и т.д. Поставляемая продукция сначала доставляется на склады «верхнего» уровня, а затем с этих складов поставляется на остальные склады системы.

Для управления запасами на отдельных складах были разработаны достаточно эффективные модели и методы [1–5]. Определение подходящих параметров управления запасами с их использованием позволяет экономить заметные средства при хранении и пополнении запасов на складах.

Однако методы и модели управления запасами для иерархических систем складов развиты недостаточно, хотя в таких системах, как правило, хранятся большие запасы продукции, и осуществляется ее значительный оборот.

В связи с этим есть основания полагать, что создание моделей и методов для управления запасами в таких системах складов позволит экономить значительные средства на содержание и пополнение запасов.

В данной работе рассматриваются задачи управления запасами в иерархических системах складов, снабжаемых различными поставщиками, в услови-

ях постоянного спроса на хранимую продукцию, а также с учетом ограничений на вместимость складов. Для решения этих задач предлагаются модели и методы, позволяющие в соответствии с имеющимся спросом на продукцию определять время и объемы пополнения всех складов, находящихся на различных уровнях такой системы складов.

## 2. Постановки задач

Рассмотрим постановки задач управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов, для расчетов которых в данной работе предлагаются специальные модели и методы.

Пусть задана иерархическая система складов, которую можно представить в виде ациклического графа. В вершине такого графа находится склад первого уровня, который снабжается продукцией напрямую от  $K$  внешних поставщиков. На этом складе хранится поступающая в систему продукция, которая с него доставляется на склады второго уровня. Со складов второго уровня продукция доставляется на склады третьего уровня и т.д. Каждый склад следующего уровня снабжается только с одного склада предыдущего уровня. Для каждого снабжаемого склада системы известен снабжающий его склад. Назначение снабжающего склада может производиться как по стоимости доставки продукции между складами, так и по составу поставляемой продукции. На каждом уровне этой системы кроме первого имеются склады, с которых не производится снабжение складов следующего уровня. На втором уровне системы складов имеется  $M_2$  складов. На  $j$ -м уровне системы находится  $M_j$  складов и на последнем  $N$ -м уровне системы складов находится  $M_N$  складов. Вместимость каждого склада такой системы ограничена. Для более эффективного использования складов с учетом их ограниченной вместимости пополнения запасов от разных поставщиков не следует проводить в одно время.

Со снабжающих складов каждого уровня кроме пополнения запасов производится снабжение розничных клиентов склада. Для каждого склада, находящегося на любом уровне системы складов, задана стоимость хранения на нем единицы продукции в единицу времени. Заданы также стоимости доставки продукции с любого снабжающего склада на снабжаемый склад, которые не зависят от величины пополнения. В задачах управления запасами [2–5] такое предположение достаточно часто используется.

Пусть спрос на хранящуюся продукцию на любом складе такой системы постоянен. В этом случае для системы складов удастся предложить методы управления запасами, которые позволят обеспечить бездефицитную работу складов.

В связи с этим в задаче с постоянным спросом на продукцию каждого типа требуется для каждого склада такой системы складов определить интервалы времени между смежными пополнениями запасов, а также величину каждого пополнения запасов. Величины этих параметров требуется определить таким образом, чтобы затраты на доставку и пополнение запасов были бы по

возможности меньше и ни на одном из складов в иерархической системе не возникал бы дефицит продукции.

Здесь следует отметить, что в настоящее время наиболее часто встречаются трехуровневые складские системы, у которых на первом уровне находится региональный склад, с которого остальные склады системы получают всю доставляемую на него продукцию. На втором уровне находятся районные склады, а на третьем уровне – магазины, ремонтные мастерские, автосервисы и т.д.

### 3. Случай ограничений на вместимость складов при наличии нескольких поставщиков продукции

Рассмотрим принципы построения моделей для управления запасами при наличии ограничений на вместимость складов и нескольких поставщиков продукции.

Принципы построения таких моделей удобно рассматривать на примере простейшей задачи управления запасами на складе, когда имеется два поставщика, и каждый поставщик поставяет продукцию только одного типа. Спрос на продукцию каждого типа на этом складе постоянный. Полностью такая задача может быть сформулирована следующим образом.

Пусть имеется склад, на котором количество мест для хранения запасов ограничено некоторой величиной  $Q$ . На складе хранится продукция двух типов, которая не является штучной. Спрос на продукцию первого типа  $r_1$ , которую поставяет первый поставщик в единицу времени и спрос на продукцию второго типа  $r_2$ , которую поставяет второй поставщик в единицу времени, являются постоянными. Известны стоимость хранения единицы продукции первого типа  $C_1$  и второго типа  $C_2$  в единицу времени. Во всех местах, предназначенных для хранения продукции, может храниться продукция этих двух типов. Известны также стоимость доставки на склад пополнения запасов первого типа  $\tilde{C}_1$  и второго типа  $\tilde{C}_2$ , которые не зависят от величины пополнения. Поставки пополнения запасов от разных поставщиков не должны происходить в одно время.

В задаче требуется определить время между смежными пополнениями запасов и величину этих пополнений так, чтобы затраты на хранение и пополнение запасов были бы минимальными, а величина хранимых на складе запасов не превышала бы вместимость склада  $Q$ .

Графическое представление процессов пополнения запасов от двух поставщиков и их расхода в условиях постоянного спроса приведено на рис. 1.

Из графического представления процессов накопления и расхода запасов, приведенного на рис. 1, видно, что в течение любого интервала времени между смежными пополнениями запасов, когда эти интервалы равны, затраты  $d(t)$  на хранение и пополнение запасов будут

$$(3.1) \quad d(t) = \left( \frac{C_1 r_1 t^2}{2} + \tilde{C}_1 + \frac{C_2 r_2 t^2}{2} + \tilde{C}_2 \right).$$

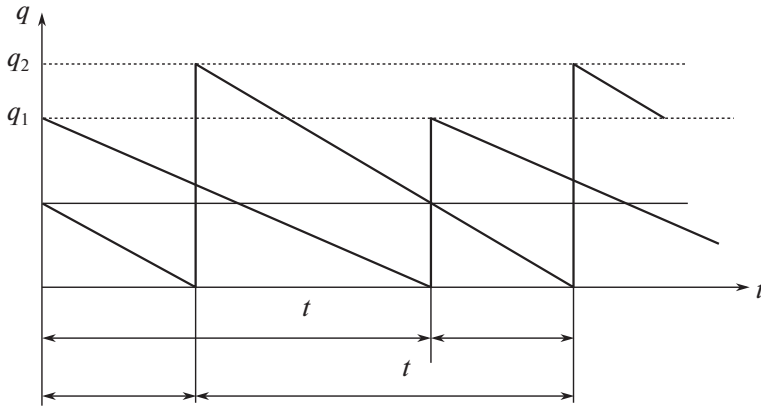


Рис. 1. Графическое представление процессов накопления и расхода запасов на складе от двух поставщиков.

Это справедливо, поскольку при постоянном спросе затраты на хранение каких-либо запасов, которые «выходят» из интервала времени  $t_s$ , будут равны затратам на хранение запасов этого же типа, остатки которых будут израсходованы в этом же интервале времени  $t$ .

Пусть в течение планируемого интервала времени  $T$  произойдет  $n$  пополнений склада от какого-либо поставщика. Тогда затраты на хранение и пополнение запасов на складе будут

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad D(t) &= nd(t) = \left( \frac{C_1 r_1 t^2}{2} + \tilde{C}_1 + \frac{C_2 r_2 t^2}{2} + \tilde{C}_2 \right) n = \\
 &= \left( \frac{(C_1 r_1 + C_2 r_2) t^2}{2} + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \right) \frac{T}{t} = \\
 &= \frac{(C_1 r_1 + C_2 r_2) t T}{2} + \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) T}{t}.
 \end{aligned}$$

Графически функцию затрат  $D(t)$  можно представить в виде, как показано на рис. 2. Эта функция является строго выпуклой и непрерывно дифференцируемой функцией  $t$ .

Если бы ограничений на вместимость склада не было, то величину интервала времени между смежными пополнениями запасов  $t_s$  целесообразно выбирать из условия минимума затрат на хранение и пополнения запасов на складе. Условие минимума функции (3.1) без учета ограничения на вместимость склада имеет вид:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{(C_1 r_1 + C_2 r_2) T}{2} - \frac{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) T}{t^2} = 0.$$

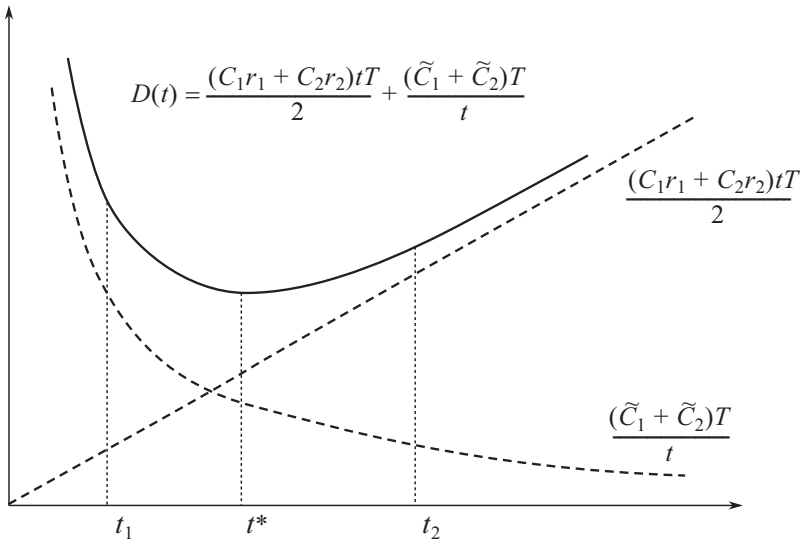


Рис. 2. Функция затрат  $D(t)$  на хранение и пополнение запасов.

Из этого соотношения определяется оптимальное значение интервала времени между смежными пополнениями запасов

$$t^* = \sqrt{\frac{2(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)}{(C_1 r_1 + C_2 r_2)}}.$$

В данной задаче, однако, присутствуют ограничения на вместимость склада  $Q$ , которую хранящиеся запасы не должны превышать. Из графического представления процессов накопления и расхода запасов, приведенного на рис. 1, также видно, что количество продукции на складе увеличивается в моменты пополнения запасов. Это справедливо, поскольку перед каждым пополнением склада величина запасов может только уменьшаться. В момент пополнения величина запасов на складе увеличивается, а после пополнения величина запасов будет только уменьшаться до следующего пополнения. Поэтому величины запасов на складе оказываются больше в моменты пополнения склада, чем в течение интервалов времени между пополнениями склада.

В связи с этим величины запасов  $q_1$  и  $q_2$  на складе не должны превышать вместимость склада  $Q$  в моменты его пополнения соответственно от первого и от второго поставщиков, т.е. в эти моменты должны выполняться следующие условия:  $q_1 \leq Q$  и  $q_2 \leq Q$ . Определим величины  $q_1$  и  $q_2$ .

Пусть после пополнения запасов от первого поставщика через интервал времени  $\tau_1$  производится поставка пополнения запасов от второго поставщика, а время между смежными пополнениями запасов от каждого поставщика равно  $t_s$ . Тогда величины запасов на складе в моменты пополнения запасов

склада от первого  $q_1$  и от второго  $q_2$  поставщиков соответственно равны:

$$\begin{aligned}q_1 &= r_1 t_s + r_2 \tau_1, \\q_2 &= (r_1 + r_2) t_s - r_1 \tau_1, \\ \tau_1 &< t_s.\end{aligned}$$

Из соотношений для определения  $q_1$  и  $q_2$  видно, что чем меньше будет величина  $t_s$ , тем меньше будут и величины  $q_1$ ,  $q_2$ . Из этих соотношений также видно, что при увеличении  $\tau_1$  величина  $q_1$  будет увеличиваться, а величина  $q_2$  уменьшаться. Поэтому для более эффективного использования вместимости склада величину  $\tau_1$  целесообразно выбирать таким образом, чтобы  $q_1$  было равно  $q_2$ . Кроме того, величины  $q_1$  и  $q_2$  должны удовлетворять следующим ограничениям:  $q_1 \leq Q$  и  $q_2 \leq Q$ . Из условия  $q_1 = q_2$  определяется величина  $\tau_1$

$$\tau_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} t_s.$$

Из условия, что при  $q_1 = q_2$  будут выполняться ограничения  $q_1 \leq Q$  и  $q_2 \leq Q$ , определяется величина  $t_s$ , которая должна удовлетворять неравенству:

$$t_s \leq \frac{(r_1 + r_2) Q}{(r_1 r_2 + r_2^2 + r_1^2)}.$$

Если величина  $t_s$  (рис. 2) окажется больше  $t^*$ , то в качестве решения  $\check{t}$  выбирается величина  $t^*$ . Такой выбор справедлив, поскольку в этой точке значение функции  $D(t^*)$  окажется меньше, чем  $D(t_s)$ .

Если величина  $t_s$  окажется меньше  $t^*$ , то в качестве решения  $\check{t}$  выбирается величина  $t_s$ , поскольку в этой точке значение функции  $D(t_s)$  из-за ее непрерывности и строгой выпуклости будет минимальным среди допустимых значений  $t$ . При такой величине  $\check{t}$  запасы не превысят вместимость склада.

Поэтому решение задачи минимизации функции  $D(t)$  при наличии ограничения на вместимость склада можно записать в следующем виде:

$$\check{t} = \min \{t^*, t_s\}.$$

После определения величины  $\check{t}$  с помощью приведенного выше соотношения следует пересчитать величину  $\tau_1$ .

Здесь хотелось бы отметить, что вывод соотношений для определения параметров управления запасами при наличии многих поставщиков продукции не имеет принципиальных отличий от случая двух поставщиков при выводе таких соотношений для складов и иерархических систем складов. Однако наличие многих поставщиков продукции приводит к громоздкому виду таких соотношений даже для систем складов с малым количеством уровней, небольшим количеством складов на них и при нескольких типах хранимой продукции. Поэтому далее будут рассматриваться задачи только с двумя поставщиками продукции для пополнения запасов.

#### 4. Построение методов управления запасами в иерархических системах складов

Рассмотрим идеи и принципы построения модели управления запасами для иерархической системы складов, когда спрос на продукцию, хранящуюся на каждом складе и реализуемую с него, постоянный, а пополнение запасами следует организовать так, чтобы не допустить дефицита продукции и превышения вместимости каждого склада.

Основные идеи и принципы вывода соотношений для определения параметров управления запасами в иерархической системе складов с ограничениями на их вместимость удобно рассмотреть на примере самой простой схемы такой системы. Пусть схема этой системы состоит из двух складов, на которых хранится продукция двух типов, не являющаяся штучной. Продукция каждого типа поступает на первый склад от своего поставщика. Этот склад является снабжающим и с него пополняют запасы на другом складе, который назовем вторым. Продукция от каждого поставщика не должна поступать на первый склад в одно время.

Пусть для такой системы складов известны стоимости хранения на первом складе единицы продукции от первого поставщика в единицу времени  $C_{11}$  и от второго поставщика в единицу времени  $C_{12}$ . На продукцию первого склада, поставляемую от первого и второго поставщиков, имеется постоянный спрос  $r_{11}$  и  $r_{12}$  соответственно в единицу времени. С первого склада производится также снабжение хранимой продукцией второго склада. Для второго склада тоже известны стоимости хранения единицы продукции соответственно  $C_{21}$  от первого и  $C_{22}$  от второго поставщиков в единицу времени и постоянный спрос  $r_{21}$  и  $r_{22}$  в единицу времени на продукцию и соответственно от первого и от второго поставщиков. Количество продукции, поставляемое и находящееся на первом и втором складах, не должно превышать вместимости этих складов соответственно  $Q_1$  и  $Q_2$ .

В задаче требуется определить моменты времени между смежными пополнениями запасов на этих складах, чтобы при постоянном спросе на хранящуюся продукцию сократить затраты на хранение и пополнение запасов и при этом обеспечить отсутствие дефицита продукции на складах.

Здесь следует отметить, что в случае, когда между смежными пополнениями снабжающего склада будет производиться не целое количество пополнений снабжаемого склада, то вряд ли удастся создать эффективную систему управления запасами для этих складов. Дело в том, что в этом случае перед каждым пополнением снабжающего склада на снабжаемом складе будет находиться разное количество запасов. Это приведет к необходимости определять величину запасов на снабжаемом складе перед каждым пополнением снабжающего склада и с учетом этой величины определять пополнение снабжающего склада. В условиях постоянного спроса и двух складов, на которых хранится продукция одного типа, задача такого отслеживания запасов может решаться без значительных затруднений.

Однако для снабжающего склада системы, на котором хранится продукция многих типов и с которого снабжаются несколько складов, решение подобной задачи представляет весьма непростую проблему. Для иерархической системы складов, имеющей несколько уровней со многими складами, на каждом из которых хранится продукция многих типов, решение такой задачи уже становится очень сложной проблемой.

Если же между смежными пополнениями снабжающего склада будет производиться целое количество пополнений снабжаемых складов, то после пополнениями снабжающего склада ситуация на снабжаемых складах при постоянном спросе будет повторяться. Это существенно упрощает проблему построения системы управления запасами для таких складов. Поэтому пополнение продукции на снабжаемых складах предлагается организовывать таким образом, чтобы продукция, хранимая на них, заканчивалась к моменту пополнения запасов на снабжающем складе. Время между смежными пополнениями снабжающего склада  $t_1$  в таком случае можно представить в виде  $t_1 = n_i t_i$ , где  $n_i$  – целое число, которое в соответствии с приведенным выше условием для снабжающего склада должно быть больше или равно 2, т.е.  $n_i \geq 2$ ,  $t_i$  – время между смежными пополнениями  $i$ -го снабжаемого склада.

Для определения параметров управления запасами в этой системе рассмотрим сначала затраты  $D_2(t_2)$  на хранение и пополнение запасов в течение некоторого планируемого интервала времени  $T$  на втором складе. Эти затраты согласно (3.1) и (3.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$(4.1) \quad D_2(t_2) = \frac{(C_{21}r_{21} + C_{22}r_{22}) t_2 T}{2} + \frac{(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22}) T}{t_2}.$$

Оптимальная величина времени  $t_2^*$  между смежными пополнениями запасов без учета ограничения на вместимость второго склада определяется, как уже отмечалось, из условия минимума функции  $D_2(t_2)$  из (4.1), который достигается при равенстве нулю производной, и имеет следующий вид:

$$(4.2) \quad t_2^* = \sqrt{\frac{2(\tilde{C}_{21} + \tilde{C}_{22})}{(C_{21}r_{21} + C_{22}r_{22})}}.$$

Однако в этом случае, как и в задаче, описанной в третьем пункте, вместимость второго склада ограничена.

Пусть после пополнения запасов на втором складе с первого продукцией от первого поставщика через интервал времени  $\tau_{21}$  производится поставка пополнения запасов от второго поставщика, а время между смежными пополнениями запасов от каждого поставщика равно  $t_{2s}$ .

Величины запасов на втором складе в моменты пополнения его запасов продукцией от первого  $q_{21}$  и от второго  $q_{22}$  поставщиков соответственно равны:

$$q_{21} = r_{21} t_s + r_{22} \tau_{21}, \quad q_{22} = (r_{21} + r_{22}) t_{2s} - r_{21} \tau_{21}, \quad \tau_{21} < t_{2s}.$$



Из условия равенства  $q_{21} = q_{22}$  и ограничений  $q_{21} \leq Q_2$ ,  $q_{22} \leq Q_2$  по аналогии с тем, как это было сделано ранее, определяется величина  $\tau_{21}$  и ограничение на величину  $t_{2s}$

$$\tau_{21} = \frac{r_{22}}{r_{21} + r_{22}} t_{2s}, \quad t_{2s} \leq \frac{(r_{21} + r_{22}) Q_2}{(r_{21} r_{22} + r_{22}^2 + r_{21}^2)}.$$

Поэтому, как и в ранее рассмотренном случае, если величина  $t_{2s}$  окажется меньше величины  $t_2^*$ , определяемой из (4.2), то в качестве интервала времени между смежными пополнениями второго склада  $\tilde{t}_2$  выбирается величина  $t_{2s}$ , в противном случае выбирается величина  $t_2^*$ , т.е.

$$\tilde{t}_2 = \min \{t_2^*, t_{2s}\}.$$

На первый склад при каждом пополнении от первого поставщика доставляется количество продукции, равное  $(p_{11} + \tilde{p}_{11})$ , и от второго поставщика – количество продукции, равное  $(p_{12} + \tilde{p}_{12})$ . Количество продукции  $p_{11}$  и  $p_{12}$  должно обеспечить снабжение собственных потребителей первого склада до его следующего пополнения. Эта продукция равномерно расходуется, и ее запасы заканчиваются к моменту следующей поставки соответствующей продукции на склад. Количество продукции  $\tilde{p}_{11}$  и  $\tilde{p}_{12}$  должно обеспечить снабжение второго склада продукцией от первого и второго поставщиков до следующего пополнения первого склада этой продукцией. Продукция, полученная от этих поставщиков, партиями в количестве  $p_{21}$  и  $p_{22}$  будет поставляться на снабжаемый склад, чтобы обеспечить его работу без дефицита запасов продукции. Продукция, поступающая на первый склад, как от первого, так и от второго поставщиков, хранится на складе без первых партий, которыми продукция поставляется на второй склад. Эти партии целесообразно сразу отправлять на второй склад для снабжения клиентов этого склада и на первом складе не хранить.

Поэтому в течение первого интервала времени между смежными пополнениями запасов на втором складе продукцией от первого поставщика  $\tilde{t}_2$  на первом складе будет храниться только часть продукции в количестве  $p_{21}(n_2 - 1)$  из продукции от первого поставщика  $\tilde{p}_{11}$ , предназначенной для снабжения второго склада. Во второй интервала времени  $\tilde{t}_2$  на первом складе будет храниться продукция в количестве  $p_{21}(n_2 - 2)$ , поскольку одна партия размером  $p_{21}$  будет отправлена на второй склад и т.д. Такой процесс будет продолжаться до  $(n_2 - 1)$ -го интервала времени  $\tilde{t}_2$ , на котором будет храниться только одна партия продукции в количестве  $p_{21}$ . На последнем интервале времени  $\tilde{t}_2$  непосредственно перед пополнением первого склада на нем не хранится продукция, предназначенная для снабжения второго склада, поскольку эта продукция уже должна быть доставлена на второй склад.

Спустя время  $\tau_1$  после пополнения первого склада продукцией от первого поставщика на этот склад поступает продукция в количестве  $(p_{12} + \tilde{p}_{12})$  от второго поставщика. Эта продукция расходуется по такой же схеме, как и

продукция от первого поставщика. После пополнения первого склада весь описанный процесс повторяется.

Тогда стоимость хранения на первом складе продукции от первого и второго поставщиков для снабжения второго склада  $\hat{D}_1$  будет

$$\begin{aligned}\hat{D}_1 &= C_{11}(p_{21}(n_2 - 1)t_2 + p_{21}(n_2 - 2)t_2 + \dots + p_{21}t_2) + \\ &+ C_{12}(p_{22}(n_2 - 1)t_2 + p_{22}(n_2 - 2)t_2 + \dots + p_{22}t_2) = \\ &= \frac{C_{11}p_{21}n_2(n_2 - 1)t_2}{2} + \frac{C_{12}p_{22}n_2(n_2 - 1)t_2}{2} = \\ &= \frac{C_{11}r_{21}t_1t_2(n_2 - 1)}{2} + \frac{C_{12}r_{22}t_1t_2(n_2 - 1)}{2}.\end{aligned}$$

Кроме этой продукции на первый склад, как уже отмечалось выше, должна быть направлена продукция в количестве  $p_{11}$  и  $p_{12}$  для снабжения собственных потребителей первого склада до его следующего пополнения, которое произойдет спустя интервал времени  $t_1$ . Стоимость хранения этой продукции в течение времени  $t_1$  при постоянном спросе  $r_{11}$  и  $r_{12}$  будет

$$\bar{D}_1 = \frac{C_{11}p_{11}t_1}{2} + \frac{C_{12}p_{12}t_1}{2} = \frac{C_{11}r_{11}t_1^2}{2} + \frac{C_{12}r_{12}t_1^2}{2} = \frac{(C_{11}r_{11} + C_{12}r_{12})t_1^2}{2}.$$

Тогда затраты на доставку пополнений и хранение запасов на первом складе в течение планируемого периода  $T$  можно записать с учетом условия  $t_1 = n_2t_2$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}D_1 &= \left(\bar{D}_1 + \hat{D}_1 + \tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12}\right) \frac{T}{t_1} = \\ &= \frac{C_{11}r_{11}t_1^2}{2} + \frac{C_{12}r_{12}t_1^2}{2} + \frac{r_{11}r_{21}t_1t_2(n_2 - 1)}{2} + \\ &+ \frac{(C_{11}(r_{11} + r_{21}) + C_{12}(r_{12} + r_{22}))t_1T}{2} - \\ &- \frac{(C_{11}r_{21} + C_{12}r_{22})t_2T}{2} + \frac{(\tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12})T}{t_1}.\end{aligned}$$

Поскольку величина  $t_2$  уже была вычислена, будем определять величину  $t_1^*$  из условия  $\frac{dD_1(t_1)}{dt_1} = 0$  минимума функции  $D_1$  при известном  $t_2$ . Тогда величина  $t_1^*$  будет

$$t_1^* = \sqrt{\frac{2(\tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12})}{(C_{11}(r_{11} + r_{21}) + C_{12}(r_{12} + r_{22}))}}.$$

На вместимость первого склада также наложены ограничения. Как и в рассмотренном выше случае, величины запасов  $q_1$  и  $q_2$  на первом складе в

моменты пополнения запасов склада от первого и от второго поставщиков будут соответственно

$$q_{11} = r_{11}t_{1s} + r_{21} \left( t_{1s} - \check{t}_2 \right) + (r_{21} + r_{22}) \tau_1,$$

$$q_{12} = (r_{11} + r_{12}) t_{1s} + (r_{21} + r_{22}) \left( t_{1s} - \check{t}_2 \right) - (r_{11} + r_{12}) \tau_1,$$

где  $\tau_1$  – время поставки пополнения от второго поставщика с момента поставки от первого.

Из условия равенства  $q_{11} = q_{12}$  и ограничений  $q_{11} \leq Q_1$ ,  $q_{12} \leq Q_1$  по аналогии с тем, как это было сделано ранее, определяется величина  $\tau_1$  и ограничение на величину  $t_{1s}$

$$(4.3) \quad \tau_1 = \frac{r_{21} \check{t}_2 + (r_{12} + r_{22}) \left( t_{1s} - \check{t}_2 \right)}{(r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22})},$$

$$(4.4) \quad t_{1s} \leq \frac{\left( Q_1 (r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}) + (r_{11} + r_{12}) (r_{21} - r_{12} - r_{22}) \check{t}_2 \right)}{\left( (r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22})^2 - (r_{11}r_{12} + r_{12}^2 + r_{11}r_{22} + r_{12}r_{22}) \right)}.$$

Здесь, как и в ранее рассмотренном случае, если величина  $t_{1s}$  окажется меньше  $t_1^*$ , то в качестве интервала времени между смежными пополнениями второго склада  $\check{t}_1$  выбирается величина  $t_{1s}$ , в противном случае выбирается величина  $t_1^*$ , т.е.  $\check{t}_1 = \min \{t_1^*, t_{1s}\}$ .

После определения величин  $\check{t}_1$  и  $\check{t}_2$  необходимо произвести корректировку величины  $\check{t}_2$ , если величина  $n_2$  в ограничении  $\check{t}_1 = n_2 \check{t}_2$  не будет целой. Для этого вычисляется отношение  $\tilde{n}_{12} = \frac{\check{t}_1}{\check{t}_2}$ . Сначала величина  $n_2$  полагается равной  $n_{12} = [\tilde{n}_{12}]$ , где  $[\tilde{n}_{12}]$  и обозначает целую часть числа  $\tilde{n}_{12}$ . После этого определяется величина  $\tilde{t}_2$  из условия  $\tilde{t}_2 = \frac{\check{t}_1}{n_{12}}$  и производится проверка выполнения ограничения  $r_2 \tilde{t}_2 \leq Q_2$ . Если это ограничение выполняется, то корректировка и выбор величины  $\tilde{t}_2$  заканчиваются. В противном случае  $n_{12}$  полагается равным  $n_{12} = [\tilde{n}_{12}] + 1$ . С этим значением  $n_{12}$  определяется новая величина  $\tilde{t}_2$  из условия  $\tilde{t}_2 = \frac{\check{t}_1}{n_{12}}$ , которая будет меньше  $\check{t}_2$ , поскольку  $n_{12}$  будет уже больше  $\tilde{n}_{12}$ . Поэтому ограничение  $r_2 \tilde{t}_2 \leq Q_2$  при таком  $\tilde{t}_2$  должно выполняться.

## 5. Управление запасами в иерархических системах складов

Рассмотрим вывод основных соотношений для определения параметров в задаче управления запасами в иерархической системе складов, в которой имеются ограничения на вместимость каждого склада. Спрос на хранящуюся на складах продукцию является постоянным. На склад первого уровня для пополнения запасов поступает продукция от двух поставщиков.

Вывод указанных соотношений, как и в пункте 4, начинается с одного из складов, например, с  $m$ -го, находящегося на последнем  $N$ -м уровне иерархической системы складов, с которого не производится снабжения других складов. В системе складов такие склады могут находиться на всех уровнях системы, кроме первого, а на последнем уровне все склады не являются снабжающими.

Величина спроса на продукцию  $v$ -го типа ( $v \in J_{Nm}$ ) в единицу времени от  $i$ -го поставщика на этом складе равна спросу на эту продукцию только собственных клиентов склада  $r_{Nmvi}$ . Тогда затраты  $D_{Nm}(t_{Nm})$  на хранение и пополнение запасов на складе в течение планируемого интервала времени  $T$  в соответствии с выводом аналогичных соотношений из пункта 3 можно представить в следующем виде:

$$D_{Nm}(t_{Nm}) = \left( \frac{t_{Nm}T}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{Nmi}} C_{Nmvi} r_{Nmvi} + \frac{T}{t_{Nm}} \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{Nmi} \right),$$

где  $V_{Nmi}$  – множество типов продукции, которое хранится на  $m$ -м складе  $N$ -го уровня и поставляется  $i$ -м поставщиком,  $C_{Nmvi}$  – стоимость хранения в единицу времени единицы продукции  $v$ -го типа от  $i$ -го поставщика на  $m$ -м складе  $N$ -го уровня,  $\tilde{C}_{Nmi}$  – стоимость доставки пополнения  $m$ -го склада  $N$ -го уровня продукцией от  $i$ -го поставщика.

Величина  $t_{Nm}^*$  интервалов времени между смежными пополнениями склада следующим образом:

$$t_{Nm}^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{Nmi}}{C_{Nm} \sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{Nmi}} r_{Nmiv}}} = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{Nmi}}{C_{Nm} (R_{Nm1} + R_{Nm2})}},$$

где

$$R_{Nm1} = \sum_{v \in V_{Nm1}} r_{Nm1v}, \quad R_{Nm2} = \sum_{v \in V_{Nm2}} r_{Nm2v}.$$

Величины  $t_{Nm}$  и  $\tau_{Nmj}$ , при которых не происходит нарушения вместимости  $Q_{Nm}$   $m$ -го склада  $N$ -го уровня, определяются с помощью соотношений, полученных по аналогии с выводом соотношений (4.3)–(4.4), и имеющих следующий вид:

$$\tau_{Nm} \leq \frac{R_{Nm2}}{(R_{Nm1} + R_{Nm2})} t_{Nm},$$

$$t_{Nm} \leq \frac{(R_{Nm1} + R_{Nm2}) Q_{Nm}}{(R_{Nm1}^2 + R_{Nm1} R_{Nm2} + R_{Nm2}^2)}.$$

Поэтому, как и в ранее рассмотренном случае, если величина  $t_{Nm}$  окажется меньше  $t_{Nm}^*$ , то в качестве интервала времени между смежными попол-

нениями второго склада  $\tilde{t}_{Nm}$  выбирается величина  $t_{Nm}$ , в противном случае выбирается величина  $t_{Nm}^*$ , т.е.  $\tilde{t}_{Nm} = \min \{t_{Nm}^*, t_{Nm}\}$ .

Затраты  $D_{sj}(t_{sj})$  на хранение и пополнение запасов на  $j$ -м складе ( $j \in M_s$ )  $s$ -го уровня системы складов при  $1 \leq s \leq N - 1$ , с которых производится снабжение складов  $(s+1)$ -го уровня в течение планируемого интервала времени  $T$  в соответствии с выводом аналогичных соотношений из пункта 3, можно представить в следующем виде:

$$D_{sj}(t_{sj}) = \frac{Tt_{sj}}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{sji}} C_{sji} R_{sjiv} + \frac{T \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{sji}}{t_{sj}} - P,$$

где

$$R_{sjiv} = r_{sjiv} + \sum_{m \in J_{sj}} r_{(s+1)miv} \quad (R_{Njiv} = r_{Njiv}),$$

$J_{(s+1)j}$  – множество складов на  $(s+1)$ -м уровне системы, которые снабжаются с  $j$ -го склада, находящегося на  $s$ -м уровне системы складов,

$$P = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{m \in J_{(s+1)j}} t_{(s+1)m} \sum_{v \in V_{(s+1)ji}} C_{(s+1)mi} R_{(s+1)miv}.$$

Величина  $t_{sj}^*$  интервалов времени между смежными пополнениями склада определяется без учета ограничений на вместимость склада из условия минимума функции  $D_{sj}(t_{sj})$  согласно следующему соотношению:

$$t_{sj}^* = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^2 \tilde{C}_{sji}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{v \in V_{sji}} C_{sji} R_{sjiv}}}.$$

Величины  $t_{sj}$  и  $\tau_{sj}$ , при которых не происходит нарушения вместимости  $Q_{sj}$   $j$ -го склада  $s$ -го уровня, определяются с помощью соотношений, полученных по аналогии с выводом соотношений (4.3)–(4.4), и имеющих следующий вид:

$$\tau_{sj} = \frac{\tilde{B}t_{sj} - \sum_{k \in K_{(s+1)j}} t_k \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl}}{\tilde{A}},$$

$$t_{sj} \leq \frac{\tilde{F}\tilde{A} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} t_k \tilde{B} \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl}}{(\tilde{D}\tilde{A} + \tilde{B}^2)},$$

где  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{F}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sj} &= \left( \sum_{l \in L_{sj1}} r_{sj1} + \sum_{l \in L_{sj2}} r_{sj2} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k1}} R_{(s+1)kl} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl} \right), \\ \tilde{B} &= \left( \sum_{l \in L_{sj2}} r_{sj2} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)k2} \right), \\ \tilde{D} &= \left( \sum_{l \in L_{sj1}} r_{sj1} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} \sum_{l \in L_{(s+1)k1}} R_{(s+1)kl} \right), \\ \tilde{F} &= \left( Q_{sj} + \sum_{k \in K_{(s+1)j}} t_k \sum_{l \in L_{(s+1)k2}} R_{(s+1)kl} \right). \end{aligned}$$

Поэтому, как и в ранее рассмотренном случае, если величина  $t_{sj}$  окажется меньше величины  $t_{sj}^*$ , то в качестве интервала времени между смежными пополнениями  $j$ -го склада  $s$ -го уровня  $\tilde{t}_{sj}$  выбирается величина  $t_{sj}$ , в противном случае выбирается величина  $t_{sj}^*$ , т.е.  $\tilde{t}_{sj} = \min \{t_{sj}^*, t_{sj}\}$ .

Таким образом, определение величин спроса в системе складов начинается со складов последнего  $N$ -го уровня, для которых эти величины равны спросу на хранимую продукцию только у клиентов этих складов. Далее процесс определения этих величин последовательно продолжается для складов предпоследнего уровня и т.д. до склада первого уровня.

После этого проводится корректировка интервалов времени  $t_{si}$  между смежными пополнениями запасов  $i$ -го склада  $s$ -го уровня ( $s = 2, \dots, N$ ;  $i \in M_s$ ). Такая корректировка начинается со складов второго уровня, проводится по описанной выше схеме и заканчивается на складах последнего  $N$ -го уровня.

Когда корректировка времени пополнения складов системы будет завершена, определяются величины пополнений складов.

## 6. Результаты вычислительных экспериментов

В качестве примера использования предложенных методов рассмотрим систему складов, в состав которой входит десять складов. Со склада, находящегося на первом уровне системы складов, в которой имеется три уровня, снабжаются остальные склады продукцией трех различных типов, которая измеряется в тоннах. На втором уровне находится три склада, которые непо-

Таблица

№ склада	Уровень склада	№ склада снабжения	Продукт 1		Продукт 2		Продукт 3		Затраты поставок
			$C_{1j}$	$r_{1j}$	$C_{2j}$	$r_{2j}$	$C_{3j}$	$r_{3j}$	$\tilde{C}_j$
			п/т сут	т/сут	п/т сут	т/сут	п/т сут	т/сут	руб
1	I		2	16	2,5	17	1,5	18	55 4300
2	II	1	8	10	7	12	8	11	65 000
3	II	1	7	8	6	9	5	8	75 000
4	II	1	6	6	7	7	7	8	65 000
5	III	2	40	5	45	4	40	6	12 000
6	III	2	35	6	39	4	36	5	12 000
7	III	3	36	7	34	6	38	8	18 000
8	III	3	34	7	36	5	35	8	13 000
9	III	4	35	8	38	7	40	5	12 500
10	III	4	32	8	33	7	35	6,5	12 500

средственно снабжаются со склада первого уровня. На третьем уровне находится шесть складов, которые снабжаются со складов второго уровня.

Стоимость хранения единицы  $i$ -й продукции в единицу времени на  $j$ -м складе  $C_{ij}$  ( $i = 1, \dots, 3$ ,  $j = 1, \dots, 10$ ) и спрос на продукцию  $i$ -го типа в единицу времени на  $j$ -м складе  $r_{ij}$  приводятся в таблице. Там же приводится стоимость доставки продукции со склада снабжения на  $j$ -й склад системы  $\tilde{C}_j$ .

В первом столбце слева введены номера складов. В следующем столбце указаны уровни каждого склада. В третьем столбце приводится номер склада, с которого снабжается склад, соответствующий номеру склада, находящегося в первом столбце этой строки. Следующие три «больших» столбца содержат информацию соответственно по первому, второму и третьему типу, хранящейся в системе складов продукции. Каждый из этих складов после первой ячейки разделяется на два столбца. В левом столбце, каждого разделившегося «большого» столбца, приводится стоимость хранения в рублях единицы продукции соответствующего типа за сутки на складе, находящимся в первом столбце этой строки. В другом столбце этого разделившегося «большого» столбца приводится спрос, являющийся в данной задаче постоянным, в тоннах за сутки на складе, находящимся в первом столбце этой строки.

В последнем столбце приводится стоимость доставки пополнения запасов на склад, находящийся в первом столбце этой строки.

В результате определения параметров управления запасами и проведения их корректировки были получены следующие значения этих параметров:  $t_1 = 48$  сут,  $q_{11} = 3888$  т,  $q_{12} = 3744$  т,  $q_{13} = 4008$  т,  $t_2 = 16$  сут,  $q_{21} = 336$  т,  $q_{22} = 320$  т,  $q_{23} = 368$  т,  $t_3 = 24$  сут,  $q_{31} = 528$  т,  $q_{32} = 480$  т,  $q_{33} = 576$  т,  $t_4 = 16$  сут,  $q_{41} = 352$  т,  $q_{42} = 336$  т,  $q_{43} = 312$  т,  $t_5 = 8$  сут,  $q_{51} = 40$  т,  $q_{52} = 32$  т,  $q_{53} = 48$  т,  $t_6 = 8$  сут,  $q_{61} = 48$  т,  $q_{62} = 32$  т,  $q_{63} = 40$  т,  $t_7 = 8$  сут,  $q_{71} = 56$  т,  $q_{72} = 48$  т,  $q_{73} = 64$  т,  $t_8 = 8$  сут,  $q_{81} = 56$  т,  $q_{82} = 40$  т,  $q_{83} = 64$  т,  $t_9 = 5,3$  сут,

$q_{91} = 42,64$  т,  $q_{92} = 37,3$  т,  $q_{93} = 26,65$  т,  $t_{10} = 5,3$  сут,  $q_{101} = 42,64$  т,  $q_{102} = 37,31$  т,  $q_{103} = 34,6$  т.

Кроме этой задачи для проверки работоспособности предложенных методов было решено более 20 тестовых задач. Их решение подтвердило работоспособность этих методов. Расчеты параметров управления запасами при решении тестовых задач занимали не более нескольких минут (от 1 до 4 мин).

## 7. Заключение

Задачи управления многономенклатурными запасами в иерархических системах складов имеют важное прикладное значение. Их решение используется для определения параметров управления запасами при организации и снабжении регионов продукцией, лекарствами, запасными частями, особенно автомобильными и т.д. Вычислительные эксперименты, проведенные предложенными моделями и методами, подтвердили их достаточно высокую эффективность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калинин Н.М., Хоботов Е.Н.* Модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе // *АиТ.* 2008. № 9. С. 156–169.
2. *Хоботов Е.Н.* Методы решения задач управления многопродуктовыми запасами при случайном спросе // *Изв. РАН ТиСУ.* 2011. № 2. С. 91–102.
3. *Хедли Д., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969.
4. *Хоботов Е.Н.* Задачи и методы управления многономенклатурными запасами в условиях производства продукции // *Изв. РАН ТиСУ.* 2011. № 6. С. 221–232.
5. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. Учеб. пособие для вузов. СПб: Издательский дом “Питер”, 2001.
6. *Лотоцкий В.А., Мандель А.С.* Модели и методы управления запасами. М.: Наука, 1991.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Михальским.*

Поступила в редакцию 01.06.2023

После доработки 21.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023