Автоматика и телемеханика, № 2, 2023

Линейные системы

© 2023 г. **М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)**
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ПО ЛАГРАНЖУ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ[1]

Показано, что нормы линейного оператора в детерминированном и стохастическом случаях являются оптимальными значениями двойственных по Лагранжу задач. Для линейных нестационарных систем на конечном горизонте принцип двойственности приводит к стохастическим интерпретациям обобщенных H_2- и H_∞-норм системы. Рассмотрены стохастические минимаксные задачи фильтрации и управления при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов. Получены уравнения обобщенных H_∞-субоптимальных регуляторов, фильтров и идентификаторов, обеспечивающих компромисс между дисперсией ошибки на конце интервала наблюдений и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

Ключевые слова: стохастическое минимаксное управление, фильтр Калмана, двойственность по Лагранжу, обобщенное H_∞-оптимальное управление и фильтрация, обобщенное H_2-оптимальное управление, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023020022, **EDN:** OMHKZN

1. Введение

Как известно, существуют две основные концепции в теории управления при наличии неопределенности: стохастическая, когда неопределенные факторы типа начальных условий, возмущений и помех предполагаются случайными и при этом они наделяются некоторыми вероятностными характеристиками такими, например, как математическое ожидание и ковариация, и детерминистская, когда неопределенные факторы предполагаются детерминированными и принимающими значения в некоторых множествах. В первом случае цель состоит в оптимизации функционала качества системы в вероятностном смысле при условии, что вероятностные характеристики или их границы заданы, а во втором — в минимизации максимального значения

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2021-1394).

функционала на множестве значений неопределенных факторов, удовлетворяющих заданным ограничениям. В рамках обеих концепций разработаны эффективные методы решения разнообразных задач линейно-квадратичного оценивания, фильтрации и управления, в том числе задачи с критерием вида H_∞-нормы для детерминированных и стохастических систем (см., например, [1–5]). Вместе с тем обе концепции имеют свои недостатки: в стохастической парадигме сложно определить вероятностные характеристики неопределенных факторов, а в детерминистской — трудно найти адекватные ограничения для значений неопределенных факторов. Для преодоления этих недостатков, а также для расширения круга решаемых задач и интерпретации результатов, получаемых в одной парадигме, в терминах другой крайне важно выявить взаимосвязь между этими парадигмами.

Надо отметить, что к этой теме обращались неоднократно: связь между рекуррентным методом наименьших квадратов и фильтром Калмана является классическим тому примером [6]. Кроме того, в [7] показано, что стационарный фильтр Калмана является оптимальным не только при случайных помехах типа белого шума, но он также обеспечивает минимум максимального по времени значения евклидовой нормы ошибки при детерминированных помехах с ограниченной энергией. В широко известной статье [8] J.C. Willems привел чисто детерминистскую интерпретацию результатов, полученных в линейно-квадратичной оптимальной стохастической фильтрации и управлении (см. также [9]). А именно, он доказал, что если среди всех детерминированных возмущений, при которых может реализоваться наблюдаемый сигнал, выбрать то, которое имеет наименьшую норму, и подставить это возмущение в уравнения системы, то в результате получатся уравнения, совпадающие с уравнениями оптимального фильтра или регулятора при случайных, нормально распределенных возмущениях.

В данной статье показано, что задача максимизации квадрата евклидовой нормы выхода линейного оператора (преобразования), который отображает детерминированные векторы, удовлетворяющие эллипсоидальному ограничению, и задача максимизации дисперсии выхода этого оператора, отображающего случайные векторы, удовлетворяющие усредненному эллипсоидальному ограничению, являются двойственными по Лагранжу. Для операторов, порождаемых линейными динамическими системами, это приводит к двойственности стохастических и детерминированных минимаксных задач оценивания и управления с критериями вида обобщенных H_2- и H_∞-норм. Применение принципа двойственности позволяет сформулировать и решить новые задачи оптимального и робастного управления и фильтрации в стохастической постановке при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов. В работе получены уравнения обобщенных H_∞-субоптимальных регуляторов, фильтров и идентификаторов, обеспечивающих компромисс между дисперсией ошибки на конце интервала наблюдений и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

2. О двойственности по Лагранжу стохастической и детерминистской парадигм

Пусть два вектора $\xi \in \mathrm{R}^{n_\xi}$ и $\eta \in \mathrm{R}^{n_\eta}$, которые будем называть входом и выходом, связаны линейной зависимостью

$$\eta = \Psi\xi, \tag{2.1}$$

в которой Ψ — детерминированная $(n_\eta \times n_\xi)$-матрица. Введем обозначения

$$|a|_R^2 = a^{\mathrm{T}} R^{-1} a, \quad \|b\|^2_{G\,[t_0,t]} = \sum_{i=t_0}^{t-1} |b(i)|^2_{G(i)},$$

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ и $G(t) = G^{\mathrm{T}} > 0$ — весовые матрицы. Определим обобщенную норму оператора Ψ с весовой матрицей $K = K^{\mathrm{T}} > 0$ как

$$\|\Psi\|_K^2 = \sup_{\xi\neq 0} \frac{|\eta|^2}{|\xi|_K^2} = \sup_{\xi\neq 0} \frac{\xi^{\mathrm{T}}\Psi^{\mathrm{T}}\Psi\xi}{\xi^{\mathrm{T}}K^{-1}\xi} = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^{\mathrm{T}}). \tag{2.2}$$

Эта индуцированная обобщенная норма оператора Ψ, которую будем также называть уровнем гашения детерминированных возмущений, равна максимальному значению евклидовой нормы выхода η при всех входах ξ, принадлежащих эллипсоиду $\mathcal{E}_\xi(K) = \left\{\xi : \xi^{\mathrm{T}}K^{-1}\xi \leqslant 1\right\}$, и может быть найдена как решение следующей оптимизационной задачи.

З а д а ч а D.

$$\gamma_d^2(\Psi) = \max_\xi |\eta|^2 : \ \eta = \Psi\xi, \quad \xi^{\mathrm{T}}K^{-1}\xi \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Если $\xi = \xi_s$ — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $E\xi_s\xi_s^{\mathrm{T}} = K_\xi$, то ковариационная матрица выхода равна $K_\eta = \Psi K_\xi \Psi^{\mathrm{T}}$, а математическое ожидание квадрата евклидовой нормы выхода равно следу этой матрицы, т.е. $E|\eta|^2 = \mathrm{tr}\,(\Psi K_\xi \Psi^{\mathrm{T}})$. При неизвестной ковариационной матрице вектора ξ определим уровень гашения случайных возмущений оператора Ψ как квадратный корень из максимального значения отношения дисперсии выхода к математическому ожиданию квадратичной формы с матрицей K^{-1} входа при всех ненулевых ковариационных матрицах входа K_ξ [10], т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi) = \sup_{K_\xi\geqslant 0} \frac{E|\eta|^2}{E|\xi|_K^2} = \sup_{K_\xi\geqslant 0} \frac{\mathrm{tr}\,\Psi K_\xi \Psi^{\mathrm{T}}}{\mathrm{tr}\,K^{-1}K_\xi}.$$

Эта величина, представляющая собой индуцированную норму оператора Ψ, когда ξ и η — случайные векторы с нормами $|\xi|_s = (E\xi^{\mathrm{T}}K^{-1}\xi)^{1/2}$ и $|\eta|_s = (E|\eta|^2)^{1/2}$, может быть найдена как решение следующей оптимизационной задачи.

З а д а ч а S.

$$\gamma_s^2(\Psi) = \max_{K_\xi\geqslant 0} \mathrm{tr}\,\Psi K_\xi \Psi^{\mathrm{T}} : \ \eta = \Psi\xi, \quad \mathrm{tr}\,K^{-1}K_\xi \leqslant 1. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. Задачи S *и* D *являются двойственными, и уровни гашения случайных и детерминированных возмущений с весовой матрицей K оператора Ψ совпадают со спектральным радиусом ковариационной матрицы выхода при ковариационной матрице входа, равной весовой матрице, т.е.*

$$\gamma_s^2(\Psi) = \gamma_d^2(\Psi) = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^{\mathrm{T}}).$$

Доказательство теоремы 2.1. Запишем функцию Лагранжа для задачи S и выразим оптимальное значение двойственной ей функции как

$$\min_{\lambda\geqslant 0}\max_{K_\xi\geqslant 0}\Big[\operatorname{tr}\Psi K_\xi \Psi^{\mathrm{T}} + \lambda(1-\operatorname{tr}K^{-1}K_\xi)\Big] = \min_{\lambda\geqslant 0}\max_{K_\xi\geqslant 0}\Big[\lambda + \operatorname{tr}K_\xi(\Psi^{\mathrm{T}}\Psi - \lambda K^{-1})\Big].$$

Для того, чтобы эта величина была конечной, должно выполняться неравенство $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi - \lambda K^{-1} \leqslant 0$ и тогда максимум достигается при $K_\xi = 0$. При этом оптимальное значение двойственной задачи совпадает с (2.2). Так как функция является выпуклой и имеется внутренняя точка, удовлетворяющая ограничению, то оптимальные значения прямой и двойственной задач совпадают [11]. Теорема доказана.

К этому стоит добавить, что образ оператора Ψ или, другими словами, множество достижимости вектора η в (2.1) при всех детерминированных векторах ξ, принадлежащих эллипсоиду $\mathcal{E}_\xi(K)$, может характеризоваться в терминах ковариационной матрицы случайного вектора ξ, как сформулировано в следующей теореме.

Теорема 2.2. Множество достижимости вектора η в (2.1)*, когда детерминированный вход ξ принимает значения в эллипсоиде $\mathcal{E}_\xi(K)$ и матрица $K_\eta = \Psi K \Psi^{\mathrm{T}}$ невырожденная, является эллипсоид $\mathcal{E}_\eta(K_\eta)$ с матрицей K_η, совпадающей с ковариационной матрицей случайного вектора η, когда ковариационная матрица случайного вектора ξ равна K.*

Доказательство теоремы 2.2. Найдем опорную функцию множества достижимости η в (2.1)

$$\varrho(x) = \sup_{\xi\in\mathcal{E}_\xi(K)} x^{\mathrm{T}}\eta,$$

которая в случае вектора x единичной длины является верхней гранью проекций x на это множество. Для полученной задачи на условный экстремум запишем функцию Лагранжа

$$L(\xi,\lambda) = x^{\mathrm{T}}\Psi\xi + \lambda(1-\xi^{\mathrm{T}}K^{-1}\xi).$$

Приравнивая нулю градиент этой функции по ξ, найдем $\xi = (2\lambda)^{-1}K\Psi^{\mathrm{T}}x$ и, подставляя это соотношение в ограничение, получим $2\lambda = (x^{\mathrm{T}}\Psi K\Psi^{\mathrm{T}}x)^{1/2}$. Окончательно имеем $\varrho(x) = (x^{\mathrm{T}}\Psi K\Psi^{\mathrm{T}}x)^{1/2}$, что согласно [12] отвечает опорной функции эллипсоида $\mathcal{E}_\eta(\Psi K\Psi^{\mathrm{T}})$. Теорема доказана.

Приведенные выше результаты остаются в силе, если случайный вектор ξ имеет ненулевое математическое ожидание $E\xi = \xi_*$. В этом случае уровень гашения случайных возмущений определяется как

$$\gamma_s^2(\Psi) = \sup_{K_\xi \geqslant 0} \frac{E|\eta - \Psi\xi_*|^2}{E|\xi - \xi_*|_K^2} = \sup_{K_\xi \geqslant 0} \frac{\operatorname{tr} \Psi K_\xi \Psi^{\mathrm{T}}}{\operatorname{tr} K^{-1} K_\xi},$$

где $K_\xi = E(\xi - \xi_*)(\xi - \xi_*)^{\mathrm{T}}$, а уровень гашения детерминированных возмущений определяется как

$$\gamma_d^2(\Psi) = \sup_{\xi \neq \xi_*} \frac{|\eta - \Psi\xi_*|^2}{|\xi - \xi_*|_K^2} = \sup_{\xi \neq \xi_*} \frac{(\xi - \xi_*)^{\mathrm{T}} \Psi^{\mathrm{T}} \Psi (\xi - \xi_*)}{(\xi - \xi_*)^{\mathrm{T}} K^{-1} (\xi - \xi_*)} = \lambda_{\max}(\Psi K \Psi^{\mathrm{T}}).$$

Множеством достижимости вектора η в этом случае будет эллипсоид с центром в точке $\eta_* = \Psi\xi_*$ и матрицей $K_\eta = \Psi K \Psi^{\mathrm{T}}$.

Далее применим эти результаты к линейным операторам, которые порождаются линейными динамическими системами.

3. Максимальное уклонение и обобщенная H_2-норма

Определим линейный оператор $\Psi_2(t)$, который отображает вход $\xi(t) = \operatorname{col}(x_0, v(t_0), \ldots, v(t-1))$ в выход $\eta = z(t)$ линейной динамической системы, описываемой уравнениями

$$\begin{gathered} x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ z(t) = C(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Так как решение этой системы представимо в виде

$$z(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} F(t, i+1)B(i)v(i), \tag{3.2}$$

где $F(t, i) = C(t)\Phi(t, i+1)B(i)$, $i = t_0, \ldots, t-1$ — матричная импульсная переходная функция системы, $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица системы, удовлетворяющая уравнению

$$\Phi(t+1, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad t \geqslant t_0, \quad \Phi(t_0, t_0) = I, \tag{3.3}$$

то

$$\Psi_2(t) = (C(t)\Phi(t, t_0) \;\; F(t, t_0) \;\; \ldots \;\; C(t)B(t-1)). \tag{3.4}$$

При выборе весовой матрицы блочно-диагонального вида

$$K(t) = \operatorname{diag}(R, G(t_0), \ldots, G(t-1)),$$

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ и $G(i) = G^{\mathrm{T}}(i) > 0$, $i = 0, \ldots, t-1$, обобщенная норма этого оператора

$$\|\Psi_2(t)\|^2_{K(t)} = \sup_{\xi(t)\neq 0} \frac{|\Psi_2(t)\xi(t)|^2}{|\xi(t)|^2_{K(t)}} = \sup_{x_0,\, v(\tau), \tau\in[t_0, t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|^2_R + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]}}$$

представляет собой так называемое максимальное уклонение выхода системы в момент времени t при произвольных детерминированных начальном состоянии и возмущении, удовлетворяющих ограничению

$$|\xi(t)|^2_{K(t)} = |x_0|^2_R + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]} \leqslant 1, \tag{3.5}$$

которое будем называть эллипсоидальным. Кроме того, напомним, что обобщенная H_2-норма системы (3.1) на конечном горизонте $[t_0, t_f]$ с весовыми матрицами R и $G(t)$ определяется как

$$\|H\|^2_{g2} = \sup_{x_0,\, v(t), t\in[t_0, t_f-1]} \frac{\max\limits_{\tau\in[t_0,t]} |z(\tau)|^2}{|x_0|^2_R + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]}},$$

т.е. как максимальное по времени из максимальных уклонений выхода [13, 14].

Определим уровень гашения случайных возмущений в системе (3.1) в момент времени t как уровень гашения случайных возмущений оператора $\Psi_2(t)$, т.е.

$$\gamma_s^2(\Psi_2(t)) = \sup_{K_{\xi(t)}\geqslant 0} \frac{E|z(t)|^2}{E\left(|x_0|^2_R + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]}\right)},$$

где случайные начальное состояние и возмущения не являются независимыми, а в общем случае представляют собой цветной шум.

Согласно теореме 2.1 уровни гашения случайных и детерминированных возмущений равны $\lambda_{\max}[K_z(t)]$, где $K_z(t)$ — ковариационная матрица выхода системы, когда ее вход $\xi(t) = \mathrm{col}\,(x_0, v(t_0), \ldots, v(t-1))$ имеет ковариационную матрицу $K(t) = \mathrm{diag}\,(R, G(t_0), \ldots, G(t-1))$, т.е. когда ее начальное состояние и возмущения независимы и имеют ковариационные матрицы R и $G(t)$ соответственно. Из уравнений системы получим $K_z(t) = C(t)P(t)C^{\mathrm{T}}(t)$, где $P(t)$ — решение уравнения

$$P(t+1) = A(t)P(t)A^{\mathrm{T}}(t) + B(t)G(t)B^{\mathrm{T}}(t) \tag{3.6}$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 3.1. В системе (3.1) *уровень гашения случайных возмущений совпадает с максимальным уклонением выхода, т.е.*

$$
\begin{aligned}
&\sup_{K_{\xi(t)}\geqslant 0} \frac{E|z(t)|^2}{E\left(|x_0|_R^2 + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]}\right)} = \\
(3.7)\qquad &= \sup_{x_0,\, v(\tau), \tau\in[t_0,t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]}} = \lambda_{\max}[C(t)P(t)C^{\mathrm T}(t)],
\end{aligned}
$$

где $P(t)$ — *решение уравнения* (3.6).

Следствие 3.1. Обобщенная H_2*-норма системы* (3.1) *характеризуется как*

$$\|H\|^2_{g2} = \max_{t\in[t_0,t_f]} \sup_{K_{\xi(t)}\geqslant 0} \frac{E|z(t)|^2}{E\left(|x_0|_R^2 + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]}\right)} = \max_{t\in[t_0,t_f]} \lambda_{\max}[C(t)P(t)C^{\mathrm T}(t)].$$

Замечание 1. Из (3.6), (3.7) следует, что уровень гашения случайных возмущений в момент времени t может быть найден как решение следующей задачи полуопределенного программирования:

$$
\begin{aligned}
(3.8)\qquad &\min\lambda : Y(i+1) - A(i)Y(i)A^{\mathrm T}(i) - B(i)G(i)B^{\mathrm T}(i) \geqslant 0, \quad i = t_0,\ldots,t-1,\\
&Y(t_0) = R, \quad C(t)Y(t)C^{\mathrm T}(t) \leqslant \lambda I.
\end{aligned}
$$

а обобщенная H_2-норма — как минимальное $\lambda > 0$, при котором разрешимы неравенства (3.8) при $t = t_f$ и неравенства $C(i)Y(i)C^{\mathrm T}(i) \leqslant \lambda I$ для $i = t_0,\ldots,t_f$.

4. Обобщенная H_∞-норма

Определим линейный оператор Ψ_∞, для которого в силу системы

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad &x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0,\\
&z(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad t\in[t_0,t_f]
\end{aligned}
$$

выполняется $\eta = \Psi_\infty\xi$, где

$$\eta = \mathrm{col}\,(z(t_0),\ldots,z(t_f-1), S^{1/2}x(t_f)), \quad \xi = \mathrm{col}\,(x(t_0), v(t_0),\ldots,v(t_f-1)),$$

$S = S^{\mathrm T} \geqslant 0$ — заданная матрица. Учитывая (3.2) и (3.3), найдем

$$\Psi_\infty = \begin{pmatrix} C(t_0) & D(t_0) & \cdot & 0\\ C(t_0+1)\Phi(t_0+1,t_0) & F(t_0+1,t_0) & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ C(t_f-1)\Phi(t_f-1,t_0) & F(t_f-1,t_0) & \cdot & D(t_f-1)\\ S^{1/2}\Phi(t_f,t_0) & S^{1/2}\Phi(t_f,t_0+1)B(t_0) & \cdot & S^{1/2}B(t_f-1)\end{pmatrix}.$$

При выборе весовой матрицы $K = \mathrm{diag}\,(R, G(t_0), \ldots, G(t_f-1))$ обобщенная норма этого оператора совпадает с ее обобщенной H_∞-нормой, т.е.

$$\|\Psi_\infty\|_K^2 = \sup_{\xi\neq 0}\frac{|\Psi_\infty\xi|^2}{|\xi|_K^2} = \sup_{x(t_0),\, v(\tau), \tau\in[t_0,t_f-1]} \frac{\|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x(t_f)^{\mathrm T}Sx(t_f)}{|x(t_0)|_R^2 + \|v\|^2_{G\,[t_0,t_f]}} = \|H\|^2_{g\infty},$$

где $S = S^{\mathrm T} \geqslant 0$ — заданная весовая матрица. Таким образом, уровень гашения детерминированных возмущений системы (4.1) находится как решение следующей задачи.

Задача D_∞. В предположении, что начальное и внешнее возмущения в системе (4.1) образуют последовательность детерминированных векторов $\xi = \mathrm{col}\,(x(t_0), v(t_0), \ldots, v(t_f-1))$ найти

$$\gamma_d^2(\Psi_\infty) = \max_{x_0,\, v(\tau), \tau\in[t_0,t_f-1]} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |z(t)|^2 + x^{\mathrm T}(t_f)Sx(t_f) \,:\, |x_0|_R^2 + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} |v(t)|^2_{G(t)} \leqslant 1. \tag{4.2}$$

В свою очередь определим уровень гашения случайных возмущений

$$\gamma_s^2(\Psi_\infty) = \sup_{K_\xi \geqslant 0} \frac{E\left[\|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm T}(t_f)Sx(t_f)\right]}{E\left[|x(t_0)|_R^2 + \|v\|^2_{G[t_0,t_f]}\right]}, \tag{4.3}$$

где K_ξ — ковариационная матрица вектора $\xi = \mathrm{col}\,(x(t_0), v(t_0), \ldots, v(t_f-1))$. Согласно теореме 2.1 уровни гашения случайных и детерминированных возмущений равны между собой, т.е. $\gamma_s^2(\Psi_\infty) = \|H\|^2_{g\infty}$.

Покажем, что уровень гашения случайных возмущений может быть найден как решение задачи полуопределенного программирования, в которой переменными являются определенные ковариационные матрицы. Обозначая

$$E\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t)\end{pmatrix}^{\mathrm T} = W(t), \quad M = (I \;\; 0), \quad H = (0 \;\; I) \tag{4.4}$$

и опуская аргумент t там, где это не вызывает сомнений, из (4.1) получим, что матрицы $W(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$MW(t+1)M^{\mathrm T} = (A \;\; B)W(t)(A \;\; B)^{\mathrm T}, \quad t = t_0, \ldots, t_f - 1. \tag{4.5}$$

Выразим математические ожидания в (4.3) в терминах матриц $W(t)$ и сформулируем следующую задачу.

З а д а ч а S_∞.

$$
\begin{aligned}
(4.6)\qquad &\gamma_s^2(\Psi_\infty) = \max_{W(t)\geqslant 0,\, t\in[t_0,t_f]} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \operatorname{tr}\,(C\ \ D)W(t)(C\ \ D)^{\mathrm{T}} + \operatorname{tr} SMW(t_f)M^{\mathrm{T}}\ :\\
&\operatorname{tr} R^{-1}MW(t_0)M^{\mathrm{T}} + \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \operatorname{tr} G^{-1}HW(t)H^{\mathrm{T}} \leqslant 1,
\end{aligned}
$$

где матрицы $W(t)$ удовлетворяют уравнениям (4.5).

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

Т е о р е м а 4.1. *Задачи* S_∞ *и* D_∞ *являются двойственными по Лагранжу и их оптимальные значения совпадают с обобщенной* H_∞*-нормой системы* (4.1), *т.е.*

$$
\|H\|_{g\infty}^2 = \sup_{W(t)\geqslant 0\; t\in[t_0,t_f]} \frac{\sum\limits_{t=t_0}^{t_f-1} \operatorname{tr}\,(C\ \ D)W(t)(C\ \ D)^{\mathrm{T}} + \operatorname{tr} SMW(t_f)M^{\mathrm{T}}}{\operatorname{tr} R^{-1}MW(t_0)M^{\mathrm{T}} + \sum\limits_{t=t_0}^{t_f-1} \operatorname{tr} G^{-1}HW(t)H^{\mathrm{T}}},
$$

которая вычисляется как

$$
\begin{gathered}
\|H\|_{g\infty}^2 = \min_{\lambda\geqslant 0, X(t)} \lambda :\\
(4.7)\qquad \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}}X(t+1)A - X(t) & * & * \\ B^{\mathrm{T}}X(t+1)A & B^{\mathrm{T}}X(t+1)B - G^{-1} & * \\ C & D & -\lambda I \end{pmatrix} \leqslant 0,\\
X(t_0) = R^{-1}, \quad \begin{pmatrix} X(t_f) & * \\ S^{1/2} & \lambda I \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad t = t_0, \ldots, t_f-1.
\end{gathered}
$$

Теперь перейдем к задачам фильтрации и управления.

5. Фильтрация

5.1. Обобщенная H_2-оптимальная фильтрация

Рассмотрим задачу фильтрации для линейного дискретного объекта, заданного разностными уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(0) = x_0,\\
(5.1)\qquad &y(t) = C(t)x(t) + D(t)v(t),\\
&z(t) = C_z(t)x(t), \quad t = t_0, \ldots, t_f,
\end{aligned}
$$

в которых $x(t) \in \mathrm{R}^{n_x}$ — состояние объекта, $y(t) \in \mathrm{R}^{n_y}$ — измеряемый выход, $z(t) \in \mathrm{R}^{n_z}$ — целевой выход, x_0 и $v(t) \in R^{n_v}$ — начальное состояние и внешнее возмущение, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — заданные матричные функции соответствующих размерностей. Для оценивания неизмеряемого состояния объекта по измерениям выхода определим фильтр, описываемый уравнением

$$\begin{aligned} x_f(t+1) &= A(t)x_f(t) + \Theta(t)[y(t) - C(t)x_f(t)], \quad x_f(0) = 0, \\ z_f(t) &= C_z(t)x_f(t), \end{aligned} \tag{5.2}$$

в котором $x_f(t) \in \mathrm{R}^{n_x}$ — состояние фильтра, $z_f(t) \in \mathrm{R}^{n_z}$ — оценка целевого выхода, $\Theta(t)$ — матрица параметров фильтра. Обозначая ошибки оценки состояния $e(t) = x(t) - x_f(t)$ и оценки выхода $e_z(t) = z(t) - z_f(t)$, из (5.1) и (5.2) получим уравнения ошибок фильтрации

$$\begin{aligned} e(t+1) &= A_c(t)e(t) + B_c(t)v(t), \quad e(0) = x_0, \\ e_z(t) &= C_z(t)e(t), \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $A_c(t) = A(t) - \Theta(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - \Theta(t)D(t)$. Допустим, что ковариационная матрица $K_{\xi(t)}$ случайного вектора начального состояния и возмущений $\xi(t) = \mathrm{col}\,(x_0, v(t_0), \ldots, v(t-1))$ неизвестна. Найдем параметры $\Theta_*(t)$ фильтра (5.2), при которых уровень гашения случайных возмущений с весовыми матрицами $R > 0$ и $G(i) > 0$, $i = 1, \ldots, t-1$, т.е.

$$J_s(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{K_{\xi(t)} \geqslant 0} \frac{E|e_z(t)|^2}{E\left(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G\,[t_0,t]}^2\right)}, \tag{5.4}$$

где Θ_i^j обозначает набор $\Theta(i), \ldots, \Theta(j)$, будет минимальным.

Согласно теореме 3.1 такой фильтр обеспечивает минимум максимальному уклонению ошибки при детерминированных факторах, т.е.

$$J_d(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{x_0,\, v(\tau), \tau\in[t_0,t-1]} \frac{|e_z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G\,[t_0,t]}^2},$$

и совпадает с фильтром, который минимизирует спектральный радиус ковариационной матрицы выхода $e_z(t)$ уравнения (5.3) при условии, что начальное состояние и возмущения образуют последовательность случайных независимых векторов с ковариационными матрицами R и $G(t)$. Это значит, что его параметры находятся из условия $\min_\Theta \lambda_{\max}(K_z(\Theta))$, где $K_z(\Theta) = C_z(t)P(t)C_z^{\mathrm{T}}(t)$ и $P(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} P(t+1) = [A(t) - \Theta(t)C(t)]P(t)[A(t) - \Theta(t)C(t)]^{\mathrm{T}} + \\ + [B(t) - \Theta(t)D(t)]G(t)[B(t) - \Theta(t)D(t)]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Ради упрощения формул предположим, что возмущения в объекте и в измерении выхода между собой независимы и что матрицы $D(t)$ полного ранга, т.е.

$$\begin{pmatrix} B(t) \\ D(t) \end{pmatrix} G(t) \begin{pmatrix} B(t) \\ D(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} G_B(t) & 0 \\ 0 & G_D(t) \end{pmatrix}, \quad G_D(t) > 0. \tag{5.5}$$

Выделяя в правой части последнего уравнения полный квадрат по $\Theta(t)$, найдем

$$\Theta_*(t) = A(t)P_2(t)C^{\mathrm{T}}(t)\left[C(t)P_2(t)C^{\mathrm{T}}(t) + G_D(t)\right]^{-1}, \tag{5.6}$$

где матрица $P_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$P_2(t+1) = A(t)P_2(t)A^{\mathrm{T}}(t) -$$
$$- A(t)P_2(t)C^{\mathrm{T}}(t)\left[C(t)P_2(t)C^{\mathrm{T}} + G_D(t)\right]^{-1} C(t)P_2(t)A^{\mathrm{T}}(t) + G_B(t)$$

или, применяя известную формулу обращения матриц, (см., например, [15, с. 254]), уравнению

$$P_2(t+1) = A(t)\left[P_2^{-1}(t) + C^{\mathrm{T}}(t)G_D^{-1}(t)C(t)\right]^{-1} A^{\mathrm{T}}(t) + G_B(t) \tag{5.7}$$

с начальным условием $P_2(t_0) = R$.

Заметим, что найденный фильтр совпадает с фильтром Калмана [2] для оценки состояния системы (5.1) при случайных независимых начальном состоянии и возмущении с ковариационными матрицами, равными весовым матрицам R и $G(t)$. Другими словами, фильтр Калмана, построенный для системы со случайными независимыми начальным состоянием и возмущениями с заданными ковариационными матрицами R и $G(t)$, в дополнении к тому, что обеспечивает минимум максимальному уклонению ошибки при детерминированных факторах, удовлетворяющих ограничению

$$|x_0|_R^2 + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]} \leqslant 1, \tag{5.8}$$

также доставляет минимум уровню гашения случайных возмущений (5.4) при соответствующих весовых матрицах R и $G(t)$. Кроме того, согласно теореме 2.2 множество достижимости ошибки $e_z(t)$ при условии (5.8) составляет эллипсоид $\mathcal{E}_z[C_z(t)P_2(t)C_z^{\mathrm{T}}(t)]$ и, следовательно, неизвестный вектор $z(t)$ находится в таком же эллипсоиде с центром в $z_f(t)$.

Параметры $\Theta_{g2}(t)$ обобщенного H_2-оптимального фильтра, при котором минимизируется максимальная из дисперсий ошибок оценок на всем интервале, т.е.

$$J_{g2}(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \max_{t\in[t_0,t_f]}\ \sup_{K_{\xi(t)}\geqslant 0} \frac{E|e_z(t)|^2}{E\left(|x_0|_R^2 + \|v\|^2_{G\,[t_0,t]}\right)},$$

находятся стандартным образом с помощью линейных матричных неравенств (3.8) (см., например, [15]), в которых нужно A заменить на $A - \Theta(t)C$, B на $B - \Theta(t)D$ и обозначить $X(t+1)\Theta(t) = Z(t)$. Тогда параметры фильтра вычисляются как $\Theta_{g2}(t) = X_*^{-1}(t+1)Z_*(t)$, где звездочками обозначены решения этих неравенств.

Рассмотрим теперь обобщенную H_∞-оптимальную фильтрацию в стохастической постановке, когда ковариационная матрица K_ξ вектора начального состояния и возмущений $\xi = \mathrm{col}\,(x(t_0), v(t_0), \ldots, v(t_f - 1))$ в (5.1) неизвестна и требуется найти параметры фильтра (5.2), при которых на траекториях системы (5.3) минимизируется функционал

$$J_{g\infty}(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{K_\xi \geqslant 0} \frac{E\left[\|e_z\|^2_{[t_0,t_f]} + e_x^{\mathrm{T}}(t_f)Se_x(t_f)\right]}{E\left[|x(t_0)|^2_R + \|v\|^2_{G[t_0,t_f1]}\right]}.$$

Теорема 5.1. *Обобщенная H_∞-норма системы* (5.3), *описывающей динамику ошибки оценки состояния* (5.1), *меньше λ, т.е. $J_{g\infty} < \lambda$, если фильтр* (5.2) *имеет параметры*

$$(5.9)\quad \Theta_\infty(t) = A(t)\left[P_\infty^{-1}(t) + C^{\mathrm{T}}(t)G_D^{-1}(t)C(t) - \right.$$
$$\left. - \lambda^{-1}C_z^{\mathrm{T}}(t)C_z(t)\right]^{-1} C^{\mathrm{T}}(t)G_D^{-1}(t),$$

где

$$(5.10)\quad P_\infty(t+1) = A(t)\left[P_\infty^{-1}(t) + C^{\mathrm{T}}(t)G_D^{-1}(t)C(t) - \right.$$
$$\left. - \lambda^{-1}C_z^{\mathrm{T}}(t)C_z(t)\right]^{-1} A^{\mathrm{T}}(t) + G_B(t),$$

$P_\infty(t_0) = R$, *и для всех t выполнено* $C_z(t)P_\infty(t)C_z^{\mathrm{T}}(t) < \lambda I$ *и* $S^{1/2}P_\infty(t_f)S^{1/2} < \lambda I$.

Уравнения (5.9) и (5.10) определяют так называемые центральные обобщенные H_∞-субоптимальные решения. Эти уравнения приведены в компактной форме и могут быть записаны в виде, не содержащем обратных матриц $P_\infty^{-1}(t)$, если применить формулу обращения матриц. Параметры обобщенного H_∞-субоптимального фильтра, при котором $J_{g\infty} < \lambda$, в том числе и с минимальным λ, могут быть также получены стандартным образом, решая линейные матричные неравенства (4.7).

Заметим еще, сравнивая (5.10) и (5.7), что при $\lambda \to \infty$ имеем $P_\infty(t) \to P_2(t)$. Переходя в (5.9) и (5.10) к пределу при $\lambda \to \infty$ и применяя формулу обращения матриц, нетрудно убедиться в том, что в пределе $\Theta_\infty(t)$ совпадает с $\Theta_*(t)$, заданной в (5.6), а обобщенный H_∞-субоптимальный фильтр переходит в фильтр Калмана, построенный для системы (5.1), в которой независимые начальное состояние и возмущения имеют ковариационные матрицы R и $G(t)$ соответственно. Задавая $0 < \lambda < \infty$, можно добиться компромисса между дисперсией ошибки оценки состояния в определенный момент времени и суммой дисперсий ошибок оценок целевого выхода на всем предшествующем интервале времени.

В качестве приложения рассмотрим задачу оптимального оценивания неизвестных параметров линейной регрессии

$$\chi(t) = \Phi(t)\zeta_0 + v(t), \quad t = t_0, \ldots, t_f, \tag{5.11}$$

где $\chi(t)$ — вектор измерений, $\Phi(t)$ — матрица регрессоров, ζ_0 — вектор неизвестных параметров, $v(t)$ — вектор помех измерений. Представим ее как задачу построения оптимального наблюдателя состояния системы

$$\zeta(t+1) = \zeta(t), \quad \zeta(t_0) = \zeta_0 \tag{5.12}$$

вида

$$\widehat{\zeta}(t+1) = \widehat{\zeta}(t) + \Theta(t)[\chi(t) - \Phi(t)\widehat{\zeta}(t)], \quad \widehat{\zeta}(t_0) = \zeta_*.$$

При этом ошибка $\widetilde{\zeta}(i) = \zeta_0 - \widehat{\zeta}(i)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{\zeta}(i+1) = [I - \Theta(i)\Phi(i)]\widetilde{\zeta}(i) - \Theta(i)v(i), \quad \widetilde{\zeta}(t_0) = \zeta_0 - \zeta_*, \quad i = t_0, \ldots, t-1.$$

Нетрудно проверить, что при неизвестной ковариационной матрице вектора, составленного из начальной ошибки $\zeta_0 - \zeta_*$ и помех в измерениях на всем интервале, матрица параметров оптимального фильтра (5.2), (5.6), обеспечивающего для уравнения ошибки минимум уровня гашения случайных возмущений в момент времени t, равна $\Theta_*(t) = P_2(t)\Phi(t)[\Phi(t)P_2(t)\Phi^{\mathrm{T}}(t) + G(t)]^{-1}$. Оптимальные оценки тогда определяются рекуррентными уравнениями

$$\begin{gathered}\widehat{\zeta}(t+1) = \widehat{\zeta}(t) + P_2(t+1)\Phi^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\widehat{\zeta}(t)], \quad \widehat{\zeta}(t_0) = \zeta_*, \\ P_2^{-1}(t+1) = P_2^{-1}(t) + \Phi^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t)\Phi(t), \quad P_2(t_0) = R.\end{gathered} \tag{5.13}$$

Как хорошо известно, эти уравнения описывают рекуррентный алгоритм метода наименьших взвешенных квадратов, а также фильтр Калмана для оценки состояния системы (5.12) при ковариациях $E\zeta_0\zeta_0^{\mathrm{T}} = R$ и $Ev(t)v^{\mathrm{T}}(t) = G(t)$, и оценка $\widehat{\zeta}(t)$ минимизирует критерий

$$J_t(\zeta) = (\zeta - \zeta_*)^{\mathrm{T}}R^{-1}(\zeta - \zeta_*) + \sum_{i=0}^{t-1} \big(\chi(i) - \Phi(i)\zeta\big)^{\mathrm{T}} G^{-1}(i)\big(\chi(i) - \Phi(i)\zeta\big).$$

Таким образом, метод наименьших взвешенных квадратов определяет оценку, которая минимизирует уровень гашения случайных возмущений при соответствующих весовых матрицах и которая согласно принципу двойственности минимизирует максимальное уклонение ошибки при неизвестных детерминированных параметрах и помехах, удовлетворяющих ограничению

$$|\zeta_0 - \zeta_*|_R^2 + \|v\|_{G\,[t_0,t]}^2 \leqslant 1, \quad t \in [t_0, t_f]. \tag{5.14}$$

И, наконец, построим обобщенный H_∞-субоптимальный фильтр для оценки неизвестных параметров в линейной регрессии (5.11), при котором сумма квадратов ошибок на всем рассматриваемом интервале времени не превышает с множителем λ взвешенную сумму квадратов начального отклонения оценки и помех измерений. В соответствии с (5.9), (5.10) параметры этого фильтра будут определяться как

$$\Theta_\infty(t) = \left[P_\infty(t) + \Phi^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t)\Phi(t) - \lambda^{-1}I\right]^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t),$$

а сам фильтр при условии $P_\infty(t) < \lambda I$ и $S^{1/2}P_\infty(t_f)S^{1/2} < \lambda I$ определяется рекуррентными уравнениями

$$\begin{gathered}\widehat{\zeta}(t+1) = \widehat{\zeta}(t) + P_\infty(t+1)\Phi^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\widehat{\zeta}(t)], \quad \widehat{\zeta}(t_0) = \zeta_*,\\ P_\infty^{-1}(t+1) = P_\infty^{-1}(t) + \Phi^{\mathrm{T}}(t)G^{-1}(t)\Phi(t) - \lambda^{-1}I, \quad P_\infty(t_0) = R.\end{gathered} \tag{5.15}$$

При $\lambda \to \infty$ уравнения обобщенного H_∞-оптимального фильтра переходят в рекуррентные уравнения метода наименьших взвешенных квадратов. За счет выбора подходящего значения λ здесь также можно обеспечить компромисс между дисперсией ошибки в конце интервала и суммой дисперсий ошибок на всем интервале.

6. Управление

Рассмотрим задачу управления для линейного дискретного объекта, заданного разностными уравнениями

$$\begin{gathered}x(t+1) = A(t)x(t) + B_u(t)u(t) + B(t)v(t), \quad x(0) = x_0,\\ z(t) = C_z(t)x(t) + D_z(t)u(t), \quad t = t_0, \dots, t_f.\end{gathered} \tag{6.1}$$

Допустим, что начальное состояние и внешние возмущения представляют собой случайный вектор $\xi(t) = \operatorname{col}(x_0, v(t_0), \dots, v(t-1))$ с нулевым математическим ожиданием и неизвестной ковариационной матрицей $K_{\xi(t)}$ и цель управления вида $u(t) = \Theta(t)x(t)$ состоит в минимизации функционала

$$J_s(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{K_{\xi(t)} \geqslant 0} \frac{E|z(t)|^2}{E\left(|x_0|_R^2 + \|v\|_{G\,[t_0,t]}^2\right)}.$$

Согласно теореме 3.1 такое управление обеспечивает минимум максимальному уклонению выхода при детерминированных факторах, т.е.

$$J_d(\Theta_{t_0}^{t-1}) = \sup_{x_0,\, v(\tau), \tau\in[t_0,t-1]} \frac{|z(t)|^2}{|x_0|_R^2 + \|v\|_{G\,[t_0,t]}^2},$$

и совпадает с управлением, которое минимизирует спектральный радиус ковариационной матрицы выхода системы (6.1) в момент времени t при условии, что начальное состояние и возмущения образуют последовательность случайных независимых векторов с ковариационными матрицами R и $G(i)$, $i = t_0, \ldots, t-1$. Параметры такого закона управления могут быть найдены, решая задачу полуопределенного программирования при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами, получаемыми стандартным образом из (3.8). Заметим, что задачи, в которых цель управления формулировалась в терминах ковариационной матрицы выхода в стационарном режиме на бесконечном горизонте, рассматривались в [16].

Пусть теперь начальное состояние и возмущения на всем интервале $[t_0, t_f]$ образуют случайный вектор $\xi = \mathrm{col}\,(x_0, v(t_0), \ldots, v(t_f - 1))$ с нулевым математическим ожиданием и неизвестной ковариационной матрицей K_ξ. Цель управления вида $u(t) = \Theta(t)x(t)$ состоит в минимизации суммарной "энергии" выхода на всем интервале с учетом конечного состояния при условии ограниченности суммарной "энергии" начального состояния и внешнего возмущения на всем интервале. При этом "энергия" измеряется математическим ожиданием квадратичной формы соответствующего вектора с некоторой заданной весовой матрицей. В соответствии с этим оптимизируемый функционал имеет вид

$$(6.2) \qquad J_s(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{K_\xi \geqslant 0} \frac{E\left[\|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)Sx(t_f)\right]}{E\left[|x_0|^2_R + \|v\|^2_{G[t_0,t_f]}\right]},$$

где $S = S^{\mathrm{T}} \geqslant 0$, $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ и $G(t) = G^{\mathrm{T}}(t) > 0$ — заданные весовые матрицы. Заметим, что в классической задаче линейно-квадратического управления в стохастической постановке предполагается, что последовательность векторов начального состояния и возмущений образует последовательность независимых случайных векторов с заданными ковариационными матрицами.

Согласно теореме 4.1 поставленная задача двойственна задаче управления объектом (6.1), в котором начальное состояние и внешние возмущения образуют произвольную детерминированную последовательность векторов, а функционал имеет вид обобщенной H_∞-нормы с соответствующими весовыми матрицами

$$(6.3) \qquad J_d(\Theta_{t_0}^{t_f-1}) = \sup_{x_0, v(\tau), \tau\in[t_0,t_f-1]} \frac{\|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f)Sx(t_f)}{|x_0|^2_R + \|v\|^2_{G[t_0,t_f]}}.$$

Параметры искомого закона управления находятся на основе решения задачи полуопределенного программирования, получаемой стандартным образом из (4.7).

7. Заключение

Установлен принцип двойственности для линейных операторов в детерминированном и стохастическом случаях. Этот результат оказывается полезным, так как связывает между собой стохастическую и детерминистскую парадигмы в задачах управления и фильтрации. В частности, если детерминированные начальное состояние и возмущение в линейной нестационарной системе на конечном горизонте удовлетворяют эллипсоидальному ограничению с заданными весовыми матрицами, то максимальное по времени из максимальных уклонений выхода, т.е. обобщенная H_2-норма системы, и максимальное значение интегрального квадратичного функционала, т.е. обобщенная H_∞-норма системы, совпадают соответственно с максимальным по времени из максимальных значений дисперсий выхода и с максимальным значением усредненного интегрального квадратичного функционала при случайных начальном состоянии и возмущении с неизвестными ковариационными матрицами, удовлетворяющими усредненному эллипсоидальному ограничению. Обе эти нормы также характеризуются как спектральные нормы ковариационных матриц выходов линейных операторов при случайных независимых начальном состоянии и возмущениях в системе, ковариационные матрицы которых совпадают с соответствующими весовыми матрицами эллипсоидального ограничения.

В статье для линейных динамических систем сформулированы новые минимаксные задачи в стохастической постановке при неизвестных ковариационных матрицах случайных факторов и показано, что их решения совпадают с решениями двойственных детерминированных минимаксных задач. Так, минимаксное стохастическое управление при неизвестной совместной ковариационной матрице начального состояния и возмущений, имеющей ограниченный след, совпадает с детерминированным обобщенным H_∞-оптимальным управлением. Оптимальный фильтр, минимизирующий уровень гашения случайных начального состояния и возмущений с неизвестной совместной ковариационной матрицей, совпадает с оптимальным фильтром, минимизирующим максимальное уклонение ошибки фильтрации при детерминированных начальном состоянии и возмущениях, удовлетворяющих эллипсоидальному ограничению с заданными весовыми матрицами. Этот фильтр оказывается фильтром Калмана, построенным для данной системы при случайных независимых начальном состоянии и возмущениях, ковариационные матрицы которых равны соответствующим весовым матрицам эллипсоидального ограничения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 4.1. Запишем функцию Лагранжа для задачи S_∞ и найдем двойственную ей функцию:

$$\min_{\lambda\geqslant 0, X(t)} \max_{W(t)\geqslant 0} \sum_{t=t_0}^{t_f-1} \operatorname{tr}\,(C(t)\ D(t))W(t)(C(t)\ D(t))^{\mathrm{T}} + \operatorname{tr} SMW(t_f)M^{\mathrm{T}} -$$

$$-\lambda\left[\operatorname{tr} R^{-1}MW(t_0)M^{\mathrm{T}} + \sum_{t=t_0}^{t_f-1}\operatorname{tr} G^{-1}(t)HW(t)H^{\mathrm{T}} - 1\right] +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_f-1}\operatorname{tr}\Big[(A(t)\ B(t))W(t)(A(t)\ B(t))^{\mathrm T}-MW(t+1)M^{\mathrm T}\Big]X(t+1)=$$

$$=\min_{\lambda\geqslant 0,X(t)}\max_{W(t)\geqslant 0}\left\{\lambda+\sum_{t=t_0}^{t_f-1}\operatorname{tr}W(t)\Big[(C(t)\ D(t))^{\mathrm T}(C(t)\ D(t))+\right.$$

$$+(A(t)\ B(t))^{\mathrm T}X(t+1)(A(t)\ B(t))-M^{\mathrm T}X(t)M-\lambda H^{\mathrm T}G^{-1}(t)H\Big]+$$

$$\left.+\operatorname{tr}W(t_f)M^{\mathrm T}[S-X(t_f)]M\right\},$$

где $X(t_0)=\lambda R^{-1}$. Для того, чтобы двойственная функция была конечной, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{gathered}(C(t)\ D(t))^{\mathrm T}(C(t)\ D(t))+(A(t)\ B(t))^{\mathrm T}X(t+1)(A(t)\ B(t))-\\ -M^{\mathrm T}X(t)M-\lambda H^{\mathrm T}G^{-1}(t)H\leqslant 0,\quad t=t_0,\ldots,t_f-1,\quad S-X(t_f)\leqslant 0,\end{gathered}\tag{П.1}$$

поскольку в противном случае $W(t)$ может быть выбрана так, что соответствующее слагаемое становится неограниченным. Таким образом, неравенства (П.1) должны быть выполнены, но тогда минимум в минимаксной задаче достигается при $W(t)=0$, $t=t_0,\ldots,t_f$ и мы приходим к двойственной задаче: найти $\min\lambda$ при ограничениях (П.1), которые с учетом введенных обозначений и замены $X(t)$ на $\lambda X(t)$ записываются в виде неравенств (4.7). Так как функция является выпуклой и имеется внутренняя точка, удовлетворяющая ограничениям, то значения прямой и двойственной задач совпадают.

Определим функцию $V(t)=x^{\mathrm T}(t)X(t)x(t)$, где $X(t)$ удовлетворяет неравенствам (4.7). Приращение этой функции по траектории системы (4.1) удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered}\Delta V(t)+\lambda^{-1}|z(t)|^2-v^{\mathrm T}(t)G^{-1}v(t)\leqslant 0,\\ V(t_0)=x^{\mathrm T}(t_0)R^{-1}x(t_0),\quad V(t_f)\geqslant\lambda^{-1}x^{\mathrm T}(t_f)Sx(t_f).\end{gathered}\tag{П.2}$$

Отсюда получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_f-1}|z(t)|^2+x^{\mathrm T}(t_f)Sx(t_f)\leqslant\lambda+\lambda\left[x(t_0)R^{-1}x(t_0)+\sum_{t=t_0}^{t_f-1}v^{\mathrm T}(t)G^{-1}(t)v(t)-1\right],$$

т.е. минимальное значение λ, при котором разрешимы неравенства (4.7), является оптимальным значением в задаче D_∞ и совпадает с обобщенной H_∞-нормой системы (4.1).

Доказательство теоремы 5.1. Из теоремы 4.1 применительно к системе (5.3) следует, что если выполнены неравенства (4.7), в которых матрица A заменена $A-\Theta C$ и B заменена $B-\Theta C$, то обобщенная H_∞-норма системы меньше λ. Применяя лемму Шура, преобразуем эти неравенства к виду

$$Y(t+1) - (A - \Theta C)Y(t)(A - \Theta C)^{\mathrm{T}} - (B - \Theta D)G(B - \Theta D)^{\mathrm{T}} -$$
$$- (A - \Theta C)Y(t)C_z^{\mathrm{T}}(\lambda I - C_z Y(t) C_z^{\mathrm{T}})^{-1} C_z Y(t)(A - \Theta C)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$$

при условии, что $C_z Y(t) C_z^{\mathrm{T}} < \lambda I$. Выделяя в левой части этого неравенства полный квадрат по Θ и учитывая обозначения (5.5), в результате некоторых манипуляций получим

$$Y(t+1) - A\left[Y^{-1}(t) + C^{\mathrm{T}} G_D^{-1} C - \lambda^{-1} C_z^{\mathrm{T}} C_z\right]^{-1} A^{\mathrm{T}} - G_B -$$
$$- (\Theta - \Theta_\infty)\left[Y^{-1}(t) + C^{\mathrm{T}} G_D^{-1} C - \lambda^{-1} C_z^{\mathrm{T}} C_z\right](\Theta - \Theta_\infty)^{\mathrm{T}} \geqslant 0,$$

где Θ_∞ задана в (5.9) при $P(t) = Y(t)$. Отсюда следует, что если параметры фильтра определяются формулой (5.9), в которой матрица $P(t)$ удовлетворяет уравнению (5.10), то $\gamma_s^2 < \lambda$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. *Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B.* Linear Estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
4. *Hinrichsen D., Pritchard A.J.* Stochastic H_∞ // SIAM J. Control Optim. 1998. V. 36. No. 5. P. 1504–1538.
5. *Petersen I.R., Ugrinovskii V.A., Savkin A.V.* Robust Control Design Using H_∞-Methods. London: Springer-Verlag, 2000.
6. *Schweppe F.C.* Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs // IEEE Trans. Autom. Control. 1968. V. 13. No. 1. P. 22–28.
7. *Wilson D.* Extended Optimality Properties of the Linear Quadratic Regulator and Stationary Kalman Filter // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. V. 35. No. 5. P. 583–585.
8. *Willems J.C.* Deterministic least squares filtering. Journal of Econometrics. 2004. V. 118. P. 341–373.
9. *Buchstaller D., Liu J., French M.* The Deterministic Interpretation of the Kalman Filter // Int. J. Control. 2021. V. 94. No. 11. P. 3226–3236.
10. *Коган М.М.* Оптимальные оценивание и фильтрация при неизвестных ковариациях случайных факторов// АиТ. 2014. № 11. С. 88–109.
11. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: University Press, 2004.
12. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
13. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. V. 34. No. 1. P. 94–97.

14. *Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–24.
15. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
16. *Hsieh C., Skelton R.* All Covariance Controllers for Linear Discrete-Time Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1990. V. 35. No. 8. P. 908–915.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 24.08.2022

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022