Автоматика и телемеханика, № 2, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. **А.Р. ГАЙДУК, д-р техн. наук (gaiduk_2003@mail.ru)**
(Институт радиотехнических систем и управления Южного федерального университета, Таганрог)

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СЕЛЕКТИВНО-ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ[1]

Разработан оригинальный аналитический метод синтеза селективно-инвариантных систем управления нелинейными объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Задача синтеза решается с применением метода синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейной модели нелинейных объектов и принципа внутренних моделей внешних воздействий с учетом требований к относительному порядку устройства управления и быстродействию синтезируемой системы. Параметры нелинейного устройства управления определяются решением системы линейных алгебраических уравнений. Предложенный метод может применяться для синтеза систем управления нелинейными объектами различного назначения, работающими в условиях регулярных внешних воздействий известной формы.

Ключевые слова: нелинейный объект, дифференцируемая нелинейность, квазилинейная модель, селективно-инвариантная система, воздействие, спектр, спектральная модель, устойчивость, грубость.

DOI: 10.31857/S0005231023020058, **EDN:** ONBOCY

1. Введение

На практике часто встречаются объекты управления, подверженные влиянию регулярных внешних воздействий известной формы. К таким объектам относятся электромеханические системы, электро- и пневмоприводы, мобильные роботы, беспилотные летательные аппараты, зерноуборочные комбайны и многие другие объекты [1–6]. Системы управления этими объектами обычно должны обеспечить полное парирование влияния этих воздействий в установившемся режиме. Как известно, наиболее эффективным способом решения этой задачи является обеспечение инвариантности систем автоматического управления (САУ) к внешним воздействиям. Однако условия обеспечения абсолютной инвариантности чаще всего недостижимы, поэтому применяется

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-29-00533).

селективная инвариантность, для обеспечения которой в систему вводятся модели внешних воздействий, что обуславливает существенное увеличение порядка и сложности устройства управления.

Традиционно синтез селективно-инвариантных САУ осуществляется на основе линейных моделей объектов управления (ОУ) [1, 2, 7–12] и принципа внутренних моделей внешних воздействий. В некоторых работах внешние воздействия рассматриваемого типа называются «конечномерными» воздействиями [12, 13], однако задача синтеза систем управления решается также на основе принципа внутренних моделей.

Повышенные требования к качеству САУ приводят к необходимости использования нелинейных моделей ОУ [13–19]. При использовании известных методов синтеза нелинейных САУ, таких как преобразование модели ОУ к канонической форме Бруновского, линеаризация обратными связями по состоянию, метод бэкстеппинга, пассификации и др., обычно предполагается, что нелинейности объекта являются дифференцируемыми, а их переменные состояния измеряемыми. Однако применение указанных методов синтеза нелинейных САУ осложнено необходимостью приведения нелинейных моделей ОУ к специальным формам, что требует поиска подходящих нелинейных преобразований.

В работах В.О. Никифорова, А.А. Бобцова и др. (см. [13]) рассматриваются нелинейные системы, подверженные влиянию конечномерных внешних возмущений. Задача парирования их влияния на систему также решается на основе принципа внутренних моделей с применением метода функций Ляпунова, но при условии, что для невозмущенного объекта известны: а) стабилизирующее управление и б) функция Ляпунова, которая позволяет доказать устойчивость положения равновесия замкнутой невозмущенной системы.

В предлагаемом подходе к синтезу нелинейных селективно-инвариантных систем управления нелинейными объектами учитываются и задающее, и возмущающее внешние воздействия. Для решения задачи здесь используется метод синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейных моделей (КЛМ) нелинейных объектов, предложенный в [20, 21]. Преимущество этого метода по сравнению с указанными выше методами синтеза нелинейных систем [14–19] заключается в том, что для построения КЛМ требуется лишь дифференцируемость нелинейностей объекта по всем их аргументам, а параметры нелинейного устройства управления определяются решением разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Условия разрешимости рассматриваемой задачи синтеза нелинейных селективно-инвариантных САУ определяются свойством полноты (управляемости и наблюдаемости) канала «управление-выход» КЛМ нелинейного объекта и соотношением спектров внешних воздействий и нулей передачи последней.

Очень часто функциональные матрицы управляемости или наблюдаемости КЛМ объекта управления оказываются неособыми лишь в ограниченной окрестности его положения равновесия. В этом случае положение равновесия синтезированной нелинейной системы является асимптотически устойчивым в большом [22, 23]. Если же условия полноты выполняются во всем пространстве состояний ОУ и обратные связи выбраны так, что функциональная матрица разрешающей СЛАУ является неособой также во всем пространстве состояний ОУ, то положение равновесия замкнутой системы может быть асимптотически устойчивым в целом. Последнее может быть установлено на основе теоремы, доказанной в [20]. Матрицы и векторы квазилинейных моделей являются функциями переменных состояния [20–23], но, как оказалось, это не является препятствием для аналитического решения задачи синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления.

2. Постановка задачи

Система управления называется селективно-инвариантной, если в ее составе имеется модель внешнего воздействия (ВВ), а отклонение системы, вызванное этим воздействием, равно нулю в установившемся режиме [9–11]. Такая модель называется экзогенной [8, с. 168] или внутренней [10, 22]. Математические модели ВВ — это однородные дифференциальные уравнения (ДУ). Они могут быть представлены или операторами этих уравнений, или соответствующими ДУ в форме Коши (в переменных состояния) [7–13]. Некоторые особенности и примеры моделей воздействий приведены в Приложении. Если в устойчивой системе есть модель воздействия, то, как только воздействие начинает влиять на систему, модель генерирует сигнал, полностью парирующий его влияние в установившемся режиме. При этом соответствующие начальные условия этой модели устанавливаются автоматически в течение переходного процесса, возникающего в момент приложения этого ВВ к системе.

Рассматривая задачу синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления, для определенности будем предполагать, что ОУ в своем составе не имеет внутренних моделей ВВ или их отдельных составляющих. Предположим также, что нелинейности ОУ являются дифференцируемыми, а переменные состояния измеряемыми, что позволяет применить метод синтеза нелинейных систем управления на основе КЛМ [20–22].

Пусть КЛМ нелинейного ОУ в отклонениях от некоторого установившегося режима имеет вид

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u + b_f(x)f, \quad y = c^{\mathrm{T}}(x)x, \tag{1}$$

где $x \subset \mathrm{R}^n$ — вектор состояния ОУ; u, y и f — скалярные управление, управляемая переменная и внешнее неизмеряемое возмущение; $A(x)$ и $b(x)$, $b_f(x)$, $c(x)$ — известные функциональные $n \times n$-матрица и n-векторы. В [22, 24] приведен метод построения квазилинейных моделей типа (1) нелинейных объектов, заданных уравнениями $\dot{x} = \varphi(x, u)$, $y = \psi(x)$, если $\varphi(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$, $\psi(\mathbf{0}) = 0$ и $\partial\varphi(x, u)/\partial u = \varphi'_u(x)$, т.е. при условиях, что $\varphi(x, u)$ и $\psi(x)$ дифференцируемые по всем аргументам функции; $x = \mathbf{0}$ — положение равновесия объекта (1); частная производная по u от вектор-функции $\varphi(x, u)$ не зависит от u. Здесь $\mathbf{0}$ — нулевой n-вектор.

Далее рассматриваются полные объекты, т.е. объекты, КЛМ (1) которых удовлетворяет условиям управляемости и наблюдаемости:

$$
(2)\quad \begin{aligned}
&\left|\det\left[b(x)\quad A(x)b(x)\quad \ldots\quad A^{n-1}(x)b(x)\right]\right| \geq \varepsilon_{\text{у}} > 0,\\
&\left|\det\left[c(x)\quad A^{\mathrm{T}}(x)c(x)\quad \ldots\quad (A^{\mathrm{T}}(x))^{n-1}c(x)\right]\right| \geq \varepsilon_{\text{н}} > 0,\ \forall\, x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathrm{R}^n,
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon_{\text{у}}$, $\varepsilon_{\text{н}}$ — некоторые постоянные; $\Omega_{\text{УН}}$ — некоторая окрестность точки $x = \mathbf{0}$ [22].

В синтезируемой селективно-инвариантной системе применяется нелинейное устройство управления (НУУ), предложенное в [20, 21]. В данном случае его уравнения имеют вид:

$$
(3)\qquad \dot{z} = R(x)z + q(x)g - l(x)y - \sum_{i=1}^{q} l_i(x)\tilde{x}_i, \quad u = k^{\mathrm{T}}(x)z,
$$

где $z \subset \mathrm{R}^r$ — вектор состояния НУУ, g — скалярное задающее воздействие; $R(x)$ и $q(x)$, $l(x)$, $l_i(x)$, $i = 1, \ldots, q$ — функциональные $r \times r$-матрица и r-векторы; q — число переменных состояния $\tilde{x}_i \in x$, используемых в НУУ (3) и перенумерованных в порядке возрастания $\tilde{x}_1, \ldots \tilde{x}_q$, $q \leq n$. Значение r, переменные $\tilde{x}_i$ и число q определяются при формировании матрицы $G_{\text{у}}$ (22) разрешающей СЛАУ (см. ниже). Уравнения (3) отличаются от приведенных в [20] только тем, что здесь учитываются связи по задающему воздействию и управляемой переменной, а обратные связи могут вводиться не по всем переменным состояния.

Имея в виду синтез нелинейных селективно-инвариантных систем управления (1)–(3), будем предполагать, что известны спектральные модели в виде K_p-изображений задающего воздействия $g = g(t)$ и возмущения $f = f(t)$, т.е. известны операторы-полиномы $G(p)$ и $F(p)$ степеней $\nu_g = \deg G(p)$ и $\nu_f = \deg F(p)$, где p — оператор d/dt, такие, что $G(p)g(t) \equiv 0$ и $F(p)f(t) \equiv 0$. Пусть полином $\Phi(p) = \text{НОК}\{G(p)F(p)\}$, где НОК — наименьшее общее кратное [10, 11]. Операторное уравнение «вход-выход» замкнутой системы (1), (3) относительно отклонения $\varepsilon = g - y$ можно записать следующим образом:

$$
(4)\qquad \begin{aligned}
&H(p, x)\varepsilon = H_{\varepsilon g}(p, x)g - H_f(p, x)f,\\
&H_{\varepsilon g}(p, x) = H(p, x) - H_g(p, x),
\end{aligned}
$$

где $H(p, x)$, $H_g(p, x)$, $H_f(p, x)$ — некоторые полиномы от p, коэффициенты которых являются функциями переменных состояния x_i, $i = \overline{1, n}$ [20, 22]. Вывод этих полиномов на основе уравнений (1) и (3) дан в Приложении. На основе уравнения (4) условия селективной инвариантности системы (1), (3) по отношению к воздействиям $g = g(t)$ и $f = f(t)$ имеют вид:

$$
(5) \qquad \begin{aligned} &H_{\varepsilon g}(p,x) = \tilde{H}_{\varepsilon g}(p,x)G(p),\\ &H_f(p,x) = \tilde{H}_f(p,x)F(p), \quad \forall\, x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathrm{R}^n, \end{aligned}
$$

где $\tilde{H}_{\varepsilon g}(p,x)$, $\tilde{H}_f(p,x)$ — полиномы того же типа, что и в (4), но более низких степеней. При этом задача синтеза имеет решение при выполнении условий (2) и

$$
(6) \qquad \begin{aligned} &\text{НОД}\{B(p,x), \Phi(p)\} = \text{const},\\ &\text{НОД}\{H(p,x), \Phi(p)\} = \text{const}, \quad \forall\, x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathrm{R}^n. \end{aligned}
$$

Условия (2) и первое условие (6) являются необходимыми условиями разрешимости рассматриваемой задачи синтеза, так как они включают характеристики заданных ОУ и ВВ. Физический смысл первого условия (6) заключается в непересекаемости спектров воздействий $g(t)$ и $f(t)$ с нулями передачи объекта по каналу $u \to y$, что позволяет воспроизвести на выходе системы задающее воздействие и парировать влияние возмущения [10]. Второе условие (6) — это условие непересекаемости спектров воздействий $g(t)$ и $f(t)$ с корнями характеристического полинома замкнутой системы. Это условие является конструктивным и всегда может быть выполнено, если выполнены указанные выше необходимые условия разрешимости.

Таким образом, для решения задачи синтеза необходимо выбрать параметры функциональных матриц и векторов в (3) так, чтобы выполнялись условия селективной инвариантности (5), условия устойчивости, заданной длительности переходных процессов и условия физической реализуемости с учетом $\mu_{\text{нуу}}$ — относительного порядка НУУ [22, 25].

3. Решение задачи

Исключив из уравнений (1), (3) управление u и записав полученные уравнения в векторно-матричной форме, получим КЛМ замкнутой системы в переменных состояния:

$$
(7) \qquad \dot{w} = H(x)w + h(x)g + h_f(x)f, \quad y = [c^{\mathrm{T}}(x) \quad \bar{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}]w,
$$

где $w = [x^{\mathrm{T}} \quad z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{\ell}$, $\ell = n + r$, $\bar{\mathbf{0}}$ — нулевой r-вектор,

$$
(8) \qquad \begin{aligned} &H(x) = \begin{bmatrix} A(x) & b(x)k^{\mathrm{T}}(x) \\ -\Pi(x) & R(x) \end{bmatrix},\\ &h(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ q(x) \end{bmatrix}, \quad h_f(x) = \begin{bmatrix} b_f(x) \\ \bar{\mathbf{0}} \end{bmatrix}, \end{aligned}
$$

где $\Pi(x) = l(x)c^{\mathrm{T}}(x) + \sum\limits_{i=1}^{q} l_i(x)e_i$; e_i — i-я строка единичной матрицы E, соответствующей размерности.

В Приложении показано, что из уравнений (7) с учетом (8) следует уравнение «вход-выход» замкнутой системы

$$H(p,x)y = H_g(p,x)g + H_f(p,x)f, \tag{9}$$

где

$$H(p,x) = A(p,x)R(p,x) + B(p,x)L(p,x) + \sum_{i=1}^{q} L_i(p,x)V_i(p,x), \tag{10}$$

$$H_g(p,x) = B(p,x)Q(p,x), \tag{11}$$

$$H_f(p,x) = B_f(p,x)R(p,x) + \sum_{i=1}^{q} L_i(p,x)\tilde{N}_i(p,x), \tag{12}$$

$$\tilde{N}_i(p,x) = \Big(B_f(p,x)V_i(p,x) - B(p,x)W_i(p,x)\Big)A^{-1}(p,x). \tag{13}$$

В выражениях (9)–(13):

$$\begin{aligned} A(p,x) &= \det\left[pE - A(x)\right], \\ B(p,x) &= c^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,\left[pE - A(x)\right]b(x), \\ B_f(p,x) &= c^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,\left[pE - A(x)\right]b_f(x); \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} R(p,x) &= \det\left[pE - R(x)\right], \\ L(p,x) &= k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,\left[pE - R(x)\right]l(x), \\ Q(p,x) &= k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,\left[pE - R(x)\right]q(x); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} V_i(p,x) &= e_i\mathrm{adj}\,\left[pE - A(x)\right]b(x), \\ L_i(p,x) &= k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,\left[pE - R(x)\right]l_i(x), \\ W_i(p,x) &= e_i\mathrm{adj}\left[pE - A(x)\right]b_f(x), \quad i = \overline{1,q}. \end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что в (13) деление на полином $A(p,x)$ происходит нацело. Перейдем к решению указанных выше задач по выбору параметров уравнения (3).

Обеспечение селективной инвариантности. В соответствии с определением система имеет это свойство, если она содержит внутренние модели ВВ. По условиям задачи ОУ их не содержит, поэтому их необходимо ввести в УУ. С этой целью его характеристический полином берется в виде $R(p,x) = \tilde{R}(p,x)\Phi(p)$. Согласно (4) воздействие $f(t)$ умножается на полином (12), равный сумме двух слагаемых; причем в $R(p,x)$ спектральная модель $F(p)$ имеется, поэтому полагаем $L_i(p,x) = \tilde{L}_i(p,x)\Phi(p)$. При этом в уравнении (4) возмущение $f(t)$ будет умножено на $F(p)$; тем самым будет выполнено второе условие (5) и парировано влияние $f(t)$ на ошибку системы, так как $F(p)f(t) \equiv 0$. Аналогично, задающее воздействие $g(t)$ согласно (4) умножается на полином $H_{\varepsilon g}(p,x) = H(p,x) - H_g(p,x)$, поэтому при $R(p,x) = \tilde{R}(p,x)\Phi(p)$ и $L_i(p,x) = \tilde{L}_i(p,x)\Phi(p)$ для выполнения первого условия (5) необходимо, чтобы $L(p,x) - Q(p,x) = \tilde{Q}(p,x)G(p)$. Здесь $\tilde{R}(p,x)$, $\tilde{Q}(p,x)$ и $\tilde{L}_i(p,x)$ — некоторые полиномы более низких степеней по сравнению со степенями полиномов $R(p,x)$, $Q(p,x)$ и $L_i(p,x)$, $i = \overline{1,q}$ соответственно.

Обеспечение устойчивости. С этой целью в соответствии с методом синтеза на основе КЛМ функциональный характеристический полином $H(p,x)$ степени $\ell = n + r$ заменяется в (10) гурвицевым полиномом $H^*(p)$ той же степени, корни которого являются постоянными, вещественными и различными числами [20, 22, 23]. В результате с учетом выбранных выше полиномов $R(p,x)$ и $\tilde{L}_i(p,x)$ равенство (10) принимает вид:

$$H^*(p) = \bar{A}(p,x)\tilde{R}(p,x) + B(p,x)L(p,x) + \sum_{i=1}^{q} \bar{V}_i(p,x)\tilde{L}_i(p,x), \tag{17}$$

где $\bar{A}(p,x) = A(p,x)\Phi(p)$; $\bar{V}_i(p,x) = V_i(p,x)\Phi(p)$ — полиномы с известными коэффициентами.

Корни p_i^* полинома $H^*(p)$ можно выбирать, используя, в частности, условия:

$$\begin{gathered} \left|\mathrm{Re}(p_j^*)\right| \geq (5 \div 7)/t_p^*, \quad p_j^* = -\sigma_j^*, \quad \sigma_j^* > \varepsilon_\sigma > 0, \\ \left|\sigma_j^* - \sigma_\varsigma^*\right| \geq \Delta_\sigma > 0, \quad j \neq \varsigma, \quad j,\varsigma = \overline{1,\ell}, \end{gathered} \tag{18}$$

здесь t_p^* — требуемая длительность переходных процессов [25]; ε_σ, Δ_σ — некоторые числа.

Обеспечение разрешимости задачи синтеза. Выражение (17) фактически является полиномиальным уравнением относительно неизвестных полиномов

$$\tilde{R}(p,x) = \rho_0(x) + \rho_1(x)p + \ldots + \rho_{\tilde{r}}(x)p^{\tilde{r}},$$

$$L(p,x) = \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \ldots + \lambda_l(x)p^l \quad \text{и}$$

$$\tilde{L}_i(p,x) = \tilde{\lambda}_{i,0}(x) + \tilde{\lambda}_{i,1}(x)p + \ldots + \tilde{\lambda}_{i,\tilde{l}_i}(x)p^{\tilde{l}_i}.$$

По [20, 22, 26] уравнение (17) решается путем перехода к эквивалентной ему СЛАУ:

$$G_{\text{у}}d = h_{\text{г}}, \tag{19}$$

где векторы d, $h_{\text{г}}$ определяются выражениями

$$d = [\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_l \;\; \tilde{\lambda}_{1,0}\; \tilde{\lambda}_{1,1} \ldots \tilde{\lambda}_{1,\tilde{l}_1} \;\; \ldots \;\; \tilde{\lambda}_{q,0}\; \tilde{\lambda}_{q,1} \ldots \tilde{\lambda}_{q,\tilde{l}_q} \;\; \rho_0\; \rho_1 \ldots \rho_{\tilde{r}}]^{\mathrm{T}}, \tag{20}$$

$$h_{\text{г}} = [\delta_0^* \;\; \delta_1^* \;\; \ldots \;\; \delta_\ell^*]^{\mathrm{T}}, \tag{21}$$

δ_j^* — коэффициенты гурвицевого полинома $H^*(p)$, а матрица имеет вид

$$
(22)\quad G_{\text{у}} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c}
\beta_0 & & & 0 & v_{10} & & & 0 & \\
\beta_1 & \beta_0 & & & v_{1,1} & v_{10} & & & \\
\vdots & \beta_1 & \ddots & & \vdots & v_{1,1} & \ddots & & \cdots \\
\beta_m & \vdots & \ddots & \beta_0 & v_{1,\varsigma_1} & \vdots & \ddots & v_{10} & \cdots \\
0 & \beta_m & \ddots & \beta_1 & & v_{1,\varsigma_1} & \ddots & v_{1,1} & \cdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \cdots \\
 & \vdots & \ddots & \beta_m & & & & v_{1,\varsigma_1} & \\
0 & & & & 0 & & & &
\end{array}\right.
$$

$l+1$ — столбцов $\quad\tilde{l}_1+1$ — столбцов

$$
\left.\begin{array}{|cccc|cccc}
v_{q0} & & & 0 & \alpha_0 & & & 0 \\
v_{q1} & v_{q0} & & & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\
\vdots & v_{q1} & \ddots & & \vdots & \alpha_1 & \ddots & \\
v_{q,\varsigma_q} & \vdots & \ddots & v_{q0} & \vdots & \vdots & \ddots & \alpha_0 \\
 & v_{q,\varsigma_q} & \ddots & v_{q1} & \alpha_{\tilde{n}} & \vdots & \ddots & \alpha_1 \\
 & & \ddots & \vdots & & \alpha_{\tilde{n}} & \ddots & \vdots \\
 & & & v_{q,\varsigma_q} & & & \ddots & \vdots \\
0 & & & & 0 & & & \alpha_{\tilde{n}}
\end{array}\right].
$$

$\tilde{l}_q+1$ — столбцов $\quad\tilde{r}+1$ — столбцов

В выражениях (19), (20) $G_{\text{у}} = G_{\text{у}}(x)$, $d = d(x)$, а в (22) $\beta_j = \beta_j(x)$, $v_{ij} = v_{ij}(x)$ и $\alpha_j = \alpha_j(x)$ — функциональные коэффициенты полиномов $B(p,x)$, $\bar{V}_i(p,x)$ и $\bar{A}(p,x)$ при p^j; для краткости записи аргумент x в (19), (20) и (22) опущен.

Для обеспечения разрешимости системы (22) в уравнении (17) учитываются только те полиномы $\bar{V}_i(p,x)$, при которых степень ℓ полинома $H^*(p)$ будет минимальной, матрица $G_{\text{у}}$ — квадратной и $\det G_{\text{у}} \neq 0$ [22, 26]. В [26] приведен метод определения необходимых степеней полиномов $\tilde{R}(p)$, $L(p)$ и $\tilde{L}_i(p)$ в линейном случае с учетом $\mu_{\text{нуу}}$. Однако этот метод может применяться и в случае квазилинейных моделей ОУ (1). Поэтому здесь он не рассматривается, но будет проиллюстрирован ниже при решении численного примера.

Решение системы (22) определяет полиномы $\tilde{R}(p)$, $L(p)$ и q полиномов $\tilde{L}_i(p,x)$, при которых характеристический полином матрицы $H(x)$ (8) равен полиному $H^*(p)$.

Реализация НУУ. С этой целью путем перехода в (3) к операторной форме записывается соответствующее уравнение «вход-выход» НУУ:

$$
(23)\qquad R(p,x)u = Q(p,x)g - L(p,x)y - \sum_{i=1}^{q} L_i(p,x)\tilde{x}_i.
$$

Полиномы $R(p,x)$ и $L_i(p,x)$ находятся по формулам $R(p,x) = \tilde{R}(p,x)\Phi(p)$, $L_i(p,x) = \tilde{L}_i(p,x)\Phi(p)$, а полином $L(p,x)$ определяется решением системы (22). Полином $Q(p,x)$ степени $\kappa = \nu_g - 1$, где $\nu_g = \deg G(p)$, находится из принятого выше выражения $L(p,x) - Q(p,x) = \tilde{Q}(p,x)G(p)$ следующим образом. Если полином $G(p) \neq p^{\nu_g}$, то записывается полиномиальное уравнение

$$\tilde{Q}(p,x)G(p) + Q(p,x) = L(p,x), \tag{24}$$

где полиномы $\tilde{Q}(p,x)$ и $Q(p,x)$ — его минимальное решение, которое находится путем перехода к эквивалентной СЛАУ [11, 22]. Если же $G(p) \equiv p^{\nu_g}$, то берется полином

$$Q(p,x) = \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \ldots + \lambda_{\nu_g - 1}(x)p^{\nu_g - 1}. \tag{25}$$

Таким образом, все полиномы уравнения «вход-выход» НУУ определены. Чтобы убедиться в физической реализуемости НУУ при принятом $\mu_{\text{нуу}}$, достаточно перейти от уравнения (25) к эквивалентным ему уравнениям в переменных состояния, например, воспользовавшись соотношениями, приведенными в [22, стр. 346]. При этом для обеспечения параметрической грубости свойства селективной инвариантности необходимо обеспечить формирование спектральных моделей в явной форме. Подробнее этот момент показан ниже на примере.

Матрица $H(x)$ (8) системы (7) в общем случае является функциональной, корни ее характеристического полинома являются вещественными, отрицательными и различными в области $x \subset \Omega_{\text{УН}} \in \mathrm{R}^n$, $\|x\| < \infty$. Если область $\Omega_{\text{УН}} = \mathrm{R}^n$, $\|x\| < \infty$, то для устойчивости положения равновесия системы (7) в целом достаточно, чтобы существовал ℓ-вектор $b_1(w)$ с дифференцируемыми компонентами или константами, при котором выполняются условия:

$$\begin{gathered} |\det U_{\text{c}}(w)| \geq \varepsilon_{\text{c}} > 0, \\ U_{\text{c}}(w) = \begin{bmatrix} b_1(w) & H(x)b_1(w) & \ldots & H^{\ell-1}(x)b_1(w) \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\operatorname*{Sup}_{w} \frac{\mathrm{Sp}P_1(w)}{(\det P_1(w))^{1/\ell}} \leq K < \infty, \quad \forall\ w \subset \mathrm{R}^l,\ \|w\| < \infty, \tag{27}$$

где $\mathrm{Sp}(\cdot)$ — след матрицы $(\cdot)$; $P_1(w) = (U_A(w)M_s)\,(U_A(w)M_s)^{\mathrm{T}}$; ε_{c}, K — положительные числа;

$$M_s = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_{\ell-1} & 1 \\ \delta_2 & \cdot & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 1 & 0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots & \vdots \\ \delta_{\ell-1} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

δ_i — коэффициенты полинома $H(p,x) = \det(pE - H(x)) = p^\ell + \delta_{\ell-1}p^{\ell-1} + \ldots + {}$ $+ \delta_1 p + \delta_0$ [20].

Условия на корни характеристического полинома $H(p,x)$ функциональной матрицы $H(x)$ являются конструктивными и выполняются выбором полинома $H^*(p)$. Если условия (2) и первое условие (6) выполняются в области $\Omega_{\text{УН}} = \mathrm{R}^n$, $\|x\| < \infty$, то положение равновесия системы будет асимптотически устойчиво в целом при выполнении условий (26) и (27) [20]. Если же при этом матрица $H(x)$ (8) оказывается постоянной, то положение равновесия $x = \mathbf{0}$ системы (7) будет асимптотически устойчивым в целом [22] независимо от условий (26), (27). Если же область $\Omega_{\text{УН}} \in R^n$, $\|x\| < \infty$ является ограниченной, то положение равновесия $x = \mathbf{0}$ системы (7) будет асимптотически устойчивым в большом [22], также независимо от условий (26), (27).

Покажем эффективность разработанного метода синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления на численном примере.

4. Пример

Предположим, нелинейный объект управления описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 3\sin x_2 + 1{,}5u + f, \quad \dot{x}_2 = 4\sin x_2 + 2u + 3f, \quad y = 3x_1 - 2{,}25x_2, \tag{29}$$

где x_1, x_2 и y — измеряемые переменные состояния и выходная переменная; возмущение $f(t) = f_0 + f_m \sin(0{,}5t + \varphi_0)$, $t \geq 0$ не измеряется; задающее воздействие $g(t) = g_0 1(t)$ измеряется; f_0, f_m, φ_0, g_0 — неизвестные ограниченные постоянные. Синтезировать нелинейную селективно-инвариантную к $g(t)$ и $f(t)$ систему так, чтобы время регулирования $t_p \leq t_p^* = 1{,}5$ с; относительный порядок искомого НУУ $\mu_{\text{нуу}} = 0$ [22, 25].

Решение. Прежде всего, построим КЛМ объекта. С этой целью, следуя [22], найдем производную $d\sin x_2/dx_2 = \cos x_2$ и проинтегрируем ее по вспомогательной переменной:

$$a_{\text{c}}(x_2) = \int\limits_0^1 \cos(x_2\theta)d\theta = x_2^{-1}\sin(x_2\theta)\Big|_0^1 = x_2^{-1}\sin x_2 = \omega(x_2).$$

Заменив в (29) функцию $\sin x_2$ ее КЛМ моделью $a_{\text{c}}(x_2)x_2$, получим КЛМ объекта:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3\omega(x_2) \\ 0 & 4\omega(x_2) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} f, \quad y = [3 \quad -2{,}25]x, \tag{30}$$

где $x = [x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$. Сравнив системы (30) и (1), заключаем, что в данном случае

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 3\omega(x_2) \\ 0 & 4\omega(x_2) \end{bmatrix}, \quad b(x) = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2{,}25 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

По (31) находятся определители матриц из условия (2) при $n = 2$:

$$\det \begin{bmatrix} 1{,}5 & 3 + 6\omega(x_2) \\ 2 & 8\omega(x_2) \end{bmatrix} = -6, \quad \det \begin{bmatrix} 3 & -2{,}25 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 13{,}5;$$

т.е. условия (2) выполняются и КЛМ (30) является полной в области $\Omega_{\text{УН}} = \mathrm{R}^2$, $\|x\| < \infty$.

В рассматриваемом случае K_p-изображения внешних воздействий имеют вид: $G(p) = p$, $F(p) = p(p^2 + 0{,}25)$, т.е. $\Phi(p) = p(p^2 + 0{,}25)$. По формулам (14)–(16) находятся полиномы:

$$
\begin{gathered}
B(p,x) = 9, \quad A(p,x) = (p-2)(p - 4\omega(x_2)),\\
B_f(p,x) = -3{,}75p + 15\omega(x_2) + 13{,}5,\\
V_1(p,x) = 1{,}5p, \quad V_2(p,x) = 2(p-2),\\
W_1(p,x) = p + 5\omega(x_2), \quad W_2(p,x) = 3(p-2).
\end{gathered}
$$

Первое условие (6) выполняется.

В данном случае, следуя [26], устанавливаем, что для получения квадратной матрицы G_y при минимальном ℓ достаточно обратной связи лишь по одной переменной состояния, т.е. $q = 1$, а $\tilde{x}_1 = x_1$. При этом полиномиальное уравнение (17) принимает вид:

$$
H^*(p) = \bar{A}(p,x)\tilde{R}(p,x) + B(p,x)L(p,x) + \bar{V}_1(p,x)\tilde{L}_1(p,x), \tag{32}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\bar{A}(p,x) = \left[p^2 - (4\omega(x_2) + 2)\,p + 8\omega(x_2)\right]\left(p^3 + 0{,}25p\right),\\
\bar{V}_1(p,x) = 1{,}5p\left(p^3 + 0{,}25p\right).
\end{gathered}
$$

Из принятого выше вида полиномов $R(p,x)$, $L(p,x)$, $Q(p,x)$, $L_i(p,x)$ с учетом $q = 1$ и $\mu_{\text{нуу}} = \min\{r - l, r - \kappa, r - \tilde{l}_1, 0\} = 0$ следуют равенства:

$$
\begin{gathered}
\tilde{r} = \deg \tilde{R}(p,x) = r - 3, \quad l = \deg L(p,x) = r,\\
\tilde{l}_1 = \deg \tilde{L}_1(p,x) = r - 3, \quad \ell = \deg H^*(p) = 2 + r.
\end{gathered}
$$

При этом в алгебраической системе (19), эквивалентной полиномиальному уравнению (32), число уравнений есть $N_{\text{у}} = \ell + 1 = 2 + r + 1$, а число неизвестных коэффициентов $N_{\text{к}} = \tilde{r} + 1 + l + 1 + \tilde{l}_1 + 1 = 3r - 3$. Тогда из условия $N_{\text{к}} = N_{\text{у}}$ следует $r = 3$, и поэтому $\ell = 5$, $\tilde{r} = 0$, $\tilde{l}_1 = 0$, $l = 3$. При этом

$$
\begin{gathered}
\tilde{R}(p,x) = \rho_0(x), \quad \tilde{L}_1(p,x) = \tilde{\lambda}_{10}(x),\\
L(p,x) = \lambda_0(x) + \lambda_1(x)p + \lambda_2(x)p^2 + \lambda_3(x)p^3 \quad \text{и} \quad \det G_y(x) \neq 0.
\end{gathered}
$$

В данном случае $t_p^* = 1{,}5$ с, $\ell = 5$, поэтому первое неравенство (18) принимает вид $\left|\mathrm{Re}(p_j^*)\right| \geq 3{,}33 \div 4{,}67$, $j = \overline{1,5}$. С учетом этого неравенства и остальных условий (18) полагаем: $p_1^* = -4$, $p_2^* = -6$, $p_3^* = -9$, $p_4^* = -12$, $p_5^* = -15$, что приводит к полиному

$$
H^*(p) = p^5 + 46p^4 + 807p^3 + 6714p^2 + 26\,352p + 38\,880.
$$

В результате подстановки полученных значений в выражения (19)–(22) с учетом приведенных выше полиномов $B(p,x) = 9$, $\bar{A}(p,x)$ и $\bar{V}_1(p,x)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0{,}375 & -\omega-0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 8\omega+0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & -4\omega-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \tilde{\lambda}_{10} \\ \rho_0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 38\,880 \\ 26\,352 \\ 6714 \\ 807 \\ 46 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{33}
$$

Решение системы (33) дает значения коэффициентов полиномов $L(p,x)$, $\tilde{L}_1(p,x)$ и $\tilde{R}(p,x)$, что позволяет записать:

$$
L(p,x) = [(806{,}75 - 8\omega(x_2))p^3 + 6702{,}5p^2 + (26\,352 - 2\omega(x_2))p + 38\,880]/9,
$$
$$
R(p,x) = p(p^2+0{,}25), \quad L_1(p,x) = [48 + 4\omega(x_2)](p^3 + 0{,}25p)/1{,}5.
$$

В данном случае $G(p) \equiv p$, т.е. $\nu_g = 1$, поэтому из выражения (25) получаем $\kappa = 0$ и $Q(p,x) = 4320$. Полученные данные приводят к уравнению «вход-выход» (23) искомого НУУ:

$$
p\left(p^2+0{,}25\right)u = 4320g - \left(\lambda_0 + \lambda_1 p + \lambda_2 p^2 + \lambda_3 p^3\right)y - 2\left[48+4\omega(x_2)\right]p\left(p^2+0{,}25\right)x_1/3. \tag{34}
$$

С целью формирования в НУУ внутренних спектральных моделей ВВ в явном виде, что необходимо для обеспечения параметрической грубости свойства селективной инвариантности [22], уравнение (34) приводится к виду:

$$
u = \left(\frac{17\,280}{p} - \frac{17\,280p}{p^2+0{,}25}\right)g - \left(\frac{806{,}75-8\omega(x_2)}{9} + \frac{17\,280}{p} - \frac{148\,817{,}5p - 26\,150{,}3125}{9\left(p^2+0{,}25\right)}\right)y - \frac{2}{3}\left[48+4\omega\left(x_2\right)\right]x_1.
$$

Применив к этому выражению соотношения (П.2.6) и (П.2.7) из [22, с. 347], придем к квазилинейной модели искомого НУУ:

$$
\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}25 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 17\,280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\varepsilon - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 17\,280 \end{bmatrix} g - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 \\ 26\,150{,}3125 \\ -148\,817{,}5 \end{bmatrix} y, \tag{35}
$$

$$
u = z_1 + z_3 - \left\{\left[806{,}75 - 8\omega(x_2)\right]y + 6\left[48+4\omega(x_2)\right]x_1\right\}/9. \tag{36}
$$

Как видно, полученное НУУ содержит внутренние спектральные модели как постоянных составляющих ВВ, так и гармонической составляющей с частотой $\omega = 0{,}5$ рад/с.

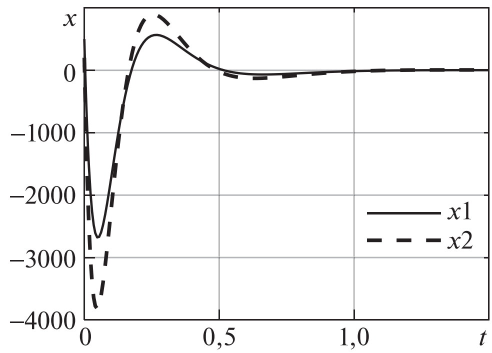

Рис. 1.

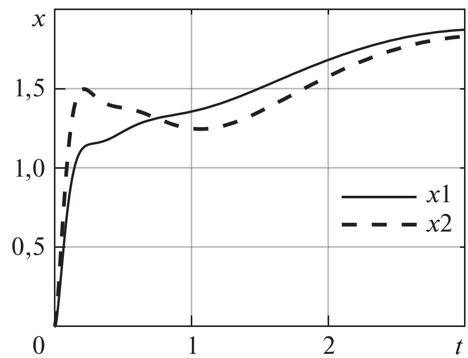

Рис. 2.

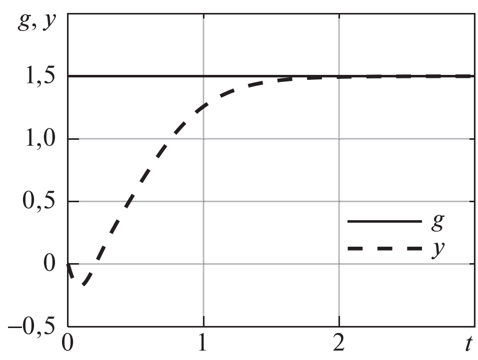

Рис. 3.

Объединив уравнения (30), (35) и (36) в одну систему, найдем, что параметры этой системы — постоянные числа, а корни ее характеристического полинома строго меньше нуля, следовательно, полученная нелинейная система является асимптотически устойчивой в целом.

Результаты моделирования системы (29), (35), (36) в MATLAB приведены на рис. 1–6. На рис. 1 показаны графики изменения переменных состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ объекта управления (29) при отсутствии внешних воздействий и

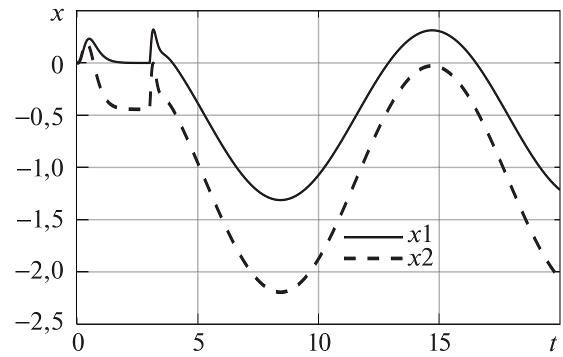

Рис. 4.

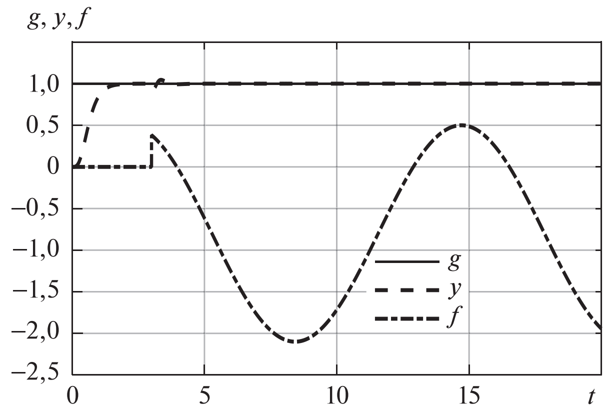

Рис. 5.

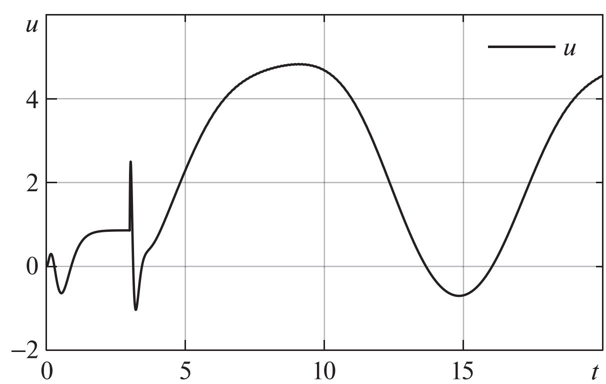

Рис. 6.

при «больших» начальных условиях, т.е. при $x_0 = [500 \;\; 200]^{\mathrm{T}}$, $z_0 = [0 \;\; 0 \;\; 0]^{\mathrm{T}}$ и $g(t) = f(t) = 0$. Эти графики свидетельствуют об асимптотической устойчивости синтезированной нелинейной системы.

На рис. 2 и 3 показаны переходные процессы системы при одновременном возникновении задающего воздействия $g(t) = 1{,}5 \cdot 1(t)$ и смещенного гармонического возмущения $f(t) = 1(t) + 2\sin(0{,}5t)$ при $t \geq 0$ и нулевых начальных условиях. Несмотря на наличие возмущения, отклонение системы $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$ в установившемся режиме равно нулю (рис. 3).

С целью более полного представления характера процессов в синтезированной селективно-инвариантной системе, на рис. 4–6 приведены графики изменения переменных состояния, задающего воздействия, выходной величины объекта и возмущения, а также управления в интервале времени от нуля до 20 с.

В этом случае возмущение $f(t) = -0{,}8 + 1{,}3\sin(0{,}5(t-3)+2)$, $3 \leq t$ (рис. 5) возникает на 3 с позже задающего воздействия $g(t) = 1(t)$, поэтому после окончания переходного процесса ($0 \leq t < 3$), вызванного задающим воздействием, и переменные состояния объекта (рис. 4), и выходная переменная $y(t)$ (рис. 5), и управление $u(t)$ (рис. 6) принимают постоянные значения, что соответствует постоянному задающему воздействию.

При возникновении возмущения $f(t)$ ($t = 3$ с) в системе начинается переходный процесс, особенно заметный на графиках рис. 4 и 6. После его окончания выходной сигнал устройства управления по форме становится аналогичным внешнему возмущению, причем его постоянная и гармоническая составляющие оказываются в противофазе с аналогичными составляющими внешнего возмущения.

5. Заключение

Предложенный в работе метод синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления является аналитическим и позволяет синтезировать системы управления с нулевыми ошибками как по задающим, так и по возмущающим внешним воздействиям известной формы. Решение задачи синтеза получено на основе принципа внутренних моделей с применением оригинального метода синтеза нелинейных систем управления. В этом методе используются квазилинейные модели, которые являются точным представлением нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши с дифференцируемыми правыми частями. Разработанный метод применим для синтеза нелинейных селективно-инвариантных систем управления объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Свойство селективной инвариантности замкнутой системы является грубым ко всем ее параметрам, кроме спектро-задающих параметров внутренних моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математические модели ВВ — это однородные дифференциальные уравнения (ДУ) некоторого порядка, возможно в совокупности с алгебраическими [7–13, 27]. Например, моделью воздействия $f(t) = f_0 1(t)$ являются уравнения $\dot{x}_f(t) = 0$, $x_f(0) = f_0$, $f(t) = x_f(t)$, где $x_f(0)$ — начальное условие. Моделью гармонического воздействия $f(t) = f_m \sin(\omega_f t + \phi_f)$ с частотой ω_f, произвольными амплитудой f_m и фазой ϕ_f являются уравнения $\dot{x}_{f1} = -\omega_f^2 x_{f2}$,

$\dot{x}_{f2} = x_{f1}$, $f = r_1 x_{f1} + r_2 x_{f2}$ с начальными условиями x_{f10} и x_{f20}. Здесь r_1, r_2 — некоторые константы.

Для парирования влияния внешнего воздействия на ошибку системы достаточно наличия в ней лишь спектральной модели воздействия, которая однозначно описывает его форму, путем учета только его спектра. В общем случае спектральная модель ВВ $g(t)$ может быть представлена либо уравнением в переменных состояния $\dot{x}_g = G x_g$, где G и x_g — числовая матрица и вектор, либо K_p-изображением, т.е. полиномом $G(p) = \det(pE - G)$, где $p = d/dt$. Подчеркнем, что полином $G(p)$ при $p = D$ является $K(D)$-изображением по Кулебакину этого ВВ [7], т.е. представления спектральной модели K_p-изображением или уравнениями в форме Коши являются эквивалентными [27].

Важным свойством K_p-изображения ВВ является равенство нулю при всех $t \geq 0$ произведения K_p-изображения на это воздействие как функцию времени [7]. Например, если ВВ $\varphi_1(t) = \varphi_0 \exp(\lambda_\varphi t)$, то его K_p-изображение $\Phi_1(p) = p - \lambda_\varphi$; тогда $\Phi_1(p)\varphi(t) = (p - \lambda_\varphi)\varphi_0 \exp(\lambda_\varphi t) = \varphi_0[(d\exp(\lambda_\varphi t)/dt) - \lambda_\varphi \exp(\lambda_\varphi t)] \equiv 0$ при ограниченном φ_0, так как $d\exp(\lambda_\varphi t)/dt = \lambda_\varphi \exp(\lambda_\varphi t)$.

Уравнение $\dot{x}_{\tilde{f}} = \tilde{F} x_{\tilde{f}}$, где матрица $\tilde{F} = \mathrm{diag}\{0 \ \ \lambda_{\tilde{f}}\}$ — это спектральная модель ВВ, равного $\tilde{f}(t) = \tilde{f}_0 1(t) + \tilde{f}_e \exp(\lambda_{\tilde{f}} t)$, $0 \leq t < \infty$, где $\tilde{f}_0$ и $\tilde{f}_e$ — ограниченные постоянные. K_p-изображением этого ВВ является полином $\tilde{F}(p) = p^2 - \lambda_{\tilde{f}} p$. Нетрудно убедиться, что $(p^2 - \lambda_{\tilde{f}} p)\tilde{f}(t) \equiv 0$. Из приведенных примеров следует, что K_p-изображение суммы ВВ равно произведению K_p-изображений каждого из них. Отметим также, что K_p-изображение ВВ $f(t)$ легко находится по таблице изображений по Лапласу [25, с. 29]: оно равно знаменателю его изображения $f(s)$ при $s = p$. Корни K_p-изображений или, что то же самое, собственные числа матриц уравнений ВВ в форме Коши являются спектро-задающими параметрами их моделей.

Вывод уравнения «вход-выход» замкнутой системы. ДУ (7) в операторной форме можно записать в виде $[pE - H(x)]w = h(x)g + h_f(x)f$. Отсюда $w = [pE - H(x)]^{-1}\{h(x)g + h_f(x)f\}$. Подставляя это выражение с учетом равенства $[pE - H(x)]^{-1} = \mathrm{adj}\,[pE - H(x)]/\det[pE - H(x)]$ во второе уравнение (7), получим уравнение (9), где

$$H(p, x) = \det[pE - H(x)], \tag{П.1}$$

$$H_g(p, x) = [c^{\mathrm{T}}(x) \quad \bar{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}]\mathrm{adj}\,[pE - H(x)]h(x), \tag{П.2}$$

$$H_f(p, x) = [c^{\mathrm{T}}(x) \quad \bar{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}]\mathrm{adj}\,[pE - H(x)]\,h_f(x). \tag{П.3}$$

Здесь матрица $pE - H(x)$ определяется выражением

$$pE - H(x) = \begin{bmatrix} pE - A(x) & -b(x)k^{\mathrm{T}}(x) \\ \Pi(x) & pE - R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}. \tag{П.4}$$

Покажем, что операторы уравнения (9) непосредственно связаны выражениями (10)–(13) с операторами (14)–(16) уравнений «вход-выход» квазилинейных моделей (1) и (3). Выражения (14)–(16) выводятся из указанных уравнений (1) и (3) совершенно аналогично приведенному выше выводу уравнения (9). В общем случае уравнение выхода НУУ (3) может иметь вид $u = k^{\mathrm{T}}(x)z + \lambda_r(x)y + \sum_{i=1}^{q}\tilde{\lambda}_{ir}(x)\tilde{x}_i$. При этом приведенные ниже выкладки существенно усложнятся, но их смысл не изменится [22, с. 349–353]. Поэтому для большей наглядности, далее предполагается, что $\lambda_r(x) \equiv 0$ и $\tilde{\lambda}_{ir}(x) \equiv 0$, $i = \overline{1, q}$.

Вывод оператора $H(p, x)$ (10). В соответствии с формулой (П.8), приведенной в [28, с. 223], из (П.4) следует выражение: $H(p, x) = \det[pE - H(x)] = \det \tilde{A} \det(\tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B})$. Отсюда с учетом обозначений (П.4) выводим равенство:

$$H(p, x) = \det\left[pE - A(x)\right] \det\left\{pE - R(x) + \Pi(x)\left[pE - A(x)\right]^{-1} b(x)k^{\mathrm{T}}(x)\right\}.$$

Так как $[pE - A(x)]^{-1} = \operatorname{adj}\left[pE - A(x)\right]/\det[pE - A(x)]$, то с учетом (14), (16) и обозначения $\Pi(x)$ имеем

$$\text{(П.5)}\quad H(p, x) = \\ = A(p, x) \det\left[pE - R(x) + \psi_l(p, x)l(x)k^{\mathrm{T}}(x) + \sum_{i=1}^{q}\psi_i(p, x)l_i(x)\, k^{T}(x)\right].$$

Здесь обозначено

$$\text{(П.6)}\qquad \psi_l(p, x) = B(p, x)/A(p, x), \quad \psi_i(p, x) = V_i(p, x)/A(p, x).$$

Применяя тождество (П.25) из [28, с. 233] ко второму множителю в (П.5) с учетом (15), получим:

$$H(p, x) = A(p, x)\begin{bmatrix} R(p, x) + \psi_l(p, x)k^{\mathrm{T}}(x)\operatorname{adj}\left[pE - R(x)\right]l(x) + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{q}\psi_i(p, x)k^{\mathrm{T}}(x)\operatorname{adj}\left[pE - R(x)\right]l_i(x)\end{bmatrix}.$$

Отсюда с учетом обозначений (П.6), (15) следует оператор (10).

Вывод оператора $H_g(p, x)$ (11). С этой целью воспользуемся формулой (П.12) из [28, с. 223], которая для блочной матрицы (П.4) позволяет записать равенство:

$$\text{(П.7)}\quad \operatorname{adj}\left[pE - H(x)\right] = \\ = \begin{bmatrix} \det M \operatorname{adj}\tilde{A} + \alpha^{-1}(\operatorname{adj} A)\tilde{B}(\operatorname{adj} M)\tilde{C}(\operatorname{adj}\tilde{A}) & -(\operatorname{adj}\tilde{A})\tilde{B}(\operatorname{adj} M) \\ -(\operatorname{adj} M)\tilde{C}(\operatorname{adj}\tilde{A}) & \alpha \cdot \operatorname{adj} M \end{bmatrix},$$

где $\alpha = \det \tilde{A} \neq 0$, $M = \tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$. Подставив в (П.2) выражения (П.7) и $h(x)$ из (8), получим с учетом обозначений (14) следующее равенство:

$$\text{(П.8)} \quad \begin{aligned} H_g(p,x) &= c^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{adj}\,[pE - A(x)]b(x) \cdot k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Mq(x) = \\ &= B(p,x)\,k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Mq(x). \end{aligned}$$

Так как матрица $M = \tilde{D} - \tilde{C}\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$, то с учетом обозначений (П.4) выводим

$$\begin{aligned} M = pE - R(x) &+ \\ &+ A^{-1}(p,x)\left\{ l(x)c^{\mathrm{T}}(x) + \sum_{i=1}^{q} l_i(x)e_i\mathrm{adj}\,[pE - R(x)] \right\} b(x)k^{\mathrm{T}}(x). \end{aligned}$$

Раскрывая здесь фигурные скобки, с учетом обозначений (П.6) получаем

$$\text{(П.9)} \quad M = pE - R(x) + \psi_l(p,x)l(x)k^{\mathrm{T}}(x) + \sum_{i=1}^{q} \psi_i(p,x)\,l_i(x)\,k^{\mathrm{T}}(x).$$

Следовательно, произведение $k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Mq(x)$ в равенстве (П.8) имеет вид

$$\begin{aligned} k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Mq(x) = k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\Bigg[& pE - R(x) + \psi_l(p,x)l(x)k^{\mathrm{T}}(x) + \\ & + \sum_{i=1}^{q} \psi_i(p,x)\,l_i(x)k^{\mathrm{T}}(x) \Bigg] q(x). \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (П.27) из [28, с. 233] с учетом третьего обозначения (15) имеем

$$\text{(П.10)} \quad k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Mq(x) = k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,[pE - R(x)]q(x) = Q(p,x).$$

Подставив это равенство в выражение (П.8), получим оператор (11).

Вывод оператора $H_f(p,x)$ (12). Из выражения (П.3) с учетом (П.7) выводим

$$\text{(П.11)} \quad H_f(p,x) = c^{\mathrm{T}}(x)\left\{ (\det M)\,\mathrm{adj}\,\tilde{A} + \alpha^{-1}(\mathrm{adj}\,\tilde{A})\tilde{B}(\mathrm{adj}\,M)\tilde{C}\,\mathrm{adj}\,\tilde{A} \right\} b_f(x).$$

Раскрывая здесь скобки и подставляя значение $\tilde{B}$ из (П.4), получим

$$\text{(П.12)} \quad H_f(p,x) = c^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,\tilde{A}\,b_f(x)\,\det M - \alpha^{-1}c^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,\tilde{A}\,b(x)\,\Lambda,$$

где обозначено

$$\text{(П.13)} \quad \Lambda = k^{\mathrm{T}}(x)(\mathrm{adj}\,M)\tilde{C}(\mathrm{adj}\,\tilde{A})b_f(x).$$

С учетом равенств $\tilde{A} = pE - A(x)$ и (14) находим

$$c^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{adj}\,\tilde{A}b_f(x) = B_f(p,x), \quad c^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{adj}\,\tilde{A}\,b(x) = B(p,x). \tag{П.14}$$

Применяя формулу (П.25) из [28, с. 233)] к (П.9) с учетом (15), (16) и (П.6), имеем

$$\begin{aligned}
&\det M = \\
&= \det\left\{pE - R(x) + \psi_l(p,x)l(x)k^{\mathrm{T}}(x) + \sum_{i=1}^{q}\psi_i(p,x)\,l_i(x)k^{\mathrm{T}}(x)\right\} = \\
&= \det\,[pE - R(x)] + \psi_l(p,x)\,k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,[pE - R(x)]\,l(x) + \\
&+ \sum_{i=1}^{q}\psi_i(p,x)\left[k^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{adj}\,[pE - R(x)]l_i(x)\right] = \\
&= R(p,x) + \psi_l(p,x)L(p,x) + \sum_{i=1}^{q}\psi_i(p,x)\,L_i(p,x).
\end{aligned} \tag{П.15}$$

Подставляя $\tilde{C}$, $\tilde{A}$ из (П.4) в (П.13) и раскрывая скобки с учетом (П.9), получим:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \left[k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Ml(x)\right]B_f(p,x) + \\
&+ \sum_{i=1}^{q}\left[k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Ml_i(x)\right]e_i\,\mathrm{adj}\,[pE - A(x)]\,b_f(x).
\end{aligned} \tag{П.16}$$

В соответствии с третьим выражением (16) $e_i\,\mathrm{adj}\,[pE - A(x)]\,b_f(x) = W_i(p,x)$; по аналогии с (П.10) и с учетом (15) находим $k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Ml(x) = L(p,x)$, $k^{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{adj}\,Ml_i(x) = L_i(p,x)$. Тогда из (П.16) следует равенство

$$\Lambda = L(p,x)B_f(p,x) + \sum_{i=1}^{q}L_i(p,x)W_i(p,x). \tag{П.17}$$

Подставляя выражения (П.14), (П.15) и (П.17) в (П.12), будем иметь

$$\begin{aligned}
H_f(p,x) &= B_f(p,x)R(p,x) + \psi_l(p,x)L(p,x)B_f(p,x) + \\
&+ \sum_{i=1}^{q}\psi_i(p,x)L_i(p,x)B_f(p,x) - \\
&- \psi_l(p,x)L(p,x)B_f(p,x) - \psi_l(p,x)\sum_{i=1}^{q}L_i(p,x)W_i(p,x).
\end{aligned}$$

Учитывая здесь (П.6), группируя суммы и вынося множитель $A^{-1}(p,x)$ за скобку, получим

$$H_f(p,x) = B_f(p,x)R(p,x) +$$
$$+\sum_{i=1}^{q} L_i(p,x)\left\{V_i(p,x)B_f(p,x) - B(p,x)W_i(p,x)\right\}A^{-1}(p,x).$$

Наконец, учитывая здесь обозначение (13), получим оператор (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апонский В.В., Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В.* Разработка и исследование селективно-инвариантных электромеханических систем с адаптацией регуляторов к изменениям уровня скорости // Известия РАН. Теория и системы управления. 2020. № 5. С. 28–43.
2. *Тихомирова И.А., Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В.* Адаптивное селективно-инвариантное управление следящими электроприводами с упругими кинематическими передачами / Вестник ИГЭУ. 2021. Вып. 4. С. 57–64.
3. *Обухова Е.Н.* Применение метода интегральной адаптации для синтеза адаптивных законов управления пневмоприводом в условиях гармонического возмущения // Известия ЮФУ. Технические науки. 2020. № 4(214). С. 200–211.
4. *Синицын А.С.* Нелинейный синтез астатической системы управления гидравлической подвеской автомобиля. Сборник научных трудов IX Всероссийской научной конференции «Системный анализ и прикладная синергетика» / Южный федеральный университет. 2019. № 9. С. 155–165.
5. *Пшихопов В.Х., Медведев М.Ю., Гуренко Б.В.* Алгоритмы терминального управления подвижными объектами мультикоптерного типа // Мехатроника, автоматизация и управление. 2019. Т. 20. № 1. С. 44–51. https://doi.org/10.17587/mau.20.44-51
6. *Neydorf R.A.*, *Gaiduk A.R., Kudinov N.V., Dolgov V.V.* Application of Quasilinear and CGA Models for Design Significantly Nonlinear Control Systems // Journal of Physics: Conference Series (JPC), E3S Web of Conferences, 2020, 224, 01015, https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=7004121894
7. *Кулебакин В.С.* Операторное K(D)-изображение функций и его практическое применение // Труды ВВИА им. Жуковского. 1958. Вып. 695.
8. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.
9. *Надеждин П.В.* Получение фильтров Колмогорова–Винера на основе принципа селективной инвариантности / Теория инвариантности, теория чувствительности и их применения. VI Всесоюзное совещание. (Тезисы докладов). М.: ИПУ, 1982. С. 37–38.
10. *Гайдук А.Р.* Условия достижимости инвариантности систем управления энергетическими объектами // АиТ. 2006. № 5. С. 93–101.

    Gaiduk A.R. Invariance Attainability Conditions for Power Plant Control Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 5. P. 759–766.

11. *Гайдук А.Р.* Синтез селективно инвариантных систем управления // Вестник ИГЭУ. Иваново: Изд-во ИГЭУ. 2017. № 1. С. 46–55.

12. *Ушаков А.В.* Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах при внешних конечномерных воздействиях // АиТ. 1992. № 11. С. 72–82.

    Ushakov A.V. Modal Estimation of Process Quality in Multidimensional Systems with External Finite-Dimensional Excitation // Autom. Remote Control. 1993. V. 53. No. 11. P. 1712–1721.

13. *Бобцов А.А., Никифоров В.О., Пыркин А.А., Слита О.В., Ушаков А.В.* Методы адаптивного и робастного управления нелинейными объектами в приборостроении: учебное пособие для высших учебных заведений. СПб: НИУ ИТМО, 2013. 277 с. ISBN 978-5-7577-0428-9

14. *Isidori A.* Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems. Advanced Textbook in Control and Signal Processing. London, Springer, 2016. 414 p.

15. *Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Nonlinear and Adaptive Control Design. New York: Wiley, 1995. 564 p. ISBN 0-471-12732-9

16. *Yang Y., Zhang H.H., Voyles R.M.* Rotary Inverted Pendulum System Tracking and Stability Control Based on Input-output Feedback Linearization and PSO-optimization Fractional Order PID Controller // Automatic Control, Mechatronics and Industrial Engineering, London, Taylor & Francis Group. 2019, pp. 79–84. ISBN 978-1-138-60427-813

17. *Gerasimov D.N., Liu L., Nikiforov V.O.* Adaptive Backstepping Control with Fast Parametric Convergence for a Class of Nonlinear Systems // 18$^{\text{th}}$ European Control Conference (ECC), 2019, pp. 3432–3437.

    https://doi.org/10.23919/ECC.2019.8795898

18. *Furtat I.B., Tupichin E.A.* Modified Backstepping Algorithm for Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 9. P. 1567–1578.

19. *Madeira D. de S., Adamy J.* Feedback Control of Nonlinear Systems Using Passivity Indices // Proc. IEEE Conference on Control Applications, Sydney, Australia. 2015, pp. 263–268.

20. *Gaiduk A.R.* Analytic Synthesis of Controls for Nonlinear Objects in One Class // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 2. P. 227–237.

21. *Gaiduk A.R.* A Polynomial Design for Nonlinear Control Systems // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 10. P. 1638–1642.

22. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.

23. *Gaiduk A.R., Stojković N.M.* Analytical Design of Quasilinear Control Systems // FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics. 2014. V. 13. No. 2. P. 73–84.

24. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

25. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2007. 312 с. 26.

26. *Гайдук А.Р.* Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // АиТ. 1990. № 5. С. 29–37.

    Gaiduk A.R. Feedback Selection in Control System of Minimum Complexity // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 5. P. 593–600.

27. *Гайдук А.Р.* Оценивание воздействий и инвариантность // АиТ. 1984. № 3. С. 20–29.
28. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы. М.: УМ и ИЦ «Учебная литература», 2004. 252 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 19.01.2022

После доработки 12.09.2022

Принята к публикации 29.09.2022