Автоматика и телемеханика, № 2, 2023

Стохастические системы

© 2023 г. **С.А. БУЛГАКОВ** (s.a.bulgakov@gmail.com),
В.М. ХАМЕТОВ, д-р физ.-мат. наук (khametovvm@mail.ru)
**(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)**

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ЗА НЕЙ С ГАУССОВСКИМИ ОШИБКАМИ

Статья посвящена решению задачи оптимального в среднеквадратическом смысле стохастического восстановления квадратично интегрируемой относительно меры Лебега функции, заданной на конечномерном компакте. В ней обосновывается процедура оптимального восстановления вышеуказанной функции, которая наблюдается в каждой точке этого компакта с гауссовскими ошибками. Здесь приводятся условия существования оптимальной процедуры стохастического восстановления, а также ее свойства несмещенности и состоятельности. Кроме того, предложена и обоснована процедура почти оптимального стохастического восстановления, которая позволяет: i) оценить зависимость среднеквадратического отклонения от количества ортогональных функций и числа наблюдений, ii) найти такое количество ортогональных функций, которое минимизирует это среднеквадратическое отклонение.

Ключевые слова: ортогональные функции, коэффициенты Фурье, ошибка наблюдения, проекционная оценка, несмещенность, состоятельность.

DOI: 10.31857/S0005231023020071, **EDN:** ONSJBQ

1. Введение

Статья посвящена теории оптимального восстановления квадратично интегрируемых функций относительно меры Лебега, определенных на конечномерном компакте, которые наблюдаются с гауссовскими ошибками. В ней устанавливаются условия существования оптимальной процедуры восстановления по критерию минимума среднеквадратического отклонения (СКО), использующей минимальное количество ортонормированных функций.

Под задачей стохастического восстановления (СВ) неизвестной функции из некоторого класса обычно понимают следующее: имеется возможность наблюдать значение этой функции с ошибками в любой точке области ее определения и требуется оценить (восстановить) ее по результатам наблюдений в соответствии с заданным критерием оптимальности. Следует отметить, что эта проблема относится к теории непараметрического (бесконечномерного) оценивания. Задачам непараметрического оценивания (НО) посвящено большое количество исследований, например, [1–22].

Обзор результатов, в хронологическом порядке, по теории СВ функций.

В [3, 4] рассматривается задача оценивания одномерной неизвестной квадратичноинтегрируемой плотности распределения по независимым наблюдениям за ней. В них доказывается, что для ее решения следует использовать ядерные оценки [3], которые являются асимптотически несмещенными и состоятельными. Впоследствии такой класс оценок получил название оценок Парзена—Розенблатта.

[5] — это работа, в которой содержится обобщение оценок Парзена—Розенблатта на многомерный случай.

Статья [6] посвящена решению задачи восстановления скалярной неизвестной функции по наблюдениям за ней с некоррелированными гауссовскими ошибками в конечном числе точек из области ее определения. В работе описаны оптимальные рекуррентные алгоритмы ее восстановления, а также установлена скорость их сходимости к неизвестной функции.

В [7] рассматривается задача восстановления неизвестной плотности распределения определенной на числовой прямой. В ней предложена проекционная оценка этой плотности, СКО которой эквивалентно СКО проекционной оценки, предложенной Н.Н. Ченцовым в [9].

В [8] решается задача НО неизвестной плотности распределения абсолютно непрерывной случайной величины в предположении, что имеется возможность наблюдать m независимых случайных величин, плотность распределения которых неизвестна. В статье установлены условия, которые обеспечивают существование ядерной оценки этой неизвестной плотности. Кроме того, доказано, что эти оценки асимптотически несмещенные и состоятельные. Результат исследования обобщает известные результаты Парзена—Розенблатта, Мёрфи [3–5, 7].

В монографии [9] изложен новый метод решения задач НО. В ней Н.Н. Ченцовым впервые было введено понятие проекционной оценки. Его подход к восстановлению неизвестной плотности распределения состоял в оценке «отрезков» коэффициентов ряда Фурье этой плотности по подходящей системе ортонормированных функций. Оказалось, что эти оценки являются линейными функционалами от наблюдений. С их помощью строятся оптимальные оценки в смысле критерия минимума СКО. Такой подход позволил автору доказать существование такого конечного числа членов ряда Фурье оценки, который обеспечил сходимость к неизвестной плотности, причем скорость сходимости по порядку величины являлась оптимальной.

В монографии [10] предложен метод решения задачи восстановления неизвестной функции, который основывается на теории поперечников Колмогорова и теореме Гливенко—Кантелли.

[11] — это монография, которая посвящена изложению асимптотических методов в теории точечного и НО. В ней также излагается теория оценивания

неизвестного гладкого квадратичноинтегрируемого сигнала, наблюдаемого на фоне аддитивного «белого» гауссовского шума. Показано что это задача НО. В качестве критерия использован критерий минимума СКО. Показано, что существует такая оценка сигнала, СКО которой (по порядку величины) эквивалентно СКО оптимальной оценки. Также доказано, что вышеуказанная оценка неулучшаема.

Монография [12] посвящена НО неизвестной плотности распределения. В ней для ядерных оценок плотности распределения Парзена—Розенблатта устанавливаются асимптотическая несмещенность и состоятельность. Кроме того, в ней исследованы предельные свойства уклонений этих оценок плотности от истинной плотности распределения. В книге также излагается метод построения непараметрической оценки регрессионной кривой.

В [13] находятся скорости сходимости оценок максимального правдоподобия в задачах НО неизвестной функции из L_2 по наблюдениям за ней в конечном числе точек. В статье получены условия, при выполнении которых, скорость сходимости неулучшаема. В частности, доказано, что для монотонной неизвестной функции из L_2 нелинейная оценка максимального правдоподобия по порядку величины имеет скорость сходимости, лучшую по сравнению с любой линейной непараметрической оценкой.

В [14, 15] содержится подробный обзор результатов по теории СВ. В них для решения этой задачи использован минимаксный подход.

В [16] для двухкомпонентного случайного вектора (первая компонента которого — это случайный элемент со значениями в некотором измеримом пространстве с вероятностной мерой, а вторая — случайная величина) рассматривается задача оценивания функции регрессии для первой компоненты по n независимым наблюдениям за второй. Предполагается, что функция регрессии принадлежит некоторому классу гладких квадратичноинтегрируемых функций, у которого известны такие метрические характеристики, как ε-энтропия по Колмогорову либо поперечники Колмогорова, исследуются асимптотические свойства ее СКО.

Монография [17] посвящена теории НО и состоит из трех глав. В книге излагаются следующие направления теории НО: i) методы построения НО; ii) статистические свойства НО: сходимость и скорость сходимости; iii) адаптивные процедуры НО. Направления i) и ii) подробно обсуждаются в главе 1. Направление iii) составляет основное содержание монографии и подробно изложено в главах 2 и 3.

В статье [18] решается задача восстановления неизвестной скалярной квадратичноинтегрируемой функции по наблюдениям за ней в каждой точке конечномерной компактной области определения с независимыми гауссовскими ошибками. В ней, в спектральном представлении, устанавливаются условия существования процедуры оптимального восстановления в смысле критерия минимума СКО. Кроме того, доказывается, что эта процедура восстановления обладает свойствами несмещенности и состоятельности.

[19] — это статья, которая посвящена применению оптимальных методов интерполяции, основанных на свойствах эллиптических функций Абеля—Якоби, для оценивания непараметрической регрессии. В ней приводится описание методов оптимальной интерполяции статистических данных при использовании некоторых критериев оптимальности. В частности, описано, как использовать эти методы для решения задачи СВ.

Статья [20] посвящена разработке метода СВ сигналов для общих линейных моделей. В ней показано, что задача СВ может быть сведена к решению монотонных вариационных неравенств. Численное решение которых может быть найдено с помощью известных эффективных вычислительных процедур. В ней доказано, что сильно монотонные вариационные неравенства имеют верхнюю границу.

В статье [21] рассматривается задача оценивания линейного функционала по наблюдениям за ним, которые являются аддитивной смесью этого функционала и «белого» гауссовского шума. В качестве оценок этого функционала используются проекционные. В статье описывается методика выбора такой наилучшей оценки. В ней довольно подробно излагается идея построения такого рода оценок.

Работа [22] посвящена СВ скалярных, гладких, детерминированных, квадратичноинтегрируемых функций относительно меры Лебега на действительной прямой по наблюдениям за ними с независимыми гауссовскими ошибками в каждой точке области определения. В ней устанавливаются условия существования оптимального оценивания в смысле критерия минимума СКО. Особенностью рассматриваемой в статье задачи является то, что как наблюдаемая последовательность, так и критерий качества описываются не в координатном представлении, а в терминах коэффициентов Фурье наблюдений, восстанавливаемой функции и ошибок наблюдений. Такое представление позволяет при использовании тригонометрического базиса формулировать результаты в простой удобной форме. Для данного случая получены легко проверяемые условия существования оптимальной процедуры восстановления, а также такие ее свойства, как несмещенность и состоятельность. Кроме того, для гладких функций из пространства Соболева построена процедура восстановления, которая эквивалентна оптимальной. Следует отметить, что в этом случае построенная процедура имеет СКО, которое обладает следующими свойствами:

(i) из-за наличия смещения отклонение меньше оптимального;

(ii) не зависит от восстанавливаемой функции;

(iii) оно неулучшаемо.

Актуальность. Как следует из вышеприведенного обзора, проблеме СВ посвящено множество исследований. В [3–17, 19, 20] данная проблема сформулирована в координатном представлении, математическое описание которого составляют формулы (1)—(4) и (15) раздела 2. Из [26] следует, что решение экстремальной задачи (15) существует, поскольку выполнены условия леммы

Янкова—фон Неймана, причем оно является аналитической функцией. Значит, решение задачи (15) не является борелевской функцией и поэтому не существует непараметрической статистической оценки неизвестной квадратично интегрируемой функции, наблюдаемой на фоне аддитивного «белого» шума.

Отметим также статью [21], в которой показано, что не существует, в координатном представлении, оценки максимального правдоподобия неизвестной квадратично интегрируемой функции, наблюдаемой на фоне помех, представляющих собой гауссовскую случайную функцию, лежащую в некотором гильбертовом пространстве.

В работе [18] предложен другой подход, который предполагает, что наблюдаются коэффициенты Фурье аддитивной смеси неизвестной функции и гауссовской функции ошибок, которая имеет вид (7). Такое представление было названо в тексте спектральным. В частности, из (7) следуют условия существования и явный вид оценок каждого коэффициента Фурье и его дисперсии. Этот факт позволил авторам впервые установить явный вид оптимальной непараметрической оценки и СКО неизвестной функции (теорема 1, следствие 1). Опираясь на эти результаты, установлены свойства несмещенности и состоятельности этих оценок (теоремы 2, 3). Отметим, что из работ [3–17, 19–21] не ясно, насколько предложенные в них непараметрические оценки близки к оптимальным.

Опираясь на эти результаты, установлено:

(i) явная зависимость СКО неизвестной функции, когда в качестве ее оценки использована случайная функция, использующая только первые $N \in \mathbb{Z}^+$ слагаемых в (23) и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ наблюдений (теорема 4);

(ii) для каждого m существование $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$, которое доставляет минимальное значение этому СКО (теорема 5).

Кроме того, предложен конструктивный способ нахождения значения $N^0(m)$ (теорема 6). Этот результат позволил установить условия эквивалентности СКО и m^{-1}, а также эквивалентности $N^0(m)$ и m (следствие 3). Данные утверждения позволяют дать определение проекционной оценки Ченцова (смотри формулу (40)) и установить ее СКО. Последнее позволило оценить скорость сходимости этой процедуры к неизвестной функции (теорема 8), а также ее независимость от вида неизвестной функции (теорема 10).

В конце статьи приведен пример, в котором удается в явном виде найти значение $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$.

Расположение материала работы следующее.

В разделе 2 излагается постановка задачи СВ в спектральном представлении.

В разделе 3 устанавливается условие существования решения задачи СВ (теорема 1), которое в свою очередь является задачей НО. Кроме того, здесь устанавливаются такие статистические свойства оптимального восстановления, как несмещенность (теорема 2) и состоятельность (теорема 3).

Раздел 4 посвящен нахождению зависимости СКО $V_m(N)$ от числа использованных ортонормированных функций и числа наблюдений (теорема 4). Здесь: i) доказывается что для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ существует $N^0(m)$, которое доставляет $V_m(N)$ наименьшее значение (теорема 5); ii) установлен конструктивный способ нахождения $N^0(m)$. Кроме того, получены условия эквивалентности $V_m(N^0)$ и $\frac{N^0(m)}{m}$, а также эквивалентности $N^0(m)$ и m.

Раздел 5 посвящен описанию свойств оптимальных проекционных оценок, имеющих СКО $V_m(N^0(m))$ (смотри формулу (40)) неизвестной функции, названных в работе оценками Ченцова (ПОЧ). Здесь также доказано, что:

1) ПОЧ сходится к неизвестной функции со скоростью порядка $m^{-\frac{1}{2}}$;

2) ПОЧ является асимптотически несмещенной и установлены условия ее состоятельности.

Доказательство всех утверждений составляет содержание двух приложений.

2. Определения и обозначения, необходимые для формулировки задачи стохастического восстановления. Обоснование возможности использования спектрального представления

2.1. Пусть K — конечномерный компакт, $\mathcal{B}(\mathrm{K})$ — борелевская σ-алгебра в K, а $L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ — множество функций $f\colon \mathrm{K} \to \mathbb{R}^1$ — квадратично интегрируемых относительно меры Лебега Λ на K, т.е. $\int_{\mathrm{K}} f^2(x)dx < \infty$. Поскольку $L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ — сепарабельное гильбертово пространство, то в нем существует (вообще говоря неединственная) полная, ортонормированная система функций, которую мы обозначаем через $\{\varphi_j(x)\}_{j\geqslant 0}$, т.е. для любых $j, j' \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ ($\overline{\mathbb{Z}}^+ \triangleq \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$) функции $\varphi_j(x), \varphi_{j'}(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ такие, что $\int_{\mathrm{K}} \varphi_j(x)\varphi_{j'}(x)dx = \delta_{j,j'}$, здесь $\delta_{j,j'}$ — символ Кронекера, причем $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_{\mathrm{K}} \varphi_j^2(x)dx < \infty$ [24]. Отсюда следует, что для почти всех $x \in \mathrm{K}$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x), \tag{1}$$

где $\{c_j\}_{j\in\overline{\mathbb{Z}}^+}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, т.е. $c_j \triangleq \int\limits_{\mathrm{K}} f(x)\varphi_j(x)dx$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, на котором задана измеримая функция $n\colon \mathbb{Z}^+ \times \Omega \times \mathrm{K} \to \mathbb{R}^1$, обозначаемая $n_m(x)$, такая, что для любых $x \in \mathrm{K}$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ выполнены условия (n_1).

Условия (n_1):

$$\mathsf{E} n_m(x) = 0, \qquad \sigma^2 \triangleq \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} n_m^2(x)dx < \infty, \tag{2}$$

и для любых $y, x \in \mathrm{K}$ *причем* $y \neq x$ *и* $m \neq q$

$$\mathsf{E} n_m(x) n_q(x) = 0, \qquad \mathsf{E} n_m(y) n_m(x) = 0\,. \tag{3}$$

Здесь через $\mathsf{E}(\cdot)$ обозначен интеграл Лебега относительно вероятностной меры P.

Очевидно, что на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathrm{K}) \otimes \mathcal{F}$ определена мера $\Lambda \times \mathrm{P}$, обозначаемая $\widetilde{\mathrm{P}}$.

Предположим, что в любой точке $x \in \mathrm{K}$ мы наблюдаем функцию $y_m(x)$, которая представляет собой сумму функций $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ и $n_m(x)$, т.е. наблюдаем функцию $f(x)$ с аддитивными ошибками $n_m(x)$:

$$y_m(x) = f(x) + n_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x) + n_m(x) \;\text{—}\; \widetilde{\mathrm{P}}\text{-п.в.}, \tag{4}$$

где $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ — номер наблюдения.

2.2. Нам также потребуются обозначения для коэффициентов Фурье случайных функций $y_m(x)$ и $n_m(x)$:

$$y_m^j \triangleq \int\limits_{\mathrm{K}} y_m(x) \varphi_j(x) dx, \tag{5}$$

$$n_m^j \triangleq \int\limits_{\mathrm{K}} n_m(x) \varphi_j(x) dx. \tag{6}$$

Из (5)–(6) следует, что коэффициенты Фурье, для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ — это случайные величины. А из (1), (4), (5), (6) следует равенство P-п.н.

$$y_m^j = c_j + n_m^j \;\text{—}\; \mathsf{P}\text{-п.н.} \tag{7}$$

Так как $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ и выполнены условия (n_1), то из (7) следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[c_j^2 + \mathsf{E}(n_m^j)^2\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}(y_m^j)^2 = \mathsf{E} \sum_{j=0}^{\infty} (y_m^j)^2 < \infty. \tag{8}$$

Условия (n_2):

(i) $\sigma_j^2 \triangleq \mathsf{E}(n_m^j)^2$, $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$, *т.е. дисперсия коэффициентов Фурье ошибок не зависит от номера наблюдения*;

(ii) $\sigma^2 \triangleq \sum\limits_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$.

Из [23] следует, что если известны коэффициенты Фурье набора $\{y_k^j\}_{\substack{j\in\overline{\mathbb{Z}}^+\\ k=\overline{1,m}}}$, $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, то любая наблюдаемая функция из набора $\{y_m(x)\}_{\substack{x\in \mathrm{K}\\ m\in\mathbb{Z}^+\setminus 0}}$ допускает представление $\widetilde{\mathsf{P}}$-почти всюду

$$y_m(x) \triangleq \sum_{j\in\overline{\mathbb{Z}}^+} y_m^j \varphi_j(x). \tag{9}$$

Пусть $\mathcal{F}_m^{y^j}$ и $\mathcal{F}_m^{y}$ σ-алгебры, порожденные семействами случайных величин $\{y_k^j\}_{k=\overline{1,m}}$ и $\{y_k^j\}_{\substack{j\in\overline{\mathbb{Z}}^+\\ k=\overline{1,m}}}$, соответственно, т.е.

$$\mathcal{F}_m^{y^j} \triangleq \sigma\left\{y_1^j, \ldots, y_m^j\right\}, \tag{10}$$

$$\mathcal{F}_m^{y} \triangleq \sigma\left\{y_1^j, \ldots, y_m^j, j \in \overline{\mathbb{Z}}^+\right\}. \tag{11}$$

Очевидно, что $y_m(x)$ является $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(\mathrm{K})$-измеримой случайной функцией.

Определение 1. Любую $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(\mathrm{K})$-измеримую функцию $\overline{f}_m(x)$ со значениями в $\mathbb{R}^1$ назовем <u>оценкой</u> *функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$, по результатам $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ наблюдений.*

Определение 2. Оценку $\overline{f}_m(x)$ назовем <u>допустимой</u>*, если*

$$\mathsf{E}\int_{\mathrm{K}} |\overline{f}_m(x)|^2 dx < \infty. \tag{12}$$

Обозначим через $\mathcal{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ — множество допустимых оценок $\overline{f}_m(x)$. Очевидно, что $\mathcal{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}}) \neq \varnothing$ и является гильбертовым пространством.

Определение 3. Допустимую оценку $\widehat{f}_m(x) \in \mathcal{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ будем называть <u>проекционной</u>*, если она допускает представление $\widetilde{\mathsf{P}}$-п.в.*

$$\widehat{f}_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j,m} \varphi_j(x), \tag{13}$$

где для каждого $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, а $c_{j,m}$ — $\mathcal{F}_m^{y^j}$-измеримая случайная величина, которая является коэффициентом Фурье оценки $\widehat{f}_m(x)$, причем $\mathsf{E}\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{j,m}^2 < \infty$.

Множество проекционных оценок обозначим через $\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$. Очевидно $\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}}) \subseteq \mathcal{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

В статье рассматривается задача построения проекционных оценок $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ неизвестной функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ по наблюдениям описываемым (7) таких, что

$$\mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx \to \inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} . \tag{14}$$

(14) — это критерий минимума СКО относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$.

Определим, что мы будем понимать под оптимальной проекционной оценкой.

Определение 4. Проекционную оценку $\widehat{f}_m^{\,0}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ назовем оптимальной, если

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \left[f(x) - \widehat{f}_m(x)\right]^2 dx = \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \left[f(x) - \widehat{f}_m^{\,0}(x)\right]^2 dx. \tag{15}$$

Представление данных задачи стохастического восстановления в форме (5)—(15) будем называть спектральным представлением.

2.3. Целью данной статьи является:

1) доказательство существования процедуры восстановления функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$, использующей конечное число ортонормированных функций, а также нахождение ее СКО;

2) исследование статистических свойств этой процедуры восстановления.

3. Условия существования оптимальных оценок неизвестной функции

Обозначим $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ — множество бесконечномерных случайных векторов $\widehat{c}_m \triangleq (\widehat{c}_{0,m}, \widehat{c}_{1,m}, \dots)$, таких, что: i) для любого $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ и каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ случайная величина $\widehat{c}_{j,m}$ — $\mathcal{F}_m^{y^j}$-измерима, ii) $\mathsf{E} \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left|\widehat{c}_{j,m}\right|^2 < \infty$.

3.1. Если $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$, то $\widetilde{\mathsf{P}}$-почти всюду имеем

$$\widehat{f}_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m} \varphi_j(x), \tag{16}$$

где $\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ — $\mathcal{F}_m^{y^j}$-измеримая случайная величина, $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$, а $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, которая является коэффициентом Фурье оценки $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$, т.е. P-п.н.

$$\widehat{c}_{j,m} \triangleq \int\limits_{\mathrm{K}} \widehat{f}_m(x) \varphi_j(x) dx. \tag{17}$$

Из (16) следует соотношение

$$\mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \left|\widehat{f}_m(x)\right|^2 dx = \mathsf{E}\sum_{i=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^{\,2}, \tag{18}$$

которое является обобщением известного равенства Парсеваля [24, 25].

Из (18) следует, что $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ — гильбертово пространство.

Кроме того, из равенства (18) следует утверждение.

Предложение 1. $\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ *и* $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ *— изоморфны.*

Предложение 2. Для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ *оптимальная проекционная оценка* $\widehat{f}_m^{\,0}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ *существует тогда и только тогда, когда существуют* $\{\widehat{c}_m^{\,0}\} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ *такие, что*

$$\inf_{\{\widehat{c}_{j,m}\}_{j\geqslant 0}\in\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\sum_{j=0}^{\infty}\left[c_j - \widehat{c}_{j,m}\right]^2 = \mathsf{E}\sum_{j=0}^{\infty}\left[c_j - \widehat{c}_{j,m}^{\,0}\right]^2. \tag{19}$$

Доказательство предложения 2 приведено в приложении 1 (см. пункт П.1.1).

Замечание 1. Из утверждения предложения 2 следует, что для существования оптимальной проекционной оценки функции из класса $\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ необходимо и достаточно, чтобы существовали оптимальные оценки ее коэффициентов Фурье.

3.2. В данном пункте мы сформулируем условия существования решения задачи оптимального СВ функции из $L_2(\mathrm{K},\Lambda)$.

Условия (n_3).

Пусть для любых $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ *и* $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ *семейство* $\{n_m^j\}_{\substack{j\in\overline{\mathbb{Z}}^+\\ m\in\mathbb{Z}^+\setminus 0}}$ *образует гауссовскую систему некоррелированных случайных величин с* $\mathrm{Law}(n_m^j) = \mathcal{N}(0,\sigma_j^2)$.

Обозначим СКО оптимальной оценки через $V_m(\infty)$.

Теперь можно сформулировать теорему существования оптимального СВ.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L_2(\mathrm{K},\Lambda)$ *и выполнены условия* (n_i), $i = \overline{1,3}$. *Тогда для почти всех* $x \in \mathrm{K}$ *и* $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ *существует оптимальная проекционная оценка* $\widehat{f}_m^{\,0}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$, *которая* $\widetilde{\mathsf{P}}$*-почти всюду допускает представление*

$$\widehat{f}_m^{\,0}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^{\,0}\varphi_j(x), \tag{20}$$

где

$$\widehat{c}_{j,m}^{\,0} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j, \tag{21}$$

а СКО которой $V_m(\infty)$ имеет вид:

$$V_m(\infty) = \inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \left[f(x) - \widehat{f}_m(x) \right]^2 dx = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2. \tag{22}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.2).

З а м е ч а н и е 2. Утверждение теоремы 1 в отличие от [3–17, 19–21], устанавливает достаточные условия существования оптимальной проекционной оценки функции из $L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ по наблюдениям за ней с независимыми гауссовскими ошибками.

3.3. Из теоремы 1 следует простой вид оценки $\widehat{f}_m^{\,0}(x)$.

С л е д с т в и е 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ почти всюду относительно меры $\widetilde{\mathsf{P}}$ оптимальная оценка $\widehat{f}_m^{\,0}(x)$ допускает представление:

$$\widehat{f}_m^{\,0}(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} y_k(x). \tag{23}$$

Доказательство следствия 1 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.3).

3.4. Свойства оптимальных оценок.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оценка (20) *— несмещенная.*

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.4).

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и для почти всех $x \in \mathrm{K}$ относительно меры Лебега ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 \varphi_j^2(x)$ — сходится. Тогда оценка $\widehat{f}_m^{\,0}(x)$ — состоятельная.

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении 1 (см. пункт П.1.5).

4. Зависимость СКО оценки неизвестной функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ от количества используемых ортогональных функций, числа наблюдений и некоторые ее свойства

4.1. Пусть функции $f_N(x) \triangleq \sum\limits_{j=0}^{N} c_j \varphi_j(x)$, где $c_j \triangleq \int\limits_{\mathrm{K}} f(x)\varphi_j(x)dx$, а $N \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ — число «использованных» ортогональных функций. Очевидно, что $f_N(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$.

Пусть $\widehat{f}_{m,N}^{\,0}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ — оптимальная проекционная оценка неизвестной функции $f_N(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$. Очевидно, что в силу теоремы 1 она имеет вид:

$$\widehat{f}^{\,0}_{m,N}(x) \triangleq \sum_{j=0}^{N} \widehat{c}^{\,0}_{j,m}(x)\varphi_j(x). \tag{24}$$

Из (24), в силу теоремы Фубини, следует равенство

$$\mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \left|\widehat{f}^{\,0}_{m,N}(x)\right|^2 dx = \mathsf{E}\sum_{j=0}^{N} \left|\widehat{c}^{\,0}_{j,m}\right|^2, \tag{25}$$

причем $\widehat{c}^{\,0}_{j,m}$ имеет вид (21).

Пусть $V_m(N)$ — СКО оценки $\widehat{f}^{\,0}_{m,N}(x)$ от функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$, для построения которой использован «отрезок» из N-ортогональных функций и с числом наблюдений, равным m. Очевидно $V_m(N)$ допускает представление

$$V_m(N) \triangleq \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \left[f(x) - \widehat{f}^{\,0}_{m,N}(x)\right]^2 dx. \tag{26}$$

Сформулируем основной результат этого пункта.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, $N \in \mathbb{Z}^+$ справедливы следующие утверждения.*

1) *$V_m(N)$ допускает представление*

$$V_m(N) = \sum_{j=0}^{N} \left[\frac{1}{m}\sigma_j^2 - c_j^2\right] + \left\|f\right\|^2_{L_2(\mathrm{K},\Lambda)}. \tag{27}$$

2) *Пусть $\left\|f\right\|_{L_2(\mathrm{K},\Lambda)} \geqslant \sigma_0^2$ и существует константа $C_{10} > 0$ такая, что $\sigma_0^2 \geqslant C_{10}$. Тогда справедливы неравенства*

$$0 < C_{10} \leqslant V_m(N) \leqslant \max\left(\left\|f\right\|^2_{L_2(\mathrm{K},\Lambda)}, \frac{\sigma^2}{m}\right). \tag{28}$$

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.1).

4.2. Из утверждения теоремы 4 вытекает простое следствие.

С л е д с т в и е 2. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *При каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ последовательность $\{V_m(N)\}_{N\in\mathbb{Z}^+}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{cases} V_m(N+1) = V_m(N) - c^2_{N+1} + \dfrac{1}{m}\sigma^2_{N+1} \\ V_m(N)\Big|_{N=0} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2, \end{cases} \tag{29}$$

решение которого имеет вид (22).

2) *При каждом* $N \in \mathbb{Z}^+$ *частичная последовательность* $\{V_m(N)\}_{m\in\mathbb{Z}^+\setminus 0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{cases} V_{m+1}(N) = V_m(N) - \dfrac{1}{(m+1)m}\displaystyle\sum_{j=0}^{N}\sigma_j^2 \\ V_m(N)\Big|_{m=1} = -\displaystyle\sum_{j=N+1}^{\infty}c_j^2 + \sum_{j=0}^{N}\sigma_j^2, \end{cases} \tag{30}$$

решение которого имеет вид (22).

Доказательство следствия 2 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.2).

Замечание 3. Из утверждения 2 следствия 2 и (27), следует, что для любого $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{m\to\infty} V_{m+1}(N) = \lim_{m\to\infty} V_m(N) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 \, .$$

Поэтому

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{m\to\infty} V_m(N) = 0 \, .$$

4.3. В этом пункте установим, что при каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ последовательность $\{V_m(N)\}_{N\in\mathbb{Z}^+}$ имеет единственный минимум.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда при каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ *существует единственное* $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ *такое, что*

$$\inf_{N\in\mathbb{Z}^+} V_m(N) = V_m(N^0(m)). \tag{31}$$

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.3).

Замечание 4. Из утверждения теоремы 5 следует:

а) для любого $N \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ имеет место неравенство

$$V_m(N) \geqslant V_m(N^0(m)); \tag{32}$$

б) для всех $s \in \mathbb{Z}^+$ таких, что $N^0(m) - s \geqslant 0$ и $N^0(m) + s \in \mathbb{Z}^+$ имеет место неравенство

$$V_m(N^0(m) - s) - 2V_m(N^0(m)) + V_m(N^0(m) + s) \geqslant 0. \tag{33}$$

4.4. В этом пункте будет описан конструктивный способ нахождения значения $N^0(m)$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ *допускает представление*

$$N^0(m) = \inf\left\{N \in \mathbb{Z}^+ \colon \sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} \geqslant \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2\right\}. \tag{34}$$

Доказательство теоремы 6 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.4).

4.5. В этом пункте, основываясь на теореме 6 установлены соотношения эквивалентности между СКО ПОЧ и $\sum\limits_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ *имеют место неравенства*

$$\sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \leqslant V_m(N^0(m)) \leqslant 2 \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}, \tag{35}$$

т.е.

$$V_m(N^0(m)) \asymp \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}. \tag{36}$$

Доказательство теоремы 7 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.5).

4.6. Из утверждения теоремы 7 вытекают важные утверждения.

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 7. Пусть выполняются условия:

(i) $\sup\limits_{j \in \overline{\mathbb{Z}}^+} \sigma_j^2 \leqslant C_{11}$,

(ii) *существует* $j_0 \in \{0, \ldots, N^0(m)\}$ *такое, что* $\sigma_{j_0}^2 \geqslant C_{12} > 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1)

$$C_{12} \frac{N^0(m)}{m} \leqslant V_m(N^0(m)) \leqslant C_{11} \frac{N^0(m)}{m}, \tag{37}$$

т.е. $V_m(N^0(m)) \asymp \frac{N^0(m)}{m}$;

2)

$$N^0(m) \asymp m. \tag{38}$$

Доказательство следствия 3 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.6).

5. Проекционные оценки Ченцова и их свойства

В разделе 4 было доказано, что для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \backslash 0$ СКО $V_m(N)$ проекционной оценки $\widehat{f}^{\,0}_{m,N}(x)$ имеет единственный минимум (теорема 5), который достигается в точке $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$. В нем также найден конструктивный способ нахождения $N^0(m)$ (теорема 6). Кроме того, в разделе 4 установлены соотношения эквивалентности (см. теорема 7, следствие 3) $V_m(N^0(m)) \asymp \sum\limits_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \asymp \frac{N^0(m)}{m} \asymp \text{const}$.

5.1. В этом пункте определим, что следует понимать под проекционной оценкой Ченцова (ПОЧ) неизвестной функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$.

Для этого обозначим

$$\widetilde{f}^{\,0}_m(x) \triangleq \widehat{f}^{\,0}_{m,N}(x)\Big|_{N=N^0(m)}. \tag{39}$$

Очевидно, что $\widetilde{f}^{\,0}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ и допускает, в силу (20), представление $\widetilde{\mathsf{P}}$-почти всюду

$$\widetilde{f}^{\,0}_m(x) = \sum_{j=0}^{N^0(m)} \widehat{c}^{\,0}_{j,m}\varphi_j(x), \tag{40}$$

где $\widehat{c}^{\,0}_{j,m} = \frac{1}{m}\sum\limits_{k=1}^{m} y_k^j$ — j-я компонента бесконечномерного вектора $\widehat{c}^{\,0}_m \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$, который является коэффициентом Фурье оптимальной оценки $\widehat{f}^{\,0}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$.

Определение 5. $\mathcal{F}^y_m \otimes \mathcal{B}(\mathrm{K})$-*измеримую функцию* $\widetilde{f}^{\,0}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ *будем называть* проекционной оценкой Ченцова (ПОЧ) *функции* $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$, *если она допускает представление* (40).

Из этого определения ПОЧ и (25) следует, что СКО ПОЧ от функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$, обозначаемое $V_m(N^0(m))$, имеет вид

$$V_m(N^0(m)) = \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \left[f(x) - \widetilde{f}^{\,0}_m(x)\right]^2 dx = \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}. \tag{41}$$

5.2. Из утверждения теоремы 7 следует оценка скорости сходимости ПОЧ к неизвестной функции $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$ когда $m \to \infty$. Действительно, из утверждения следствия 3, поскольку $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$, имеем

$$V_m(N^0(m)) \asymp m^{-1}. \tag{42}$$

Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7 и следствия 3. Тогда

$$\big\|f-\widetilde{f}_m^{\,0}\big\|_{\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})}=O(m^{-\frac{1}{2}}). \tag{43}$$

5.3. В этом пункте будут установлены статистические свойства ПОЧ (40).

Теорема 9. ПОЧ (40) *обладает следующими свойствами:*

1) *для любого $m\in\mathbb{Z}^+\setminus 0$ оценка* (40) *— смещенная;*

2) *если выполнены условия теоремы 5, то СКО ПОЧ удовлетворяет неравенству*

$$V_m(N^0(m))\leqslant V_m(\infty); \tag{44}$$

3) *оценка* (40) *асимптотически несмещенная, т.е. для почти всех $x\in\mathrm{K}$*

$$\lim_{m\to\infty}\mathsf{E}\widetilde{f}_m^{\,0}(x)=f(x); \tag{45}$$

4) *если для любого $x\in\mathrm{K}$ $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\sigma_j^2\varphi_j^2(x)<\infty$ и $\big|\sum\limits_{j=0}^{\infty}c_j\varphi_j(x)\big|<\infty$, то*

$$\widetilde{f}_m^{\,0}(x)\xrightarrow[m\to\infty]{\mathsf{P}}f(x).$$

Доказательство теоремы 9 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.7).

5.4. В этом пункте мы установим условия независимости СКО ПОЧ от оцениваемой функции $f(x)\in L_2(\mathrm{K},\Lambda)$.

Теорема 10. Пусть выполнены условия теорем 5, 6. Тогда имеем неравенство

$$\begin{aligned}&\sup_{f(x)\in L_2(\mathrm{K},\Lambda)}\ \inf_{N\in\mathbb{Z}^+}\ \sup_{f_{m,N}(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})}\mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}}\big[f(x)-f_{m,N}(x)\big]^2dx\leqslant\\ &\leqslant 2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma_j^2}{m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0.\end{aligned} \tag{46}$$

Доказательство теоремы 10 приведено в Приложении 2 (см. пункт П.2.8).

5.5. В этом пункте мы приводим пример задачи СВ, который позволит описать ее решение явно. Из утверждений теорем 8, 9 и явного вида ПОЧ следует, что решение задачи оптимального СВ сводится к нахождению явного вида $N^0(m)$. Поэтому содержание приводимого примера посвящено нахождению значения $N^0(m)$.

Пример. Предположим, что элементы последовательностей $\{c_j^2\}_{j\geqslant 0}$ и $\{\sigma_j^2\}_{j\geqslant 0}$ допускают представления

1) $\sigma_j^2=\sigma_0^2q_1^j$,

2) $c_j^2=c_0^2q_2^j$,

где $\sigma_0^2 > 0$ и $c_0^2 > 0$, а $q_i \in (0,1)$, $i = 1,2$, $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$. В силу теорем 5, 6 существует $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ такое, что $\inf\limits_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} V_m(N) = V_m(N^0)$, причем для любого $N \geqslant N^0(m)$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} \geqslant \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2,$$

которое с учетом предположений 1) и 2) допускает представление

$$\frac{\sigma_0^2}{m} \sum_{j=0}^{N} q_1^j \geqslant c_0^2 \sum_{j=N+1}^{\infty} q_2^j.$$

Стало быть, в силу теоремы 5, при $N = N^0(m)$ имеет место равенство

$$\frac{\sigma_0^2}{m} \frac{1}{1-q_1} = \frac{c_0^2 q_2^{N^0(m)+1}}{1-q_2} + \frac{\sigma_0^2}{m} \frac{q_1^{N^0(m)+1}}{1-q_1}. \tag{47}$$

Ниже рассмотрим два частных случая, когда $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$ может быть найдено явно.

Для формулировки результатов обозначим, если $a \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, то $\lfloor a \rfloor$ — это целая часть числа a.

Случай 1. Пусть $q_1 = q_2$. Тогда из (47) следует, что если $\frac{\sigma_0^2}{c_0^2 m + \sigma_0^2} > q_1$, то

$$N^0(m) = \left\lfloor \frac{\ln \frac{\sigma_0^2}{c_0^2 m + \sigma_0^2}}{\ln q_1} \right\rfloor.$$

Случай 2. Пусть $q_2 = (q_1)^2$. Тогда из (47) следует, что

$$\frac{\sigma_0^2}{m} = \frac{c_0^2 q_1^{2(N^0(m)+1)}}{1+q_1} + \frac{\sigma_0^2}{m} q_1^{N^0(m)+1}. \tag{48}$$

(48) это квадратное уравнение относительно $q_1^{N^0(m)+1}$. Если выполнено условие

$$\frac{\sigma_0^2(1+q_1)}{2mc_0^2 q_1}\left[\sqrt{1 + \frac{4mc_0^2}{\sigma_0^2(1+q_1)}} - 1\right] > 1,$$

то $N^0(m)$ имеет вид

$$N^0(m) = \left\lfloor \frac{\ln \frac{\sigma_0^2(1+q_1)}{2mc_0^2}\left[\left(1 + \frac{4mc_0^2}{\sigma_0^2(1+q_1)}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}{\ln q_1} \right\rfloor.$$

П.1.1. Сначала установим утверждение предложения 2. Пусть $f(x) \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$, а $\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ — некоторая проекционная оценка. Поскольку система $\{\varphi_j(x)\}_{j \geqslant 0}$ — полная ортонормированная, то из (1), (13) и теоремы Фубини для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ следуют равенства

$$\mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - \widehat{f}_m(x)\big]^2 dx = \mathsf{E} \sum_{j=0}^{\infty} \big[c_j - \widehat{c}_{j,m}\big]^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\big[c_j - \widehat{c}_{j,m}\big]^2.$$

Отсюда, в силу предложения 1, имеем

$$\text{(П.1.1)} \qquad \inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - \widehat{f}_m(x)\big]^2 dx = \inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})} \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\big[c_j - \widehat{c}_{j,m}\big]^2.$$

Поскольку $\widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})$ — множество $\mathcal{F}_m^{y^j}$-измеримых квадратично интегрируемых случайных величин. Из (П.1.1) следует неравенство

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - \widehat{f}_m(x)\big]^2 dx \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} \inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\big[c_j - \widehat{c}_{j,m}\big]^2.$$

Отсюда следует, что оценка $\widehat{c}^{\,0}_{j,m}$ является оптимальной тогда и только тогда, когда

$$\inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E}\big[c_j - \widehat{c}_{j,m}\big]^2 = \mathsf{E}\big[c_j - \widehat{c}^{\,0}_{j,m}\big]^2.$$

Таким образом, если существует $\widehat{c}^{\,0}_{j,m}$, то имеем неравенство

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - \widehat{f}_m(x)\big]^2 dx \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\big[c_j - \widehat{c}^{\,0}_{j,m}\big]^2.$$

В силу (П.1.1) и последнего неравенства, имеем

$$\inf_{\widehat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - \widehat{f}_m(x)\big]^2 dx \geqslant \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\big[c_j - \widehat{c}^{\,0}_{j,m}\big]^2 =$$

$$= \inf_{\widehat{c}_{j,m} \in \widetilde{\mathbb{M}}_{2,m}(\mathsf{P})} \mathsf{E} \sum_{j=0}^{\infty} \big[c_j - \widehat{c}_{j,m}\big]^2 = \mathsf{E} \int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - \widehat{f}^{\,0}_m(x)\big]^2 dx,$$

где $\widehat{f}^{\,0}_m(x) \triangleq \sum\limits_{j=0}^{\infty} \widehat{c}^{\,0}_{j,m} \varphi_j(x)$. Доказательство закончено.

П.1.2. *Доказательство утверждения теоремы 1.* Из утверждения предложения 2 следует, что существует оптимальная проекционная оценка $\widehat{f}_m^{\,0}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ тогда и только тогда, когда выполнено (19). Поэтому имеем

$$\inf_{\widehat{f}_m(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x)-\widehat{f}_m(x)\big]^2 dx = \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x)-\widehat{f}_m^{\,0}(x)\big]^2 dx.$$

Основным содержанием утверждения теоремы 1 является доказательство равенств (20)—(22).

Поэтому рассмотрим $\mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x)-\widehat{f}_m^{\,0}(x)\big]^2 dx$. Из утверждения предложения 2 (см. формулы (П.1.1) и (25)), имеем

$$\mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x)-\widehat{f}_m^{\,0}(x)\big]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\big|c_j-\widehat{c}_{j,m}^{\,0}\big|^2. \tag{П.1.2}$$

Отсюда следует, что для каждого $j \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ требуется по результатам наблюдений $(y_1^j,\dots,y_m^j)$ построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку коэффициента Фурье c_j. Заметим, что в силу (7) распределение случайной величины y_m^j является гауссовским, т.е. $\mathrm{Law}(y_m^j)=\mathcal{N}(c_j,\sigma_j^2)$. Известно [1, 2], что в данном случае оптимальная оценка коэффициента Фурье c_j, по результатам наблюдений с ошибками $(y_1^j,\dots,y_m^j)$, обозначаемая $\widehat{c}_{j,m}^{\,0}$, совпадает с оценкой максимального правдоподобия. Следовательно, $\widehat{c}_{j,m}^{\,0}$ имеет вид (19). Умножим левую и правую часть (19) на $\varphi_j(x)$, а затем выполним суммирование по всем j, в результате получим (18).

Теперь найдем значение $\mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x)-\widehat{f}_m^{\,0}(x)\big]^2 dx$, в силу (П.1.2), (7), (19) и предложения 1 имеем

$$\mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x)-\widehat{f}_m^{\,0}(x)\big]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\big|\widehat{c}_{j,m}^{\,0}-c_j\big|^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j - c_j\right|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n_k^j\right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Доказательство закончено.

П.1.3. *Доказательство утверждения следствия 1.* Из (20)—(22), и теоремы Фубини вытекает (23), поскольку

$$\widehat{f}_m^{\,0}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^{\,0}\varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j\varphi_j(x) =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} y_k^j\varphi_j(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k(x).$$

Доказательство закончено.

П.1.4. *Доказательство утверждения теоремы 2.* Из (7), (20) и (21) для любых $x \in \mathrm{K}$ и $m \in \mathbb{Z}^{+} \setminus 0$, в силу теоремы Фубини, имеем

$$\mathsf{E}\widehat{f}_m^{\,0}(x) = \mathsf{E}\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{c}_{j,m}^{\,0}\varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)\mathsf{E}\widehat{c}_{j,m}^{\,0} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)\frac{1}{m}\mathsf{E}\sum_{k=1}^{m} y_k^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \left(c_j + \mathsf{E}n_k^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x)c_j = f(x).$$

Доказательство закончено.

П.1.5. *Доказательство утверждения теоремы 3.* Нам надо установить, что для почти всех $x \in \mathrm{K}$

$$\widehat{f}_m^{\,0}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{\mathsf{P}} f(x).$$

Достаточно доказать, что дисперсия оценки $\widehat{f}_m^{\,0}(x)$ стремится к нулю, когда $m \to \infty$.

Для каждого $x \in \mathrm{K}$ вычислим дисперсию оценки $\widehat{f}_m^{\,0}(x)$, обозначаемую $\mathsf{D}\widehat{f}_m^{\,0}(x)$. Из (20), (7) и (21), в силу теоремы Фубини, имеем

$$\mathsf{D}\widehat{f}_m^{\,0}(x) = \mathsf{E}\big[\widehat{f}_m^{\,0}(x) - f(x)\big]^2 = \mathsf{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \big(\widehat{c}_{j,m} - c_j\big)\varphi_j(x)\right]^2 =$$

$$= \mathsf{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} y_k^j - c_j\Big)\varphi_j(x)\right]^2 = \mathsf{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} n_k^j\varphi_j(x)\right]^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x)\sigma_j^2.$$

Так как ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x)\sigma_j^2$ для почти всех $x \in \mathrm{K}$ сходится, то из последнего равенства следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

П.2.1. *Доказательство первого утверждения теоремы 4.* Из определения $V_m(N)$ следуют равенства

$$V_m(N) = \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - f_N(x) + f_N(x) - \widehat{f}_{m,N}^{\,0}(x)\big]^2 dx =$$

$$= \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j\varphi_j(x) - \sum_{j=0}^{N} c_j\varphi_j(x) + \sum_{j=0}^{N} c_j\varphi_j(x) - \sum_{j=0}^{N} \widehat{c}_{j,m}^{\,0}\varphi_j(x)\right]^2 dx =$$

$$= \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \left[\sum_{j=N+1}^{\infty} c_j\varphi_j(x) + \sum_{j=0}^{N} \big(c_j - \widehat{c}_{j,m}^{\,0}\big)\varphi_j(x)\right]^2 dx.$$

Отсюда следует, что для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$, $N \in \mathbb{Z}^+$ СКО $V_m(N)$ имеет вид

$$V_m(N) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \mathsf{E} \sum_{j=0}^{N} \left(c_j - \widehat{c}_{j,m}^{\,0}\right)^2. \tag{П.2.1}$$

Так как $\widehat{c}_{j,m}^{\,0} = \frac{1}{m} \sum\limits_{k=1}^{m} y_k^j$, то в силу (7) имеем

$$\widehat{c}_{j,m}^{\,0} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(c_j + n_k^j\right) = c_j + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} n_k^j. \tag{П.2.2}$$

Поэтому (П.2.1) с учетом (П.2.2) и условий (n_i), $i = \overline{1,3}$, в силу теоремы Фубини, имеет вид (23). Действительно

$$\begin{aligned} V_m(N) &= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \mathsf{E} \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} n_k^j \right)^2 = \\ &= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{m^2} \mathsf{E} \sum_{k=1}^{m} n_k^j \sum_{k'=1}^{m} n_{k'}^j = \\ &= \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{N} \sigma_j^2. \end{aligned} \tag{П.2.3}$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы.

Установим второе утверждение теоремы 4. Из первого утверждения теоремы следует, что для любого $N \in \mathbb{Z}^+$ СКО оценки $\widehat{f}_{m,N}^{\,0}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ $V_m(N)$ имеет вид (П.2.3).

Для $V_m(N)$ требуется установить для каждого m оценку снизу. Ясно, что $V_m(N)$ состоит из двух слагаемых, причем первое является монотонно убывающей последовательностью, а второе слагаемое — это монотонно возрастающая последовательность. Поэтому, в силу условий, имеет место выкладка

$$\begin{aligned} \inf_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} V_m(N) &= \inf_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma_i^2}{m} \right) = \\ = \max \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2, \lim_{N \to 0} \sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma_i^2}{m} \right) &= \max \left(0, \frac{\sigma_0^2}{m} \right) \geqslant C_{10} > 0. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

П.2.2. Доказательство утверждения следствия 2. Из утверждения теоремы 4 (см. формулу (27)) очевидным образом следует утверждение следствия.

П.2.3. *Доказательство утверждения теоремы 5.* В силу теоремы 4 $V_m(N)$ допускает представление (23), из которого следует, что оно состоит из двух слагаемых:

— первое из них — это ряд $\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} c_j^2$, который сходится, поскольку сходится ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j^2 = \|f\|^2_{L_2(\mathrm{K},\Lambda)} < \infty$. Очевидно, что последовательность $\left\{\sum\limits_{j=N}^{\infty} c_j^2\right\}_{N\geqslant 0}$ (при возрастании N) является невозрастающей, т.е. $\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 \leqslant \sum\limits_{j=N}^{\infty} c_j^2$, поэтому

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=N}^{\infty} c_j^2 = 0\,;$$

— второе слагаемое — это сходящаяся неубывающая последовательность $\left\{\sum\limits_{j=0}^{N} \sigma_j^2\right\}_{N\geqslant 0}$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 = \sigma^2 < \infty\right)$. Поэтому при каждом $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ определены множества

$$A_m^1 \triangleq \left\{ j \in \overline{\mathbb{Z}}^+ : \frac{\sigma_j^2}{m} - c_j^2 \geqslant 0 \right\} \neq \varnothing,$$

$$A_m^2 \triangleq \left\{ j \in \overline{\mathbb{Z}}^+ : \frac{\sigma_j^2}{m} - c_j^2 \leqslant 0 \right\} \neq \varnothing.$$

Следовательно, если $N \in A_m^1$ $(N \in A_m^2)$, то в силу следствия 2 имеем неравенство

$$V_m(N+1) \geqslant V_m(N),$$
$$(V_m(N-1) \geqslant V_m(N)).$$

Очевидно, что $A_m^1 \cap A_m^2 \neq \varnothing$. Поэтому существует такое $N^0(m) \in \mathbb{Z}^+$, что $A_m^1 \cap A_m^2 = \{N^0(m)\}$. Отсюда следует (31). Доказательство закончено.

П.2.4. *Доказательство утверждения теоремы 6.* Из доказательства теоремы 3 следует, что для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и $N \in \overline{\mathbb{Z}}^+$ СКО оценки $\widehat{f}^{\,0}_{m,N}(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})$ имеет вид (П.2.3). Из утверждения теоремы 5 следует, что существует функция $N^0 \colon (\mathbb{Z}^+ \setminus 0) \to \mathbb{Z}^+$ обозначаемая $N^0(m)$ такая, что для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и любого $N \in \mathbb{Z}^+$ имеет место неравенство

$$V_m(N) \geqslant V_m(N^0(m)).$$

Обозначим

$$\mathbf{1}_{\left\{N\geqslant N^0(m)\right\}} \triangleq \begin{cases} 1, & N \geqslant N^0(m) \\ 0, & N < N^0(m). \end{cases} \tag{П.2.4}$$

Из доказательства теоремы 5 также следует, что $N \geqslant N^0(m)$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} \geqslant \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} c_j^2$. Поэтому имеем

$$\mathbf{1}_{\left\{N \geqslant N^0(m)\right\}} = \mathbf{1}_{\left\{N \in \mathbb{Z}^+ :\ \sum\limits_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} \geqslant \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} c_j^2\right\}}.$$

Обозначим

$$\ell_m(N) \triangleq \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} - \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2\right) \mathbf{1}_{\left\{N \in \mathbb{Z}^+ :\ \sum\limits_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} \geqslant \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} c_j^2\right\}}. \tag{П.2.5}$$

Очевидно, что для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и любого $N \in \mathbb{Z}^+$

$$\ell_m(N) \geqslant 0. \tag{П.2.6}$$

Из (П.2.5) и (П.2.6) следует, что $\ell_m(N)$ допускает представление

$$\ell_m(N) = \max\left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\sigma_j^2}{m} - \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2, 0\right). \tag{П.2.7}$$

Из графиков функций $V_m(N)$ и $\ell_m(N)$ для каждого $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и любого $N \in \mathbb{Z}^+$ следуют:

(i) неравенство

$$V_m(N) \geqslant \ell_m(N), \tag{П.2.8}$$

(ii)

$$N^0(m) = \operatorname*{argmin}_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} V_m(N) = \operatorname*{argmin}_{N \in \overline{\mathbb{Z}}^+} \ell_m(N). \tag{П.2.9}$$

Из (П.2.7) и (П.2.9) следует утверждение теоремы 6. Доказательство закончено.

П.2.5. *Доказательство утверждения теоремы 7.* Сначала заметим, что из теоремы 4, следствия 2 и (41) следует, что $V_m(N^0(m))$ допускает представление

$$V_m(N^0(m)) = V_m(N)\Big|_{N=N^0(m)} = \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2 + \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}. \tag{П.2.10}$$

Из (П.2.10) следует неравенство

$$V_m(N^0(m)) \geqslant \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}, \tag{П.2.11}$$

которое дает оценку снизу величины $V_m(N^0(m))$.

Из утверждения теоремы 6 следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}^+ \backslash 0$ имеет место неравенство

$$\sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \geqslant \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2. \tag{П.2.12}$$

Поэтому из (П.2.10) и (П.2.12) следует неравенство

$$V_m(N^0(m)) \leqslant 2 \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}. \tag{П.2.13}$$

Из (П.2.11) и (П.2.13) следует утверждение теоремы 7,

$$V_m(N^0(m)) \asymp \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Доказательство закончено.

П.2.6. Утверждение следствия 3 очевидным образом следует из условий i) и ii) следствия и доказательства теоремы 7.

П.2.7. *Доказательство утверждений теоремы 9.*

1) Из (40) следует, что

$$\widetilde{f}_m^0(x) = \sum_{j=0}^{N^0(m)} \left[c_j \varphi_j(x) + \sum_{k=1}^{m} n_k^j \varphi_j(x) \right]^2 = f_{N^0(m)}(x) + \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} n_k^j \varphi_j(x).$$

Возьмем математическое ожидание относительно левой и правой частей последнего равенства, имеем

$$\mathsf{E}\widetilde{f}_m^0(x) = f_{N^0(m)}(x) + \mathsf{E} \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} n_k^j \varphi_j(x) = f_{N^0(m)}(x) \neq f(x). \tag{П.2.14}$$

Отсюда следует смещенность оценки (40).

2) Для доказательства второго утверждения теоремы надо установить неравенство (44). В силу теоремы 4, для любого $N \geqslant N^0(m)$ имеем неравенство

$$V_m(N^0(m)) \leqslant V_m(N).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ в последнем неравенстве имеем

$$V_m(N^0(m)) \leqslant \lim_{N \to \infty} V_m(N) = V_m(\infty).$$

3) Теперь установим третье утверждение теоремы 9. Для этого рассмотрим (40). Переходя к пределу в нем, когда $m \to \infty$, имеем для почти всех $x \in \mathrm{K}$

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{E}\, \widetilde{f}^{\,0}_m(x) = \lim_{m\to\infty} f_{N^0(m)}(x).$$

В силу пункта ii) следствия 3 $N^0(m) \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$. Поэтому

$$\lim_{m\to\infty} f_{N^0(m)}(x) = f(x).$$

Стало быть, оценка (40) — асимптотически несмещенная.

4) Докажем теперь свойство состоятельности оценки (40). В силу неравенства Чебышёва имеем для любых $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\text{(П.2.15)} \qquad \mathsf{P}\Big(\big|\widetilde{f}^{\,0}_m(x) - f(x)\big|^2 \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathsf{E}\big|\widetilde{f}^{\,0}_m(x) - f(x)\big|^2.$$

Рассмотрим правую часть неравенства (43). Из (40) следует, что

$$\widetilde{f}^{\,0}_m(x) - f(x) = -\sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j\varphi_j(x) + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{N^0(m)}\sum_{k=1}^{m} n^j_k\varphi_j(x).$$

Поэтому $\mathsf{E}\big|\widetilde{f}^{\,0}_m(x) - f(x)\big|^2$ допускает представление

$$\text{(П.2.16)} \qquad \begin{aligned} &\mathsf{E}\big|\widetilde{f}^{\,0}_m(x) - f(x)\big|^2 = \\ &= \mathsf{E}\left|-\sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j\varphi_j(x) + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{N^0(m)}\sum_{k=1}^{m} n^j_k\varphi_j(x)\right|^2 = \\ &= \left|\sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j\varphi_j(x)\right|^2 + \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{N^0(m)} \sigma_j^2\varphi_j^2(x). \end{aligned}$$

Из следствия 3 и условий теоремы следует, что ряды $\left|\sum\limits_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j\varphi_j(x)\right|$, $\sum\limits_{j=0}^{N^0(m)} \sigma_j^2\varphi_j^2(x)$ для почти всех $x \in \mathrm{K}$ сходятся, поэтому имеем

$$\left|\sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j\varphi_j(x)\right|^2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{N^0(m)} \sigma_j^2\varphi_j^2(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{P}\Big(\big|\widetilde{f}_m^{\,0}(x) - f(x)\big|^2 \geqslant \varepsilon\Big) = 0.$$

Теорема доказана полностью.

П.2.8. *Доказательство утверждения теоремы 10.* Из доказательства теоремы 7 следует, что СКО ПОЧ удовлетворяет неравенствам

$$2\sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \geqslant V_m(N^0(m)) \geqslant \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m}.$$

Заметим, что из теоремы 4, следствия 2, теорем 5, 6 имеем неравенство

$$V_m(N^0(m)) = \inf_{N\in\mathbb{Z}^+} \inf_{f_{m,N}(x)\in\mathbb{M}_{2,m}(\widetilde{\mathsf{P}})} \mathsf{E}\int\limits_{\mathrm{K}} \big[f(x) - f_{N,m}(x)\big]^2 dx = \tag{П.2.17}$$

$$= \sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} + \sum_{j=N^0(m)+1}^{\infty} c_j^2 \leqslant 2\sum_{j=0}^{N^0(m)} \frac{\sigma_j^2}{m} \leqslant 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{m} = \frac{2\sigma^2}{m}.$$

Поскольку правая часть неравенства (П.2.17) не зависит от $f(x) \in \in L_2(\mathrm{K}, \Lambda)$, то из него следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997.
2. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
3. *Parzen E.* On Estimation of a Probability Density Function and Mode // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. No. 3. P. 1065–1076. https://doi.org/10.1214/aoms/1177704472
4. *Rosenblatt M.* Curve Estimates // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. No. 6. P. 1815–1842. https://doi.org/10.1214/aoms/1177693050
5. *Murthy V.K.* Nonparametric estimation of multivariate densities with applications // Multivariate Analysis. 1966. P. 43–56.
6. *Стратонович Р.Л.* Эффективность методов математической статистики в задачах синтеза алгоритмов восстановления неизвестной функции // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 1. С. 32–46.
7. *Watson G.S.* Density Estimation by Orthogonal Series // Ann. Math. Statist. 1969. V. 40. No. 4. P. 1496–1498. https://doi.org/10.1214/aoms/1177697523
8. *Конаков В.Д.* Непараметрическая оценка плотности распределения вероятностей // Теория вероятн. и ее примен. 1972. Т. 17, № 2. С. 377–379.

   Konakov V.D. Non-Parametric Estimation of Density Functions // Theory of Probability & Its Applications. 1973. V. 17 (2). P. 361–362. https://doi.org/10.1137/1117042

9. *Ченцов Н.Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972.

10. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.

11. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Ассимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.

12. *Надарая Э.А.* Непараметрическое оценивание плотностей вероятностей и кривой регрессии. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1983.

13. *Немировский А.С., Поляк Б.Т., Цыбаков А.Б.* Обработка сигналов непараметрическим методом максимума правдоподобия // Пробл. передачи информ. 1984. Т. 20. № 3. С. 29–46.

    Nemirovskij A.S., Polyak B.T., Tsybakov A.B. Signal processing by the nonparametric maximum-likelihood method // Problems of Information Transmission. 1984. V. 20 (3). P. 177–192.

14. *Дарховский Б.С.* О стохастической задаче восстановления // Теория вероятн. и ее примен. 1998. Т. 43. № 2. С. 357–364.

    Darkhovskii B.S. On a Stochastic Renewal Problem // Theory of Probability & Its Applications. 1999. V. 43 (2). P. 282–288. https://doi.org/10.1137/S0040585X9797688X

15. *Дарховский Б.С.* Стохастическая задача восстановления функционалов // Пробл. передачи информ. 2008. Т. 44. № 4. С. 20–32.

    Darkhovsky B.S. Stochastic recovery problem // Problems of Information Transmission. 2008. V. 44 (4). P. 303–314. https://doi.org/10.1134/S0032946008040030

16. *Ибрагимов И.А.* Об оценке многомерной регрессии // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. № 2. С. 301–320.

    Ibragimov I.A. Estimation of multivariate regression // Theory of Probability & Its Applications. 2004. V. 48 (2). P. 256–272. https://doi.org/10.1137/S0040585X9780385

17. *Tsybakov A.B.* Introduction to Nonparametric Estimation. N.Y.: Springer, 2009.

18. *Булгаков С.А., Хаметов В.М.* Восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с гауссовскими ошибками // УБС. 2015. Т. 54. С. 45–65.

19. *Levit B.* On Optimal Cardinal Interpolation // Mathematical Methods of Statistics. 2018. V. 27. No. 4. P. 245–267. https://doi.org/10.3103/S1066530718040014

20. *Юдицкий А.Б., Немировский А.С.* Восстановление сигналов с помощью стохастической оптимизации // АиТ. 2019. № 10. С. 153–172.

    Juditsky A.B., Nemirovski A.S. Signal recovery by stochastic optimization // Autom. Remote Control. 2019. V. 80 (10). P. 1878–1893. https://doi.org/10.1134/S0005231019100088

21. *Голубев Г.К.* Об адаптивном оценивании линейных функционалов по наблюдениям в белом шуме // Пробл. передачи информ. 2020. Т. 56. № 2. С. 95–111.

    Golubev G.K. On adaptive estimation of linear functionals from observations against white noise // Problems of Information Transmission. 2020. V. 56 (2). P. 185–200. https://doi.org/10.31857/S0555292320020047

22. *Булгаков С.А.,* $\boxed{\text{*Горшкова В.М.*}}$, *Хаметов В.М.* Стохастическое восстановление квадратично интегрируемых функций // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2020. № 6. С. 4–22. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-4-22
23. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
24. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 4е, перераб. изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.
25. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.
26. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.

Поступила в редакцию 09.11.2020

После доработки 09.08.2022

Принята к публикации 29.09.2022