Управление в социально-экономических системах

Г.А. УГОЛЬНИЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук (ougoln@mail.ru),
А.Б. УСОВ, д-р техн. наук (abusov@sfedu.ru)
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ СПОСОБОВ ОРГАНИЗАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ В МОДЕЛЯХ ДУОПОЛИИ КУРНО С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ

Проводится сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов (информационных структур) на примере статической и динамической моделей дуополии Курно. Сравниваются независимое поведение равноправных игроков, их кооперация и отношения иерархии, формализуемые как игры Гермейера. Для количественной оценки эффективности с точки зрения отдельных игроков и общества в целом используются индивидуальные и коллективные индексы относительной эффективности. Исследуются условия экологической безопасности системы. Предложена организационно-экономическая интерпретация результатов.

Ключевые слова: дуополия Курно, игры Гермейера, индексы относительной эффективности, кооперативное решение, экологическая безопасность.

DOI: 10.31857/S0005231023020083, **EDN:** OOEOCX

1. Введение

К числу основных способов организации взаимодействия экономических агентов можно отнести независимое поведение, кооперацию и отношения иерархии. Коллективный исход рационального поведения независимых игроков может оказаться хуже исхода, полученного при централизованном управлении или добровольной кооперации. Для ответа на вопрос “насколько хуже” вводится специальная функция выигрыша, которая позволяет количественно измерить (не)эффективность равновесий. Обычно подобные меры определяются как отношение между значениями функции выигрыша в некотором равновесии и при коллективно оптимальном исходе. (Не)эффективность равновесий активно изучается в таких областях, как построение игр на сетях, игры составления расписаний и распределения ресурсов и т.д. [1–5].

Важно отметить, что указанные индексы отражают интересы общества (экономики) в целом. С этой точки зрения кооперация всегда выгодна, и индексы оценивают только потери от эгоистичного поведения (хотя иерархическое управление может оказаться не менее выгодным, чем кооперация).

Однако выигрыш отдельного игрока в роли ведущего или при независимом поведении может оказаться больше, чем его доля в распределении суммарного выигрыша при кооперации. Поэтому представляется чрезвычайно важным исследование условий выгодности кооперации с позиций не только общественного благосостояния, но и интересов отдельных экономических агентов.

Концепция жизнеспособности (viability) предложена Ж.П. Обеном [6] и развита в [7, 8]. Идея здесь состоит в том, что вектор состояния управляемой динамической системы должен принадлежать заданной области пространства состояний, что отражает, например, требования экологического равновесия. Для статических моделей условия жизнеспособности учитываются как дополнительные ограничения.

Удобной моделью для иллюстрации понятия (не)эффективности равновесий и анализа условий жизнеспособности представляется дуополия Курно. В этом случае под жизнеспособностью понимается экологическая безопасность. В статической модели предполагается полная информация игроков, благодаря которой они за один шаг приходят к равновесию Нэша [9]. Детальный анализ динамической олигополии Курно проведен в [10]. В [11] рассматривается ограниченная рациональность игроков и выводятся условия локальной устойчивости равновесий Нэша как результата процедуры нащупывания по Курно в дискретной динамической модели.

Модели олигополии Курно изучаются в сериях работ [12–19]. В первой серии М.И. Гераськин использует аппарат предположительных вариаций, а также рефлексивных игр. Изучаются равновесия Нэша и Штакельберга, приведены приложения к российскому рынку телекоммуникаций. Во второй серии Г.И. Алгазин и соавт. также синтезируют подходы классической теории игр, теории коллективного поведения и концепции рефлексивных игр применительно к моделям олигополии Курно. В названных работах используются индексы относительной эффективности.

В настоящей статье рассматриваются модели дуополии Курно в непрерывном времени, непосредственно обобщающие базовую статическую модель. Взаимодействие игроков учитывается через их переменные состояния (объемы выпусков), управляющие переменные (переменные издержки) задаются как кусочно-непрерывные программные стратегии. Для исследования этих моделей используются стандартные методы [20, 21] и авторские численные алгоритмы [22–24].

Конечно, дуополия Курно — только частный пример. В целом речь идет о системах взаимодействия активных (экономических и иных) агентов, описываемых моделью игры в нормальной форме [9]. В статической постановке эта модель имеет вид

$$g_i(u_1, \dots, u_n) \to \max, \quad u_i \in U_i, \quad i \in N.$$

Здесь $N = \{1, \dots, n\}$ — конечное множество активных агентов (игроков); U_i — множество допустимых действий игрока $i \in N$; u_i — конкретное действие игрока $i \in N$; $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U = U_1 \times \ldots \times U_n$ — исход игры; $u_{-i} = (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n)$; $g_i : U \to R$ — функция выигрыша игрока $i \in N$. При независимом эгоистичном поведении равноправных игроков решением игры считается множество равновесий Нэша

$$NE = \Big\{ u^{NE} \in U : \ \forall i \in N \ \forall u_i \in U_i \ g_i\big(u^{NE}\big) \geq g_i\big(u_i, u_{-i}^{NE}\big) \Big\}.$$

Под кооперацией в приведенной модели понимается совместная максимизация всеми игроками суммарного выигрыша (утилитаристской функции общественного благосостояния) $g(u) = \sum_{i \in N} g_i(u)$. Другая интерпретация этого способа поведения — введение централизованного управляющего (social planner), который максимизирует $g(u)$ по всем u_i. Таким образом, при переходе к кооперации теоретико-игровая модель становится задачей оптимизации.

При наличии иерархии имеющий преимущество первого хода ведущий игрок может сообщить ведомому (или нескольким ведомым) свое действие или постоянную стратегию (игра Гермейера Γ_1), либо стратегию с обратной связью по управлению ведомого (игра Гермейера Γ_2) [25]. В англоязычной литературе при исследовании олигополии Курно используются соответствующие термины "игра Штакельберга" и "обратная игра Штакельберга", а решение игры Γ_1 называется равновесием Штакельберга. В динамической постановке с точки зрения сравнительного анализа эффективности ничего принципиально не меняется.

Ограничения предлагаемого подхода состоят в следующем.

1. Пока рассматриваются только детерминированные модели. При наличии внешней неопределенности ситуация усложняется, это предмет последующего анализа.

2. Анализ оптимального соотношения централизации и децентрализации (Ф.И. Ерешко) в связи с проблемой неопределенности также пока не проводится.

3. Конечно, приведенные теоретико-игровые модели и информационные структуры не исчерпывают возможного разнообразия способов организации активных агентов и методов управления ими. Например, иерархическое управление может описываться не только играми Γ_1 и Γ_2, но и игрой Γ_3. Можно рассматривать игры с агрегированной информацией (В.С. Алиев и А.Ф. Кононенко), занимающие промежуточное положение между играми Γ_1 и Γ_2. Иерархическое принятие решений допускает описание играми в развернутой форме и т.д. Однако все же принципиально различные способы взаимодействия — это равноправие, кооперация и иерархия, остальное — скорее детали.

Вклад настоящей статьи:

— построены и исследованы оригинальные динамические модели дуополии Курно для различных информационных структур;

— предложена целостная система коллективных и индивидуальных индексов относительной эффективности способов организации экономических агентов;

— на основе предложенной системы индексов проведен сравнительный анализ эффективности способов организации агентов на примере моделей дуополии Курно с учетом условий экологической безопасности.

2. Статическая модель дуополии Курно

Рассмотрим модель дуополии Курно в следующем виде:

$$g_1(u_1, u_2) = (1/2 - u_1 - u_2)u_1 \to \max, \quad 0 \le u_1 \le 1/2; \tag{1}$$

$$g_2(u_1, u_2) = (1/2 - u_1 - u_2)u_2 \to \max, \quad 0 \le u_2 \le 1/2. \tag{2}$$

Здесь u_i — объем выпуска товара фирмой i; g_i — ее прибыль; для простоты разность между ценой закрытия рынка и переменными затратами взята равной $1/2$, постоянные затраты равны нулю, а наклон линии спроса равен единице; значения выпусков обеих фирм принадлежат отрезку $[0, 1/2]$.

Таблица 1 устроена следующим образом. Столбцы соответствуют различным принципам оптимальности в модели (1)–(2): равновесию Нэша в игре в нормальной форме равноправных независимых агентов (NE); равному дележу при кооперативном поведении игроков (C); играм Гермейера Γ_1 (ST) и Γ_2 (IST) при ведущем первом игроке. В первой строке приведены оптимальные согласно некоторому принципу исходы игры, во второй — соответствующие выигрыши игроков, в третьей — значения суммарного выигрыша обоих игроков. Доказательства приведены в Приложении.

Таблица 1. Выигрыши игроков в дуополии Курно

	NE	C	ST	IST
(u_1, u_2)	$(1/6, 1/6)$	$(1/8, 1/8)$	$(1/4, 1/8)$	$(1/4, 0)$
(g_1, g_2)	$(1/36, 1/36)$	$(1/32, 1/32)$	$(1/32, 1/64)$	$(1/16, 0)$
$g = g_1 + g_2$	$1/18$	$1/16$	$3/64$	$1/16$

Для сравнительного анализа эффективности способов организации введем систему индивидуальных и коллективных индексов относительной эффективности в игре n лиц. Коллективные индексы относительной эффективности соотносят значения общественного благосостояния при различных способах организации с его максимальным значением, достигаемым при кооперации игроков:

$$\begin{gathered} SCI^{NE} = \frac{g_{\min}^{NE}}{g_{\max}}; \quad SCI^{ST} = \frac{g^{ST}}{g_{\max}}; \\ g_{\max} = g^C = \max_{x \in X} \sum_{i \in N} g_i(x); \quad g_{\min}^{NE} = \min_{x \in NE} \sum_{i \in N} g_i(x). \end{gathered} \tag{3}$$

Для определения величин g^{ST}, g^{IST}используем следующие соображения. Пусть ST_i — множество решений игры Γ_1 (равновесий Штакельберга) при ведущем i-м игроке [9]. Поскольку ведущим может быть любой игрок, то в целом выигрыш общества при иерархическом управлении без обратной связи можно вычислить как

$$g^{ST} = \frac{1}{n}\sum_{i\in N} g^{ST_i} = \frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} g_j^{ST_i}.$$

Аналогично, пусть IST_i — множество решений игры Γ_2 при ведущем i-м игроке [25]. Тогда $g^{IST} = \frac{1}{n}\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} g_j^{IST_i}$ — выигрыш общества при иерархическом управлении с обратной связью.

Индивидуальные индексы относительной эффективности соотносят выигрыши игроков при различных способах организации с их симметричным выигрышем при кооперации:

$$\begin{gathered} K_i^{NE} = \frac{g_{i,\min}^{NE}}{\bar g_i^C};\quad K_i^{ST} = \frac{\gamma_i}{\bar g_i^C};\quad K_i^{IST} = \frac{\tilde\gamma_i}{\bar g_i^C};\\ g_{i,\min}^{NE} = \min_{x\in NE} g_i(x);\quad \bar g_i^C = \frac{1}{n} g^C,\quad i\in N. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь γ_i — выигрыш i-го игрока как ведущего в игре Γ_1 ; $\tilde\gamma_i$ — выигрыш i-го игрока как ведущего в игре Γ_2. Выигрыши всюду предполагаются неотрицательными. Значения индексов относительной эффективности в дуополии Курно (1)–(2) приведены в табл. 2. В двух последних ячейках сверху показан выигрыш игрока как ведущего (L), снизу — как ведомого (F). При кооперации значения индексов равны 1.

Таблица 2. Значения коллективных и индивидуальных индексов эффективности в дуополии Курно

	NE	ST	IST
SCI	8/9	3/4	1
K_i^L K_i^F	8/9	1 1/2	2 0

Анализ данных табл. 2 приводит к двум разным системам предпочтений:

общество $\quad C \sim IST \succ NE \succ ST;$

индивид $\quad IST^L \succ ST^L \sim C \succ NE \succ ST^F \succ IST^F.$

В любой игре в нормальной форме имеет место соотношение $g^C = g_{\max} = \sum_{i\in N} g_{i,\min}^{NE} + \Delta$, где $\Delta \ge 0$ — эмерджентный (кооперативный, синергический) эффект, показывающий выгодность кооперации для общества в целом. Таким образом, в системе предпочтений для общества кооперация всегда приводит к наилучшему исходу (в дуополии Курно такой же максимальный выигрыш достигается и в игре Γ_2). Поэтому коллективные индексы относительной эффективности можно назвать индексами системной согласованности. Чем ближе значение индекса к единице, тем выше степень согласованности системы.

А вот для индивидуальных предпочтений возможно как $K_i \geq 1$, так и $K_i \leq 1$. Если Δ велико, то обычно $\bar{g}_i^C > \tilde{\gamma}_i$, и тогда кооперация выгоднее иерархии для всех игроков. Однако в большинстве приложений (например, в рассматриваемой дуополии Курно) Δ не слишком велико, и тогда $\bar{g}_i^C < \tilde{\gamma}_i$, поэтому возникает борьба за лидерство. Заметим, что ведомый игрок при иерархии находится в намного менее выгодном положении.

Проведем теперь анализ условий экологической безопасности. Пусть величина загрязнения при производстве продукта пропорциональна суммарному выпуску: $P = \alpha(u_1 + u_2)$, тогда экологическое условие можно задать с помощью ограничения $u_1 + u_2 \leq \kappa$, где $\kappa = P^*/\alpha$, P^* — предельно допустимая величина загрязнения. Если игра иерархическая, то за выполнение этого требования отвечает ведущий игрок, иначе это внешнее ограничение, которое проверяется дополнительно. Результаты анализа собраны в табл. 3.

Таблица 3. Анализ условия экологической безопасности

Значение параметра κ	NE	C	ST	IST
$[0, 1/4)$	–	–	–	–
$[1/4, 1/3)$	–	$\{(1/8, 1/8)\}$	–	$\{(1/4, 0)\}$
$[1/3, 3/8)$	$\{(1/6, 1/6)\}$	$\{(1/8, 1/8)\}$	–	$\{(1/4, 0)\}$
$[3/8, \infty)$	$\{(1/6, 1/6)\}$	$\{(1/8, 1/8)\}$	$\{(1/4, 1/8)\}$	$\{(1/4, 0)\}$

Прочерк означает, что соответствующее решение игры не существует при данном диапазоне значений параметра κ (т.е. несовместимо с экологическими условиями). В частности, при $\kappa \geq 3/8$ все рассмотренные принципы оптимальности дают экологически безопасные решения, а при $\kappa < 1/4$ — наоборот. Самым чувствительным к экологическому ограничению оказывается равновесие Штакельберга, а самым устойчивым — кооперативное решение.

3. Дифференциальная модель дуополии Курно с линейным уравнением динамики

Рассмотрим динамическое обобщение модели (1)–(2) с линейной динамикой:

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t}\Big\{\beta\,[D - x_1(t) - x_2(t)]\,x_i(t) - v_i(t)\Big\}dt + e^{-\rho T}x_i(T) \to \max; \tag{5}$$

$$0 \leq v_i(t) \leq v_{\max};$$

$$\dot{x}_i = a_i v_i(t) - m_i x_i(t), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Здесь J_i — прибыль i-го игрока (фирмы) за время T; $v_i(t)$ — управляющие переменные игроков (переменные издержки) в допустимом диапазоне; $v_{\max}$ — максимально допустимые переменные издержки; $x_i(t)$ — их переменные состояния (объемы выпуска); выражение в квадратных скобках определяет цену на производимый товар в зависимости от спроса, обратно пропорционального суммарному объему выпуска товара; a_i — коэффициенты производительности; m_i — коэффициенты уменьшения выпуска; β — некоторый размерный коэффициент, обеспечивающий совпадение размерностей; ρ — коэффициент дисконтирования; T — длина игры; D — параметр спроса. Предполагается, выполнение естественного условия $x_i(t) = 0$, если $v_i(t) = 0$. Итак, взаимодействие игроков (конкурирующих фирм) описывается через их переменные состояния.

Исследуем модель (5)–(6) с помощью принципа максимума Понтрягина [20, 21], считая, что игроки используют программные стратегии и их управления кусочно-непрерывны. Отметим, что согласно [28] равновесие Нэша существует.

Функция Гамильтона имеет вид

$$H_i(x_i, v_i, \lambda_i) = (D - x_1 - x_2)x_i - v_i + \lambda_i(a_i v_i - m_i x_i); \quad i = 1, \dots n,$$

где $\lambda_i(t)$ — сопряженная переменная. Тогда получим

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -1 + a_i\lambda_i \begin{cases} \geq 0, & \lambda_i(t) \geq \dfrac{1}{a_i}, \\ < 0, & \lambda_i(t) < \dfrac{1}{a_i}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} = -D + 2x_i + x_j + (\rho + m_i)\lambda_i; \quad \lambda_i(T) = 1; \quad i = 1, 2; \quad j \neq i$$

откуда с учетом структуры модели равновесные по Нэшу стратегии имеют вид

$$v_i^{NE}(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \lambda_i(t) \geq \dfrac{1}{a_i}, \\ 0, & \lambda_i(t) < \dfrac{1}{a_i}, \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Здесь сопряженные переменные имеют вид

$$\lambda_i(t) = \left[1 - \frac{D}{\rho + m_i}\left(e^{-T(\rho+m_i)} - e^{-t(\rho+m_i)}\right) - 2\int_t^T A_i(\tau)e^{-2\tau(\rho+m_i)}d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_t^T A_j(\tau)e^{-\tau(2\rho+m_i+m_j)}d\tau\right] e^{t(\rho+m_i)}; \quad j \neq i; \quad i, j = 1, 2;$$

$$A_i(t) = x_{0i} + a_i \int\limits_0^t e^{m_i \tau} v_i^{NE}(\tau) d\tau;$$

$$x_i^{NE}(t) = A_i(t) e^{-m_i t} = x_{0i} e^{-m_i t} + a_i \int\limits_0^t e^{m_i(\tau - t)} v_i^{NE}(\tau) d\tau,$$

выигрыши игроков в равновесии равны

$$J_i = \int\limits_0^T e^{-\rho t} \Big\{ \big[D - x_1(t) - x_2(t) \big] x_i(t) - v_i(t) \Big\} dt + e^{-\rho T} x_i(T).$$

Таким образом, равновесие Нэша существует и единственно. Отметим, что функции $\lambda_i(t)$ и управления $v_i^{NE}(t)$ взаимосвязаны. Поэтому исследование модели (5)–(6) было проведено численно с целью определения числа точек переключения управления с одного значения на другое и вычисления выигрышей агентов. Расчет проводился методом стрельбы. Было проведено порядка 150 численных экспериментов в случае двух агентов. При этом варьировались величины: D от 0,5 до 40; m_1, m_2 от 0,1 до 40; a_1, a_2 от 1 до 100; x_{10}, x_{20} от 1 до 50; $v_{\max}$ от 50 до 1000. Ниже показаны результаты экспериментов в случае $T = 365$ сут; $\rho = 0{,}001$. Таблица входных данных приведена в Приложении. В табл. 4 показаны результаты расчетов по ним. Значения t_1 и t_2 показывают, в какие моменты времени происходит изменение управлений агентов.

Проведенные численные эксперименты для широкого класса входных функций показали, что управления за моделируемый промежуток времени меняются не более одного раза, причем примерно для половины входных данных управления оставались неизменными. В то же время при малых значениях коэффициента параметра спроса D (меньших 13 в проведенных экспериментах) всегда происходило одно изменение управлений за моделируемый промежуток времени. В разных примерах переключение управлений происходило с минимального значения на максимальное или наоборот. При этом момент времени, в который происходит изменение управлений, меняется и зависит от входных параметров модели.

Заметим, что для определенного класса входных данных управления агента в равновесии Нэша не меняется с течением времени и остается равным максимально возможному значению. В этом случае, если $x_{i0} = a_i v_{\max}/m_i$, то дифференциальное уравнение имеет особую точку, которая является аттрактором.

Для подтверждения сделанных на основе численного счета выводов было проведено аналитическое исследование модели в предположении, что управления меняются не более одного раза и переключаются или с нулевого значения на максимально возможное, или наоборот. Рассматривался случай двух агентов, если их управления

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&v_i^{NE}(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \text{если} \ \ t \le t_i, \\ 0, & \text{если} \ \ t_i \le t, \quad i = 1,2 \end{cases}\\
\text{или}\quad &v_i^{NE}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ t \le t_i, \\ v_{\max}, & \text{если} \ \ t_i \le t, \quad i = 1,2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Было рассмотрено четыре возможных варианта сочетаний управлений двух агентов. Ниже приведены выкладки в случае, когда оба агента меняют свои управления один раз в разные моменты времени с максимально возможного значения на нулевое, т.е.

$$
(8)\qquad v_i^{NE}(t) = \begin{cases} v_{\max}, & \text{если} \ \ t \le t_i, \\ 0, & \text{если} \ \ t_i \le t, \quad i = 1,2. \end{cases}
$$

Тогда

$$
x_i^{NE}(t) = \begin{cases} \big(x_{i0} - a_i v_{\max}/m_i\big) e^{-m_i t} + a_i v_{\max}/m_i, \\ \hfill \text{если} \ \ 0 \le t \le t_i, \\ \big(a_i v_{\max}/m_i + (x_{i0} - a_i v^{\max}/m_i)\, e^{-m_i t_i}\big)\, e^{-m_i (t - t_i)}, \\ \hfill \text{если} \ \ t_i \le t \le T, \quad i = 1,2. \end{cases}
$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
&A_i = x_{i0} - a_i v_{\max}/m_i;\\
&B_i = a_i v_{\max}/m_i;\\
&C_i = a_i v_{\max}/m_i + (x_{i0} - a_i v_{\max}/m_i)\, e^{-m_i t_i}
\end{aligned}
$$

Функции $\lambda_i^{NE}(t)$ находятся аналитически и в предположении $t_1 \le t_2$ имеют вид

$$
\lambda_i(t) = E_i(t) e^{-(\rho + m_i)(T - t)},
$$

где

$$
E_i(t) = \begin{cases} E_{i0}, & \text{если} \ \ 0 \le t < t_1, \\ E_{i1}, & \text{если} \ \ t_1 \le t < t_2, \\ E_{i2}, & \text{если} \ \ t_2 \le t \le T. \end{cases}
$$

Здесь ($i = 1,2$; $j = 1$, если $i = 2$; $j = 2$, если $i = 1$)

$$
\begin{aligned}
E_{i0} = 1 + &\frac{-D + 2B_i + B_j}{\rho + m_i} \left(1 - e^{(\rho + m_i)(T - t)}\right) + \\
&+ \frac{2A_i}{\rho + 2m_i} e^{(\rho + m_i)T} \left(e^{-(\rho + 2m_i)T} - e^{-(\rho + 2m_i)t}\right) + \\
&+ \frac{A_j}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho + m_i)T} \left(e^{-(\rho + m_1 + m_2)T} - e^{-(\rho + m_1 + m_2)t}\right);
\end{aligned}
$$

$$E_{11} = 1 + \frac{-D + B_2}{\rho + m_1}\left(1 - e^{(\rho+m_1)(T-t)}\right) +$$
$$+ \frac{2C_1}{\rho + 2m_1} e^{(\rho+m_1)T + m_1 t_1}\left(e^{-(\rho+2m_1)T} - e^{-(\rho+2m_1)t}\right) +$$
$$+ \frac{A_2}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho+m_1)T}\left(e^{-(\rho+m_1+m_2)T} - e^{-(\rho+m_1+m_2)t}\right);$$

$$E_{21} = 1 + \frac{-D + B_2}{\rho + m_2}\left(1 - e^{(\rho+m_2)(T-t)}\right) +$$
$$+ \frac{2C_1}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho+m_2)T + m_1 t_1}\left(e^{-(\rho+m_1+m_2)T} - e^{-(\rho+m_1+m_2)t}\right) +$$
$$+ \frac{A_2}{\rho + 2m_2} e^{(\rho+m_2)T}\left(e^{-(\rho+2m_2)T} - e^{-(\rho+2m_2)t}\right);$$

$$E_{i2} = 1 + \frac{-D}{\rho + m_i}\left(1 - e^{(\rho+m_i)(T-t)}\right) +$$
$$+ \frac{2C_i}{\rho + 2m_i} e^{(\rho+m_i)T + m_i t_i}\left(e^{-(\rho+2m_i)T} - e^{-(\rho+2m_i)t}\right) +$$
$$+ \frac{C_j}{\rho + m_1 + m_2} e^{(\rho+m_i)T + m_j t_j}\left(e^{-(\rho+m_1+m_2)T} - e^{-(\rho+m_1+m_2)t}\right).$$

Затем проверяется предположение (8), т.е. выполнение неравенств ($i = 1, 2$)

$$\lambda_i \geq 1/a_i, \quad \text{если} \quad 0 \leq t < t_i; \quad \lambda_i < 1/a_i, \quad \text{если} \quad t_i \leq t \leq T. \tag{9}$$

Если неравенства (9) выполняются, то управления агентов имеют вид (8).

Аналогично проверяется, имеют ли управления агентов вид, соответствующий какому-либо другому сочетанию управлений (7). Проведенные таким образом расчеты подтвердили результаты, приведенные в табл. 4.

При кооперации игроков игра становится задачей оптимального управления, решение которой аналогично решению модели (5)–(6) с очевидными изменениями.

Теоретико-игровые постановки Γ_{1t} и Γ_{2t} исследовались численно. Алгоритмы нахождения решений описаны в [22, 23]. Равновесия при постановках Γ_{1t} и Γ_{2t} находились в соответствии с алгоритмами [22, 23] методом качественно репрезентативных сценариев имитационного моделирования [24]. При этом в качестве начальных множеств качественно репрезентативных сценариев игроков берутся множества, состоящие из трех элементов: минимально и максимально допустимых управлений в соответствии с (5) и их среднего арифметического. Все элементы начального множества качественно репрезентативных сценариев проверяются на полноту и избыточность, при необходимости оно сужается или пополняется новыми элементами. Результаты численного счета для случаев кооперации и иерархии помещены в табл. 5. В динамической

Таблица 4. Результаты численного исследования

№ примера	$v_1(0)$	t_1 (сут)	$v_1(\mathrm{T})$	$v_2(0)$	t_2 (сут)	$v_2(\mathrm{T})$	J_1	J_2	$x_1(\mathrm{T})$	$x_2(\mathrm{T})$
1	0	–	0	100	75	0	13,4	16,1	2,5	3,2
2	100	30	0	100	30	0	4,7	4,5	1,1	0,1
3	100	30	0	100	30	0	21,3	7,9	1,1	0,1
4	0	–	0	0	–	0	24,2	7,5	1,1	0,1
5	0	–	0	0	–	0	30,2	6,8	3,7	0,5
6	0	–	0	0	–	0	30,7	6,8	3,7	0,5
7	0	–	0	0	–	0	30,7	6,8	3,7	0,5
8	0	–	0	0	–	0	6,7	1,7	0,001	2E-8
9	0	–	0	0	–	0	188,6	85,9	3,7	0,5
10	0	–	0	100	10	0	4,3	5,3	0,02	0,1
11	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
12	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
13	0	–	0	0	–	0	17	71	0,0004	0,5
14	0	–	0	0	–	0	146	5	3,7	0
15	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
16	0	–	0	0	–	0	125	54	3,7	0,5
17	0	–	0	0	–	0	117	5,3	11	0,5
18	0	–	0	0	–	0	76	63	3,7	1,5
19	100	–	100	0	5	100	5,3	76	0	0,5
20	0	10	100	0	–	0	78	48	10	0,5
21	0	10	100	0	30	100	146	5	3,7	0
22	100	10	0	100	30	0	33,8	104,4	0,0006	0,5
23	100	20	0	100	50	0	237	8	4,3	9E-11
24	0	–	0	0	–	0	291	61	7,4	0,5
25	0	–	0	0	–	0	62	23	3,7	0,5
26	0	20	100	0	100	100	7,3	39,5	0,0004	0,5
27	0	10	100	0	40	100	83,6	1,8	3,7	0
28	0	40	300	0	100	300	62	23	3,7	0,5
29	0	30	100	0	70	100	12,5	2,5	0,0004	0
30	0	10	100	0	40	100	83,6	1,8	3,7	0
31	0	20	100	0	70	100	12,5	2,5	0,0004	0
32	0	30	300	0	60	300	7,3	39,5	0,0004	0,5
33	0	50	100	100	–	100	2,4	0,5	0,0001	0
34	100	–	100	0	25	100	14,7	4,3	1,1	0,1
35	0	–	0	0	–	0	71	17	1,1	1E-12
36	0	–	0	0	–	0	70	20	0,001	0,1
37	0	10	100	100	–	100	2,3	0,5	0,0001	0
38	0	–	0	0	–	0	73	1	0,001	1E-12
39	0	15	100	100	–	100	16	0,4	1,1	0
40	0	–	0	0	–	0	28,8	141,7	0,001	1

Таблица 5. Выигрыши игроков при разных информационных регламентах

№ примера	NE		C	ST		IST	
	J_1	J_2	J	J_1	J_2	J_1	J_2
1	13,4	16,1	30,8	16,7	13,3	18,2	11,6
2	4,7	4,5	9,4	5,1	4,2	5,1	4,2
3	21,3	7,9	30,4	22,5	7,5	25	4,6
4	24,2	7,5	32,4	26	6	26	6
5	30,2	6,8	38	33,2	4,3	36,3	1
6	30,7	6,8	38,4	35,3	2,7	37,2	0,7
7	30,7	6,8	38,4	35,3	2,7	37,2	0,7
8	6,7	1,7	9,3	7,2	1,5	8,1	1
9	188,6	85,9	286,6	199,3	76,8	199,3	76,8
10	4,3	5,3	10,7	5,7	4	5,7	4
11	125	54	197,5	139	48	145	39
12	125	54	197,5	139	48	145	39
13	17	71	90,8	46	43	49	40
14	146	5	157,8	152	3,4	152	3,4
15	125	54	187,5	137	46	142	38
16	125	54	187,5	137	46	142	38
17	117	5,3	125,3	120,2	4,7	124,3	0,5
18	76	63	145,3	88	53	97	43
19	5,3	76	86	45	38	46	37
20	78	48	138	92	40	95	34
21	146	5	152,8	148	3,3	149,6	1,5
22	33,8	104,4	143,8	44	97	48,3	92,4
23	237	8	256,7	245	5	247,3	2,2
24	291	61	364,6	302,1	57,3	311,2	47,5
25	62	23	88,5	71	16	74,5	11,6
26	7,3	39,5	51,4	26	23	27,4	20
27	83,6	1,8	91,2	88	2,7	89,1	1,4
28	62	23	88,5	69	17	71,2	14,2
29	12,5	2,5	17	14	2	14	2
30	83,6	1,8	89,4	88	0,2	88	0,2
31	12,5	2,5	17	15	1,3	15,4	0,7
32	7,3	39,5	48,4	29	18,6	30,5	16,9
33	2,4	0,5	3,9	2,9	0,2	2,9	0,2
34	14,7	4,3	19,2	17,5	1,6	18,3	0,8
35	71	17	92,6	78	12,7	81,8	9,4
36	70	20	94,6	74,5	18,4	76,2	17,7
37	2,3	0,5	3,9	3,0	0,2	3,1	0,2
38	73	1	76,7	75,1	0,6	75,1	0,6
39	16	0,4	21,2	19,4	0,3	20,3	0,2
40	28,8	141,7	172,3	33,5	136,5	37,3	134,5

Таблица 6. Индексы эффективности игроков при разных информационных регламентах

№ примера	NE		ST		IST	
	SCI	K_1/K_2	SCI	K_1^L/K_2^F	SCI	K_1^L/K_2^F
1	0,96	0,87 /1,05	0,97	1,08/0,86	0,96	1,18/0,75
2	0,98	1 /0,95	0,99	1,09/0,89	0,98	1,09/0,89
3	0,96	1,4 /0,51	0,99	1,48/0,33	0,97	1,64/0,3
4	0,98	1,48 /0,46	0,99	1,6/0,37	0,98	1,6/0,37
5	0,97	1,58/0,36	0,98	1,75/0,23	0,98	1,91/0,05
6	0,98	1,59/0,35	0,99	1,83/0,14	0,98	1,94/0,04
7	0,98	1,59/0,35	0,99	1,83/0,14	0,98	1,94/0,04
8	0,9	1,46/0,37	0,94	1,54/0,32	0,93	1,74/0,22
9	0,96	1,32/0,6	0,96	1,39/0,54	0,96	1,39/0,54
10	0,9	0,8/1	0,91	1,08/0,75	0,91	1,08/0,75
11	0,91	1,26/0,55	0,95	1,41/0,49	0,93	1,46/0,33
12	0,91	1,26/0,55	0,95	1,41/0,49	0,94	1,46/0,33
13	0,97	0,38/1,58	0,98	1,01/0,95	0,97	1,08/0,88
14	0,96	1,87/0,06	0,98	1,93/0,04	0,97	1,93/0,04
15	0,95	1,33/0,57	0,97	1,46/0,49	0,96	1,51/0,4
16	0,95	1,33/0,57	0,97	1,46/0,49	0,96	1,51/0,4
17	0,98	1,86/0,08	0,99	1,92/0,08	0,98	1,99/0,01
18	0,96	1,04/0,86	0,97	1,21/0,73	0,96	1,34/0,59
19	0,95	0,12/1,77	0,98	1,05/0,88	0,97	1,07/0,86
20	0,91	1,13/0,7	0,95	1,33/0,58	0,94	1,38/0,49
21	0,99	1,92/0,07	0,99	1,95/0,04	0,99	1,97/0,02
22	0,96	0,47/1,45	0,98	0,61/1,35	0,98	0,67/1,28
23	0,95	1,85/0,06	0,97	1,91/0,04	0,97	1,93/0,02
24	0,96	1,6/0,33	0,99	1,65/0,31	0,98	1,7/0,26
25	0,96	1,40/0,52	0,98	1,61/0,36	0,98	1,69/0,26
26	0,91	0,28/1,54	0,93	1,01/0,89	0,92	1,07/0,78
27	0,94	1,83/0,04	0,97	1,93/0,06	0,96	1,95/0,03
28	0,96	1,4/0,52	0,98	1,56/0,38	0,97	1,61/0,32
29	0,88	1,47/0,29	0,94	1,65/0,24	0,94	1,65/0,24
30	0,96	1,86/0,04	0,98	1,97/0,01	0,98	1,97/0,01
31	0,88	1,47/0,29	0,92	1,76/0,15	0,9	1,81/0,08
32	0,97	0,3/1,63	0,99	1,2/0,77	0,98	1,26/0,7
33	0,74	1,23/0,26	0,79	1,49/0,1	0,77	1,49/0,1
34	0,99	1,53/0,45	0,99	1,82/0,17	0,99	1,91/0,08
35	0,95	1,53/0,37	0,98	1,68/0,27	0,98	1,77/0,2
36	0,95	1,48/0,42	0,98	1,58/0,39	0,99	1,61/0,37
37	0,72	1,18/0,26	0,82	1,54/0,1	0,85	1,59/0,1
38	0,96	1,9/0,03	0,99	1,96/0,02	0,99	1,96/0,02
39	0,77	1,51/0,04	0,93	1,83/0,03	0,97	1,92/0,02
40	0,99	0,33/1,65	0,99	0,39/1,59	0,99	0,43/1,77
Среднее значение	**0,935**	**1,28/0,59**	**0,962**	**1,5/0,42**	**0,957**	**1,56/0,37**

версии игры индивидуальные и коллективные индексы относительной эффективности определяются выражениями, аналогичными (3)–(4). Значения индексов для модели (5)–(6) при различных способах организации собраны в табл. 6. В последней строке табл. 6 приведены средние значения индексов.

Отсюда получаем системы предпочтений:

общество $C \succ ST \succ IST \succ NE$;

индивид $IST^L \succ ST^L \succ NE^1 \succ C \succ NE^2 \succ ST^F \succ IST^F$.

Таким образом, кооперативный способ организации более предпочтителен для общества и ведомого игрока. Для ведущего же игрока предпочтительнее иерархическая организация системы управления и информационный регламент игры Γ_{2t} [26].

Теперь проанализируем влияние экологических требований на найденные решения. Условие экологической безопасности возьмем в виде $x_1(T) + x_2(T) \leq \kappa_T$. При иерархическом управлении за его выполнение отвечает ведущий игрок, в остальных случаях это внешнее ограничение, которое анализируется дополнительно. Результаты анализа чувствительности решений к указанному условию приведены в табл. 7.

В столбцах 2–5 табл. 7 для разных информационных регламентов указано в процентах количество проведенных имитационных экспериментов, в которых условие экологической безопасности выполнено. В первом столбце табл. 7 приведены значения параметра κ_T. Таким образом, при больших значениях κ_T все рассмотренные принципы оптимальности дают экологически безопасные решения. С уменьшением значения κ_T число равновесий, отвечающих экологическому условию, при всех принципах оптимальности умень-

Таблица 7. Анализ выполнения условия экологической безопасности

κ_T	NE (%)	C (%)	ST (%)	IST (%)
12	100	100	100	100
11	97,5	100	97,5	97,5
10	95	100	97,5	95
9	95	100	95	95
8	95	100	95	92,5
7	92,5	100	92,5	92,5
6	92,5	100	92,5	90
5	87,5	100	90	87,5
4	60	100	60	60
3	50	100	60	57,5
2	50	97,5	50	50
1	30	95	30	27,5
0,5	30	95	25	22,5
0,1	15	62,5	15	12,5

шается. С точки зрения экологической безопасности принципы оптимальности упорядочены следующим образом: $C \succ NE \sim T \sim IST$.

4. Заключение

Проблема (не)эффективности равновесий общепризнанна и служит предметом внимания большого числа работ. Для количественной оценки (не)эффективности предложен ряд индексов, отражающих пессимистический подход (цена анархии), оптимистический подход (цена стабильности), динамические аспекты (цена информации), альтруистическое поведение индивида (цена кооперации).

Однако указанные индексы анализируют эффективность равновесий с точки зрения всего общества. В этом случае кооперация является очевидным наилучшим исходом и индексы оценивают только степень отклонения системы от глобального оптимума. Между тем реальная возможность кооперации зависит от интересов не только общества в целом, но и отдельных экономических агентов (предпринимателей, фирм и т.п.). Например, выигрыш игрока в роли ведущего при иерархической организации может оказаться большим, чем его доля при кооперативном распределении, и тогда вместо кооперации возникает борьба за лидерство. Поэтому для систематического анализа (не)эффективности равновесий и условий выгодности кооперации требуются не только коллективные, но и индивидуальные индексы относительной эффективности.

Кроме того, необходимо дополнительно учитывать условия жизнеспособности, определяющие требования к состоянию управляемой динамической системы. В частности, эти условия могут задавать экологические ограничения экономической деятельности, необходимые для устойчивого развития эколого-экономических систем.

В данной статье система индивидуальных и коллективных индексов относительной эффективности применена к исследованию статических и динамических моделей дуополии Курно. В динамике для определения индексов применялось усреднение по множеству вычислительных экспериментов. Как и предполагалось, системы предпочтений для индивида (фирмы) и общества в целом противоречивы. Кооперация игроков выгодна для общества в целом, подчиненного (ведомого) игрока и с точки зрения выполнения условия экологической безопасности. Для лидера (ведущего игрока) предпочтительнее иерархия с информационным регламентом игры Гермейера Γ_2. Более того, у двух несимметричных игроков различно отношение к кооперации: для одного из них она выгоднее независимого поведения, для другого — наоборот.

В дальнейшем планируется исследование моделей дуополии и олигополии Курно с учетом условия экологической безопасности для иных классов функций, в частности степенных, а также рассмотрение теоретико-игровых моделей олигополии Курно в форме характеристической функции. Будут рассмотрены и другие статические и динамические теоретико-игровые модели в нормальной форме и форме характеристической функции с целью сравнительного анализа эффективности способов взаимодействия активных агентов [27].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Поясним данные из табл. 1. Для нахождения равновесия Нэша в модели (1)–(2) решим систему $\dfrac{\partial g_i}{\partial u_i} = 0,\ i = 1, 2,$ откуда $\begin{cases} 1/2 - 2u_1 - u_2 = 0 \\ 1/2 - u_1 - 2u_2 = 0, \end{cases}$ $u_1 = u_2 = 1/6$.

Матрица Гессе для этой системы $\begin{Vmatrix} -2 - 1 \\ -1 - 2 \end{Vmatrix}$ отрицательно определена, поэтому $u_1^{NE} = u_2^{NE} = 1/6,\ g_1^{NE} = g_2^{NE} = 1/36$. При кооперации игроки совместно максимизируют функцию $g(\bar u) = (1/2 - \bar u)\bar u,\ \bar u = u_1 + u_2$. Имеем $\frac{\partial g}{\partial \bar u} = 1/2 - 2\bar u = 0,\ \bar u = 1/4,\ \frac{\partial^2 g}{\partial \bar u^2} = -2 < 0$. Поэтому множество Парето-оптимальных кооперативных решений есть $\bar u^C = 1/4$, откуда выбираем равный дележ $u_1^C = u_2^C = 1/8$ и получаем выигрыши $g_1^C = g_2^C = 1/32$. Если первый игрок — лидер по Штакельбергу, то из условия $\frac{\partial g_2}{\partial u_2} = 0$ оптимальная функция реакции второго игрока есть $u_2(u_1) = 1/4 - u_1/2$. Подставляя ее в g_1, получаем $g_1(u_1, u_2(u_1)) = (1/4 - u_1/2)u_1$. Условие $\frac{\partial g_1}{\partial u_1} = 0$ дает $u_1 = 1/4$. Поскольку $\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_1^2} = -1 < 0$, то $u_1^{ST_1} = 1/4$, $u_2^{ST_1} = u_2(u_1^{ST_1}) = 1/8$, $g_1^{ST_1} = 1/32$, $g_2^{ST_1} = 1/64$.

Наконец, найдем решение игры (1)–(2) как Γ_2 [25]. Имеем

$$u_1^D(u_2) = Arg \max_{0 \le u_1 \le 1/2} g_1(u_1, u_2) = 1/4 - u_2/2,$$
$$u_1^P(u_2) = Arg \min_{0 \le u_1 \le 1/2} g_2(u_1, u_2) \equiv 1/2,$$
$$L_2 = \max_{0 \le u_2 \le 1/2} \left(u_1^P(u_2), u_2\right) = \max_{0 \le u_2 \le 1/2} (-u_2^2) = 0,$$
$$E_2 = \left\{u_2 \in U_2 : g_2\left(u_1^P(u_2), u_2\right) = L_2\right\} = \{0\},$$
$$D_2 = \{(u_1, u_2) : g_2(u_1, u_2) > 0\},$$
$$K_2 = \min_{u_2 \in E_2} \max_{0 \le u_1 \le 1/2} g_1(u_1, u_2) = \max_{0 \le u_1 \le 1/2} (1 - u_1)u_1 = 1/16.$$

Для нахождения величины $K_1 = \sup\limits_{D_2} g_1(u_1, u_2)$ надо решить задачу оптимизации $(1/2 - u_1 - u_2)u_1 \to \max$, $(1/2 - u_1 - u_2)u_2 > 0$, $0 \le u_i \le 1/2$. Очевидно $u_2^\varepsilon = \varepsilon,\ u_1^\varepsilon = 1/4$. Тогда $K_1 = 1/16 - \varepsilon/4 < K_2$, поэтому ε-оптимальная стратегия ведущего имеет вид $\tilde u_1^\varepsilon(u_2) = \begin{cases} 1/4, & u_2 = 0 \\ 1/2 & \text{иначе} \end{cases}$ при этом $g_1^{IST_1} = 1/16$, $g_2^{IST_1} = 0$.

Заметим, что $\bar u^{NE} = 1/3$, $\bar u^C = 1/4$, $\bar u^{ST} = 3/8$, $\bar u^{IST} = 1/4$, откуда следуют данные табл. 3.

Таблица. Входные данные для численного решения динамической дуополии Курно

№ примера	D	m_1	m_2	a_1	a_2	x_{10}	x_{20}	$v_{\max}$
1	10	0,2	0,001	1	5	3	2	100
2	10	1	3	1	5	3	2	100
3	15	1	3	1	5	3	2	100
4	15	1	3	3	7	3	2	100
5	15	1	3	3	7	10	10	100
6	15	1	3	3	7	10	10	500
7	15	1	3	10	15	10	10	100
8	15	10	20	3	7	10	10	100
9	40	1	3	3	7	10	10	100
10	10	5	3	3	5	3	2	100
11	30	1	3	3	7	10	10	100
12	30	1	3	3	7	10	10	300
13	30	10	3	3	7	10	10	100
14	30	1	30	3	7	10	10	100
15	30	1	3	30	7	10	10	100
16	30	1	3	3	70	10	10	100
17	30	1	3	3	7	30	10	100
18	30	1	3	3	7	10	30	100
19	30	30	3	30	7	10	10	100
20	30	30	3	3	70	10	10	100
21	30	1	30	30	7	10	10	100
22	40	10	3	3	7	10	10	100
23	40	1	30	3	7	10	10	100
24	40	1	3	30	7	20	10	100
25	20	1	3	3	7	10	10	100
26	20	10	3	3	7	10	10	100
27	20	1	30	3	7	10	10	100
28	20	1	3	3	7	10	10	300
29	20	10	30	3	7	10	10	100
30	20	1	30	3	70	10	10	100
31	20	10	30	30	7	10	10	100
32	20	10	3	30	7	10	10	300
33	10	10	30	1	5	3	2	100
34	10	1	3	10	50	3	2	100
35	40	1	30	1	5	3	20	100
36	40	10	3	1	5	30	2	100
37	10	10	30	10	5	3	2	100
38	40	10	30	1	50	30	2	100
39	10	1	30	10	50	3	2	100
40	40	10	3	10	5	30	20	100

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Algorithmic Game Theory / Ed. by *Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V.* Cambridge University Press, 2007.
2. *Johari R., Tsitsiklis J.N.* Efficiency loss in a network resource allocation game // Math. Oper. Res. 2004. No. 29(3). P. 407–435.
3. *Papadimitriou C.H.* Algorithms, games, and the Internet // Proc. 33rd Symp. Theory of Computing. 2001. P. 749–753.
4. *Roughgarden T.* Selfish Routing and the Price of Anarchy. MIT Press, 2005.
5. *Basar T., Zhu Q.* Prices of Anarchy, Information, and Cooperation in Differential Games // J. Dynam. Games and Appl. 2011. No. 1. P. 50–73.
6. *Aubin J.-P.* Viability Theory. Springer-Verlag, 1991.
7. *Cairns R.D., Martinet V.* An environmental-economic measure of sustainable development // Eur. Econom. Rev. 2014. No. 69. P. 4–17.
8. *Doyen L., Martinet V.* Maximin, viability and sustainability // J. Econ. Dynam. Control. 2012 V. 36(9). P. 1414–1430.
9. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
10. *Maskin E., Tirole J.* A Theory of Dynamic Oligopoly, III. Cournot Competition // Eur. Econ. Rev. 1987. No. 31. P. 947–968.
11. *Bischi G.I., Naimzada A.* Global Analysis of a Dynamic Duopoly Game with Bounded Rationality // Advances in Dynamic Games and Applications. Ed. by J. Filar et al. – Birkhauser. 2000. P. 361–385.
12. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // АиТ. 2018. № 5. С. 83–106.

    Geras'kin M.I. Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.
13. *Гераськин М.И.* Рефлексивные игры в линейных моделях дуополии Штакельберга при несовпадении рангов рефлексии // АиТ. 2020. № 2. С. 134–156.

    Geras'kin M.I. Reflexive Games in the Linear Stackelberg Duopoly Models under Incoincident Reflexion Ranks // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 302–319.
14. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // АиТ. 2020. № 6. С. 105–130.

    Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1051–1072.
15. *Гераськин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // АиТ. 2020. № 9. С. 120–143.

    Geras'kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1659–1678.
16. *Гераськин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триполии при линейных функциях издержек агентов // АиТ. 2022. № 3. С. 110–131.

    Geras'kin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.

17. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // АиТ. 2020. № 2. С. 115–133.

Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexion Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 2. P. 287–301.

18. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.

Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.

19. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // АиТ. 2022. № 3. С. 84–109.

Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.

20. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

21. *Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press, 2000.

22. *Ugol'nitskii G.A., Usov A.B.* Equilibria in models of hierarchically organized dynamic systems with regard to sustainable development conditions // Autom. Remote Control. 2014. No. 6. P. 1055–1068.

23. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Solution algorithms for differential models of hierarchical control systems // Autom. Remote Control. 2016. No. 5. P. 872–880.

24. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games / Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. P. 63–106.

25. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

26. Современное состояние теории исследования операций. Под ред Н.Н. Моисеева. М.: Наука, 1979.

27. *Угольницкий Г.А.* Теория управления устойчивым развитием активных систем. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2016.

28. *Bressan A.* Noncooperative Differential Games // Milan J. Math. 2011. No. 2. P. 357–427.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 21.04.2022

После доработки 16.09.2022

Принята к публикации 26.10.2022