Автоматика и телемеханика, № 5, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. **В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается гладкая автономная система общего вида, допускающая невырожденное периодическое решение. Строится глобальное семейство (по параметру h) невырожденных периодических решений, выводится закон монотонного изменения периода на семействе, доказывается существование редуцированной системы второго порядка. Для нее решается задача стабилизации колебания управляемой системы, выделенного значением параметра h. Находится гладкое автономное управление, конструируется притягивающий цикл.

Ключевые слова: автономная система, невырожденное периодическое решение, глобальное семейство, теорема Ляпунова о центре, управление, притягивающий цикл, естественная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231023050033, **EDN:** AFVGEL

1. Введение

В 1927 г. Ван дер Поль предложил уравнение, описывающее линейный осциллятор, на который действует малая нелинейная сила, линейная по скорости, и создающая диссипацию в каждой текущей точке траектории (диссипация Ван дер Поля). Уравнение допускает притягивающий цикл. Впоследствии Л.С. Понтрягин в [1] нашел достаточные условия для выделения цикла из семейства периодических решений гамильтоновой системы: применялись негамильтоновые возмущения. В линейном осцилляторе колебания изохронные, в нелинейной гамильтоновой системе период колебаний зависит от постоянной энергии.

В [2] диссипация типа Ван дер Поля вводилась для семейства периодических решений, в котором период монотонно зависит от параметра семейства h: для линейного осциллятора получается диссипация Ван дер Поля. Построена система, в которой для стабилизации колебания с параметром h выбирается соответствующее значение параметра в управлении. Управляемая система остается автономной и обладает асимптотически орбитально устойчивым циклом. Эти результаты развивались в [3–5], мехатронная система стабилизация предложена в [6]. В многомерных системах строилась редуцированная система возможного низшего порядка.

Другие исследования по стабилизации желаемого режима колебания отличаются применением управлений, явно зависящих от времени. Приведем некоторые из них. Обзор на примере перевернутого маятника дается в [7]. В [8] предлагается раскачивающее управление (swinging control). В [9] решается задача об орбитальной стабилизации периодических решений малоприводных нелинейных систем (с числом независимых приводов на единицу меньше числа степеней свободы неуправляемой консервативной системы). Синтезированный нелинейный закон управления с обратной связью зависит от времени. Стабилизация желаемых уровней механической энергии посредством импульсного управления проводится в [10], робастное стабилизирующее управление колебаниями ищется неявным методом Ляпунова в [11].

Редуцированную систему можно выделить, когда описано все множество периодических решений. В нелинейных системах период колебаний, как правило, меняется от колебания к колебанию. Множество одночастотных колебаний с монотонным изменением периода на нем от параметра, принимающего все возможные для множества значения, становится единицей такого множества и называется глобальным семейством периодических решений. В фазовом пространстве глобальное семейство заполняет связное инвариантное множество. В системе может быть конечное или счетное число глобальных семейств.

Задача о глобальном семействе первоначально возникла в многочисленных приложениях теоремы А.М. Ляпунова о центре (1892 г.). В теореме устанавливается существование локального семейства нелинейных периодических движений, примыкающей к равновесию консервативной системы. В конкретных задачах всегда встает вопрос о границе применимости ляпуновского семейства. Прогресс в вопросе о границе начался с исследований А.А. Зевина (1997 г.). В [12] даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Omega \in \mathrm{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Omega$. Результаты развиты в [13]: найдены строго звездообразные (strictly starshaped) гамильтонианы, для которых условия продолжения [12] выполняются.

Сейчас стало понятно, что вопрос о границе в теореме Ляпунова разрешается знанием о глобальном семействе периодических решений, которое включает, как составляющее, локальное ляпуновское семейство.

Обратимая механическая система выделяется свойством пространственно-временной симметрии, однако в общем случае не допускает первый интеграл. В ней рассматриваются симметричные периодические движения. Глобальные семейства в этих системах изучались (см. [4, 5, 14, 15]); понятие глобального семейства вводилось в [14]. Результаты по глобальному семейству (включая вопросы его существования, построения, свойства и т.д.) использовались при нахождения управления с меняющим значение параметром в [4–6].

В данной статье для автономной системы общего вида, не стесненной дополнительными ограничениями (гамильтоновость, обратимость, консервативность и т.д.), ставится и решается задача построения глобального семейства невырожденных периодических решений. При этом применяется подход Понтрягина в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [16]) введения непродолжаемого решения. Во второй части статьи для редуцированной системы второго порядка строится управляемая система. Находится гладкое автономное управление с настраиваемым параметром, выделяющим стабилизируемое колебание.

2. Невырожденное периодическое решение автономной системы

Рассматривается гладкое автономное уравнение

$$\dot{z} = Z(z), \quad z \in \mathrm{R}^n, \tag{1}$$

общее решение которого обозначается через $z(z_1^0, \ldots, z_n^0, t)$, где $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ — начальная точка (при $t = 0$). Необходимое и достаточное условие существования T-периодического решения системы (1) записывается в виде равенства

$$f \equiv z(z_1^0, \ldots, z_n^0, T) - z^0 = 0. \tag{2}$$

Пусть уравнение (2) имеет решение $z^0 = z^*$, $T = T^*$, не совпадающее с равновесием[1]: $Z(z^*) \neq 0$. В силу автономности системы (1) уравнение (2) вместе с указанным решением всегда обладает семейством решений по параметру γ — сдвига точки z^0 вдоль траектории:

$$z^0 = z^*(\gamma), \quad T = T^*. \tag{3}$$

Вычисляется ранг Ra функциональной матрицы A_f (матрицы Якоби) для функции f с параметром T в точке z^* при $T = T^*$. Тогда получается: $\mathrm{Ra} \leqslant n - 1$.

Определение 1. Случай $\mathrm{Ra} = n - 1$ *называется невырожденным для периодического решения. При* $\mathrm{Ra} = n - 1$ *периодическое решение называется невырожденным, в противном случае, оно называется вырожденным.*

Далее исследуется случай $\mathrm{Ra} = n - 1$.

Уравнение (2) может допускать единственное решение вида (3). Тогда автономное уравнение (1) имеет изолированное периодическое решение — цикл с периодом T^*. Альтернативой будет семейство решений, в котором период T меняется от решения к решению, т.е. является функцией некоторого параметра h: $z^0 = z^0(\gamma, h)$, $T = T(h)$.

Из равенства (2) в окрестности решения (3) выводится система линейных равенств

$$\begin{aligned} &\xi_s \equiv \frac{\partial f_s}{\partial z_1^0} dz_1^0 + \ldots + \frac{\partial f_s}{\partial z_n^0} dz_n^0 + \frac{\partial f_s}{\partial T} dT = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \\ &f = (f_1, \ldots, f_n), \end{aligned} \tag{4}$$

[1] замечание рецензента

в которой частные производные вычисляются при $z^0 = z^*$, $T = T^*$. Система (4), как и равенство (2), удовлетворяется тождественно по сдвигу γ. Так как производная

$$\frac{\partial f_s}{\partial T} = \frac{\partial z(z^0, T)}{\partial T} = Z_s(z^0),$$

то это необходимо приводит к линейной зависимости функций $Z_s(z^0)$, $s = 1, \ldots, n$.

В ситуации цикла система (4) выполняется только при $\Delta T = T - T^* = 0$. Матрица A_f имеет простое нулевое собственное значение.

Далее рассматривается случай, когда матрица A_f содержит жорданову 2-клетку из нулевых собственных значений. Здесь имеем скалярный параметр h (см. [17]). Из равенств (4), расматриваемых как система линейных уравнений с матрицей A_f, выводится существование в уравнении (2) локального семейства решений по dT. Соответственно, уравнение (1) допускает локальное h-семейство периодических решений. Для T^*-периодического решения: $T^* = T(h^*)$, $T'(h^*) \neq 0$ (через $(')$ обозначается дифференцирование по h). Параметр h принадлежит окрестности числа h^*.

Далее h называется параметром семейства периодических решений. Функция $T(h)$ — монотонна, поэтому за h можно выбирать сам период T.

В ситуации семейства решения уравнений в вариациях состоят из частных производных от периодического решения соответственно по t и h. В результате дифференцирования по h получается растущее вместе со временем t решение, которое выписывается, например, в [18, стр. 416, формула (9.9)].

Вводится определение 2.

Определение 2. Семейство периодических решений уравнения (1) *называется невырожденным, если период* $T(h)$ *на нем монотонно зависит от параметра* h.

Определение 2 справедливо для рассмотренного локального семейства, в котором h меняется в окрестности числа h^*. Оно остается справедливым для любого семейства периодических решений: на нем h меняется в интервале. Значит, существует интервал изменения параметра h, который отвечает всем периодическим решениям семейства.

Определение 3. Невырожденное семейство периодических решений, на котором параметр h *принимает всевозможные для решений семейства значения, называется глобальным семейством.*

В фазовом пространстве глобальное семейство представляется связным множеством точек. Интервал изменения h в глобальном семействе может быть конечным (энергия маятника от нижнего до верхнего равновесий) или неограниченным (неограниченные по координате колебания). В уравнении (1) может существовать одно, несколько или счетное множество глобальных семейств невырожденных периодических решений. Предметом статьи будет отдельное глобальное семейство.

Для обозначения невырожденного периодического решения, принадлежащего семейству, далее применяется сокращение НПР. Тогда глобальное семейство невырожденных периодических решений будет называться глобальным семейством НПР и обозначается через Σ.

НПР существует для системы размерности $n \geqslant 2$. Колебания математического маятника дают пример НПР: $\ddot{x} + \sin x = 0$, $n = 2$, $\mathrm{Ra} = 1$. При этом локальные колебания близ нижнего равновесия образуют ляпуновское семейство НПР. Его продолжение по периоду приводит ко всему семейству колебаний маятника (глобальное семейство НПР), связывающему нижнее и верхнее равновесия. Период колебаний на нем, начиная со значения 2π, монотонно, вместе с амплитудой колебания, стремящейся к π, стремится к бесконечности.

В линейном осцилляторе реализуется семейство вырожденных (изохронных) колебаний одного периода: $n = 2$, $\mathrm{Ra} = 0$.

Замечание 1. В обратимых механических системах НПР могут быть симметричными, для таких решений понятие НПР уточняется в [4].

3. Локальные свойства НПР

НПР обладает следующими свойствами.

1°. Свойство локальной продолжимости НПР.

В системе (4) приращение dT не равно нулю и меняется независимо от γ. При непрерывном двустороннем изменении приращения dT из системы (4) находятся все кривые семейства НПР. Поэтому уравнение (1) вместе с НПР, где $h = h^*$, обладает семейством НПР с монотонной зависимостью периода $T(h)$ от h. При этом параметр h принадлежит некоторой окрестности числа h^*. Приращение dT ограничивается условием $\mathrm{Ra} = n - 1$.

Семейство НПР также можно выделять интервалом изменения периода T; семейство обозначается через $\Sigma(T)$.

2°. Семейство $\Sigma(T)$ заполняет двумерную область $\hat{\Sigma}(T)$.

Область $\hat{\Sigma}(T)$ образована замкнутыми кривыми — НПР уравнения (1), которые параметризованы сдвигом γ. Эти кривые меняются вместе с параметром семейства h.

Замечание 2. На локальном семействе период является единственным параметром. При этом $T'(h^*) \neq 0$ и период зависит от одного параметра h (закон зависимости периода нелинейных колебаний от одного параметра [17]).

4. Глобальное семейство НПР

Глобальное семейство НПР (Σ) получается двусторонним продолжением семейства $\Sigma(T)$ по периоду T (по параметру h). Соответственно, продолжение области $\hat{\Sigma}(T)$ по периоду T приводит в фазовом пространстве к глобальной области $\hat{\Sigma}$, заполненной решениями из Σ.

Лемма 1. Глобальное семейство Σ существует и заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$. На нем период является монотонной функцией параметра семейства. Для точек области $\hat{\Sigma}$ ранг $\mathrm{Ra} = n - 1$, на ее границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\mathrm{Ra} = n - 1$ не выполняется.

Доказательство. Рассматривается НПР системы (1). Согласно свойствам 1° и 2° оно принадлежит семейству $\Sigma(T)$ и заполняет область $\hat{\Sigma}(T)$. К каждому НПР семейства $\Sigma(T)$ применяется свойство 1°. В результате возникают две ситуации. В первой из них область $\hat{\Sigma}(T)$ не меняется: глобальное семейство Σ — построено. Во-второй ситуации область $\hat{\Sigma}(T)$ расширяется в том смысле, что содержит все точки прежней области, а также новые точки. Значит, семейство $\Sigma(T)$ получило продолжение по периоду T, как в сторону увеличения, так и уменьшения T. Процесс продолжения описывается системой (4). На полученном семействе монотонное изменение периода от параметра семейства сохраняется.

На следующем шаге возникает такая же альтернатива, как на предыдущем шаге итерации.

В конечном результате получается глобальная область $\hat{\Sigma}$, в которой выполняется условие $\mathrm{Ra} = n - 1$. Область $\hat{\Sigma}$ заполняется глобальным семейством НПР. На границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\mathrm{Ra} = n - 1$ нарушается.

Построение Σ происходит за бесконечное число шагов.

Замечание 3. Для достижения глобального семейства применяется подход Понтрягина к построению непродолжаемого решения в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лемма 2. Глобальное семейство НПР описывается редуцированной системой второго порядка.

Доказательство. Равенства (4) выполняются на глобальном семействе Σ тождественно по паре (z^0, T). Ранг матрицы A_f равен $n-1$, производные по T линейно зависимы, а вектор $df/dT \neq 0$. Поэтому $n-1$ линейно независимых дифференциальных форм из (4), связанных условиями (4), приводятся к системе, в которой только одна из полученных форм содержит dT. Независимость оставшихся форм от dT означает, что решения глобального семейства описываются системой второго порядка.

Замечание 4. В случае консервативной системы получается редуцированная консервативная система с одной степенью свободы.

На основе лемм 1 и 2 формулируется теорема 1.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) *допускает НПР. Тогда оно продолжается по периоду T на глобальное семейство Σ. На Σ период $T(h)$ монотонно зависит от параметра семейства h. Семейство Σ заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$; Σ описывается редуцированной системой второго порядка. Для точек области $\hat{\Sigma}$ ранг $\mathrm{Ra} = n - 1$, на ее границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\mathrm{Ra} = n - 1$ не выполняется.*

Замечание 5. При подходе к границе $\partial\hat{\Sigma}$ производная $T'(h)$ может стремится к нулю, бесконечности или перестает существовать. В случае $T'(h) \to 0$ границей семейства может быть вырожденное периодическое решение. Или на границе находится центр (примеры 1 и 2, $\kappa < 1$). Также семейство может стать неограниченным по координате (пример 2, $\kappa > 1$). Случай $T'(h) \to \infty$ реализуется для центра (пример 2, $\kappa > 1$), седла (пример 1), а также — для неограниченного по координате глобального семейства (пример 2, $\kappa < 1$) (см. также [19]).

Следствие 1. Ляпуновское семейство продолжается на глобальное семейство невырожденных периодических решений (глобальная теорема Ляпунова о центре).

Доказательство. Период на локальном ляпуновском семействе монотонно зависит от постоянной энергии (см. [18]). Поэтому семейство состоит из НПР. По теореме 1 глобальное семейство существует и получается продолжением любого НПР. Следовательно, теорема Ляпунова о центре имеет глобальный характер.

Замечание 6. Проблема границы в теореме Ляпунова о центре получает полное решение описанием глобальной области $\hat{\Sigma}$ и ее границы.

Замечание 7. Из теоремы 1 в частном случае выводятся результаты [4, 14, 15].

Теорема 1 и замечание 5 иллюстрируются примерами. В частности, на них показывается, какие движения реализуются на $\partial\hat{\Sigma}$.

Пример 1. $\ddot{x} + \sin x = 0$. В математическом маятнике колебания образуют глобальное семейство невырожденных колебаний, границами которой служат равновесия (центр и седло) и сепаратриссы. На семействе период монотонно возрастает от центра к седлу.

Пример 2. $\ddot{x} + x^\kappa = 0, \kappa > 0$. На фазовой плоскости равновесие $x = 0$, $\dot{x} = 0$ окружено семейством периодических решений. Уравнение допускает первый интеграл

$$\dot{x}^2/2 + x^{\kappa+1}/(\kappa+1) = h(\text{const}).$$

Вычислим период колебания с амплитудой $x_{\max}$:

$$T = 4\int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2(h - x^{\kappa+1}/\kappa+1)}}.$$

Положим $x = h^{1/(\kappa+1)}y$. Тогда получается

$$T = 4h^{\frac{1-\kappa}{2(\kappa+1)}} \int_0^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{2(1 - y^{\kappa+1}/(\kappa+1))}},$$

где $x_{\max} = h^{1/(\kappa+1)}y_{\max}$. Отсюда следует, что при $\kappa < 1$ период монотонно возрастает вместе с h (вместе с амплитудой колебаний), при $\kappa = 1$ (случай линейного осциллятора) период колебаний не зависит h, а при $\kappa > 1$ период монотонно убывает к нулю с возрастанием амплитуды колебаний. Следовательно, в случае $\kappa \neq 1$ уравнение обладает семейством невырожденных неограниченных колебаний, одной из границ служит нулевое равновесие, а другая граница уходит на бесконечность.

5. Управляемая редуцированная система

Пусть уравнение (1) допускает НПР. По теореме 1 оно принадлежит глобальному семейству Σ, которое заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$. Предполагается, что $\hat{\Sigma}$ является притягивающей.

Семейство Σ описывается редуцированной системой второго порядка. Для этой системы ставится задача стабилизации НПР из семейства Σ. Рассматривается гладкая система.

Таким образом, решается задача нахождения в системе

$$\dot{x} = X(x,y) + \varepsilon F, \quad \dot{y} = Y(x,y) + \varepsilon G, \tag{5}$$

гладких управлений F и G с малым коэффициентом усиления регулятора ε таких, чтобы в (5) реализовался притягивающий цикл, близкий к выбранному НПР семейства Σ. Предполагается, что семейство Σ, т.е. решения системы (5) при $\varepsilon = 0$, описываются формулами

$$x = \varphi(h,t), \quad y = \psi(h,t). \tag{6}$$

Находятся управления, решающие задачу стабилизации для любого НПР семейства Σ: для выбранного НПР значение параметра $h = h^*$.

Для малых ε записывается неоднородная линейная система

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= a_{11}\delta x + a_{12}\delta y + \varepsilon F, \\ \delta\dot{y} &= a_{21}\delta x + a_{22}\delta y + \varepsilon G, \\ \delta x &= x - \varphi(h,t), \quad \delta y = y - \psi(h,t), \end{aligned} \tag{7}$$

где однородная часть совпадает с уравнениями в вариациях для решения (6). В (7) учитываются только линейные члены по $\delta x, \delta y$: добавление нелинейных членов не меняет получаемых качественных выводов, которые количественно будут различаться от получаемых на величины $o(\varepsilon)$.

Лемма 3. Система (7) *приводится к виду*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon[\dot{\psi}(h^*,t)F - \dot{\varphi}(h^*,t)G]/\Delta, \\ \dot{v} &= \frac{T'(h^*)}{T^*}u + \varepsilon[\eta(h^*,t)F - \xi(h^*,t)G]/\Delta, \end{aligned} \tag{8}$$

где T^* — периодические функции $\xi(h^*,t)$ и $\eta(h^*,t)$ — производные от функций соответственно $\varphi(h,(T/T^*)t)$ и $\psi(h,(T/T^*)t)$ по h при $h = h^*$.

Доказательство. Преобразованием Ляпунова однородная часть в (7) приводится к системе с постоянными коэффициентами. Тогда вся преобразованная система записывается как (8).

Замечание 8. В явном виде преобразование дается в Приложении. Формулы (8) справедливы для НПР, отвечающего значению параметра $h = h^*$.

6. Притягивающий цикл управляемой системы

Из первого уравнения системы (8) выводится необходимое условие

$$\int\limits_0^{T^*} [\dot{\psi}(h^*, t)F - \dot{\varphi}(h^*, t)G]/\Delta(h^*, t)d\tau = 0 \tag{9}$$

существования T^*-периодического решения управляемой системы. В случае выполнения (9) интегрированием в (8) второго уравнения находится формула для переменной v. При этом единственность изолированного T^*-периодического решения, т.е. существование цикла выводится из анализа (9).

Условие (9) можно рассматривать как уравнение для определения значения параметра h^* для НПР. Поэтому заменой h^* в функциях φ и ψ на h из (9) получается амплитудное уравнение

$$I(h) \equiv \int\limits_0^{T^*} [\dot{\psi}(h, t)F - \dot{\varphi}(h, t)G]/\Delta(h, t)d\tau = 0. \tag{10}$$

Система (8) задает отображение $t : 0 \to T$ на периоде T^*. Неравенством $I'(h^*) \neq 0$ гарантируется единственность неподвижной точки отображения, а неравенством $I'(h^*) < 0$ — принадлежность собственного числа левой полуплоскости. Оно вычисляется как в [2].

Каждому простому корню $h = h^*$ уравнения (10) соответствует единственное T^*-периодическое решение уравнения (8), т.е. цикл управляемой системы (5). Соответствующее условие притяжения решений управляемой системы к циклу дается неравенством $I'(h^*) < 0$.

Таким образом, справедлива лемма 4.

Лемма 4. Простому корню амплитудного уравнения (10) *отвечает цикл управляемой системы* (5)*. При выполнении неравенства* $I'(h^*) < 0$ *цикл будет притягивающим.*

7. Поиск управления

Основой для поиска управления служит амплитудное уравнение (10). Согласно лемме 4 задача стабилизации колебания управляемой системы (5) решается управлениями F и G, для которых амплитудное уравнение (10) допускает простой корень h^*: $I'(h^*) < 0$.

Переменные x и y и действующие управления F и G входят в систему (5) равноправно. Равноправность сохраняется в амплитудном уравнении (10). Получается, что выделенное колебание можно стабилизировать любой парой $(F, 0)$ или $(0, G)$, а также в общем случае выбирать $F \neq 0,\ G \neq 0$. С другой стороны, для периодического решения переменные x и y задают положение и скорость точки на траектории. Это хорошо демонстрируется в приведенной системе (8), в которой переменной u задается положение точки, а v — ее скорость. Также видно, что при выборе пары $(F, 0)$ диссипация по переменной x приводит также к диссипации по y.

В соответствии с постановкой задачи в разделе 5 находится управление, стабилизирующее любое НПР семейства Σ, выделяемое значением параметра h. Значит, управление содержит некоторую характеристику K такую, что при подстановке в выражение для управления вместо числа K функции $K(h)$ амплитудное уравнение (10) будет выполняться тождественно, т.е.

$$\int\limits_0^{T(h)} \Phi(K(h), \varphi(h,t), \psi(h,t), \dot{\varphi}(h,t), \dot{\psi}(h,t))d\tau \equiv 0, \tag{11}$$

$$\Phi = (\dot{\psi}F - \dot{\varphi}G)/\Delta.$$

Без ограничения общности функция Φ предполагается линейной по K. Тогда тождество (11) выполняется с функцией

$$\Phi = [1 - Ka(h,t)]b(h,t). \tag{12}$$

Явные выражения для $a(h,t)$ и $b(h,t)$ получаются при подстановке функций $\varphi(h,t)$ и $\psi(h,t)$ вместе с их производными в Φ.

При дифференцировании тождества (11) по h с подставленной в него функцией (12) получается

$$[1 - Ka(h,T)]b(h,T)\frac{dT(h)}{dh} + \int\limits_0^{T(h)} \frac{d\Phi(h)}{dh}d\tau \equiv 0. \tag{13}$$

На НПР одна из производных $\dot{\varphi}(h,t)$ или $\dot{\psi}(h,t)$ в моменты времени $t = 0, T$ равняется нулю. Поэтому управления ищутся при условии $b(h,0) = b(h,T) = 0$, и при $h = h^*$ из (13) выводится равенство

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu, \quad \nu = \int\limits_0^{T^*} a(h^*,t)b(h^*,t)d\tau. \tag{14}$$

Само число K для заданного h^* вычисляется из амплитудного уравнения (11):

(15)
$$K(h^*) = \frac{\int\limits_0^{T(h^*)} b(h^*, t) d\tau}{\int\limits_0^{T(h^*)} a(h^*, t) b(h^*, t) d\tau}.$$

Зависимость $K(h)$ является характеристикой управления (и одновременно семейства Σ).

Таким образом, на основе леммы 4 формулируется общая теорема 2.

Теорема 2. Любое НПР глобального семейства Σ, соответствующее значению параметра $h = h^*$, стабилизируется управлениями с функцией (12), *если для характеристики $K(h)$ при $h = h^*$ выполняется неравенство $K'(h^*)\nu < 0$.*

Замечание 9. Применяется адаптивное управление с настраиваемым параметром h.

8. Некоторые управления

Теоремой 2 выделяется класс управлений. В частном случае механических систем в этот класс входит управление (см. [2–4]), которое естественным образом, без применения иных управлений, стабилизирует колебание. В нем применяется нелинейная сила, линейная по скорости, действующая в текущей точке траектории и приводящая к диссипации. Таким же свойством обладают и другие управления найденного класса.

Далее приводятся некоторые конкретные управления.

1. Рассматриваются управления

(16)
$$F = \alpha(1 - Kx^2)\dot{x}, \quad G = -\beta(1 - Ky^2)\dot{y}, \quad \alpha, \beta - \mathrm{const},$$

с характеристикой $K = K(h)$. Тогда из (11) выводится амплитудное уравнение

$$I(h) \equiv \int\limits_0^{T^*} [1 - K(\alpha x^2 + \beta y^2)]\dot{\varphi}(h, t)\dot{\psi}(h, t)/\Delta(h, t) d\tau = 0.$$

Отсюда находится функция

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^{T(h)} \dot{\varphi}(h, t)\dot{\psi}(h, t)/\Delta(h, t) d\tau}{\int\limits_0^{T(h)} [\alpha\varphi^2(h, t) + \beta\psi^2(h, t)]\dot{\varphi}(h, t)\dot{\psi}(h, t)/\Delta(h, t) d\tau}.$$

Наконец, формула (14) для стабилизации НПР со значением параметра $h = h^*$ приобретает вид

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu, \quad \nu = \int\limits_0^{T^*} (\alpha x^2 + \beta y^2)\dot{\varphi}(h^*, t)\dot{\psi}(h^*, t)/\Delta(h^*, t)d\tau.$$

З а м е ч а н и е 10. Для одного уравнения второго порядка $x = \dot{y}$, поэтому в (16) полагается: $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

З а м е ч а н и е 11. Результаты для механической системы, подверженной действию позиционных сил, в частности, потенциальных сил, известны (см. [2]). Для системы $\Delta(h, t) = 1$.

З а м е ч а н и е 12. В случае $Y(x, 0) \equiv 0$ получается редуцированная обратимая механическая система второго порядка 2. Для системы $\Delta(h, t) = 1$. К ней в [4] применяются управления (16).

2. Выбираются управления

$$F = (1 - Kx^2)\dot{y}, \quad G \equiv 0.$$

Тогда характеристика дается формулой

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^{T(h)} \dot{\psi}^2(h, t)/\Delta(h, t)d\tau}{\int\limits_0^{T(h)} \varphi^2(h, t)\dot{\psi}^2(h, t)/\Delta(h, t)d\tau}.$$

В рассматриваемом случае из (14) получается

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu, \quad \nu = \int\limits_0^{T^*} \varphi^2(h^*, t)\dot{\psi}^2(h^*, t)/\Delta(h^*, t)d\tau.$$

3. Пусть применяются управления

$$F \equiv 0, \quad G = -(1 - Ky^2)\dot{x}.$$

Для них вычисляется такая характеристика

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^{T(h)} \dot{\varphi}^2(h, t)/\Delta(h, t)d\tau}{\int\limits_0^{T(h)} \psi^2(h, t)\dot{\varphi}^2(h, t)/\Delta(h, t)d\tau},$$

а формула (14) записывается в виде

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh}\nu, \quad \nu = \int\limits_0^{T^*} \psi^2(h^*, t)\dot{\varphi}^2(h^*, t)/\Delta(h^*, t)d\tau.$$

Замечание 13. Примеры стабилизации НПР конкретных систем приведены в [2–4, 20]. Далее дается пример стабилизации колебания, принадлежащего вырожденному семейству.

9. Вырожденное семейство

На семействе НПР параметр h отражает монотонное изменение периода T вместе с h: на семействе $T'(h) \neq 0$. На вырожденном семействе неравенство не удовлетворяется. Для такого семейства теорема 1 о глобальном семействе не применима. Тем не менее развитый в статье подход применим к вырожденному семейству на двумерном многообразии.

Для вырожденного семейства вместо периода можно предложить другую характеристику семейства решений, а именно — амплитуду колебания. Также, как и период, амплитуда может монотонно меняться на семействе. Решения семейства параметризуются амплитудой колебания.

Далее приводится примечательный пример стабилизации (в большом) цикла, рожденного из вырожденного семейства периодических решений автономной системы.

Пример 3. Рассматривается управляемая система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} + x = \varepsilon(1 - Kx^2)y, \tag{17}$$

где K — постоянная. В ней к линейному осциллятору применяется управление (16), в котором с точностью до обозначений переменных берутся числа: $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

При $\varepsilon = 0$ колебания даются формулой $x = A\cos(t+\gamma)$, где γ — временной сдвиг на траектории. Записывается амплитудное уравнение

$$\int_0^{2\pi} (1 - KA^2\cos^2(t+\gamma))A^2\sin^2(t+\gamma)d\tau = 0.$$

Отсюда находятся два корня: $A = 0$ и $A = 2/\sqrt{K}$. Первый корень соответствует началу координат, второй корень — циклу, близкому к колебанию линейного осциллятора с амплитудой $2/\sqrt{K}$. Амплитуда A выбирается в качестве параметра семейства колебаний линейного осциллятора, при этом амплитуда цикла системы (17) задается параметром K в управлении.

Зависимость $K(A)$ дается формулой $K = 4/A^2$, производная $K'(A) < 0$, поэтому цикл стабилизируется в малом.

Таким образом, подход к стабилизации колебания, принадлежащего семейству НПР, развивается на семейство вырожденных периодических решений.

Замечание 14. В системе (17) по существу записано уравнение Ван дер Поля. Цикл системы (17) стабилизируется глобально.

10. Заключение

Невырожденное периодическое решение автономной системы может быть циклом или принадлежать семейству. На НПР период монотонно меняется вместе с параметром семейства. НПР продолжается по периоду на глобальное семейство НПР. Глобальное семейство НПР заполняет инвариантное многообразие и описывается редуцированной системой второго порядка. На глобальном семействе монотонное изменение периода сохраняется.

Задача стабилизации НПР решается для глобального семейства НПР, заполняющего глобальную область, которая предполагается притягивающей. Развивается подход, в котором управление строится для всего глобального семейства НПР, а для стабилизации выбранного НПР фиксируется параметр семейства. Применяется гладкое автономное управление, в результате которого реализуется притягивающий цикл, близкий к выделенному НПР глобального семейства. Подход применим также к вырожденному семейству периодических решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведение однородной системы.

Уравнения в вариациях для решения (6) записываются в виде

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= \frac{\partial X(x,y)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X(x,y)}{\partial y}\delta y,\\ \delta\dot{y} &= \frac{\partial Y(x,y)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}\delta y,\end{aligned} \tag{П.1}$$

где частные производные вычисляются для $x = \varphi(h,t),\ y = \psi(h,t)$.

Фундаментальная система решений в (П.1) дается матрицей

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\varphi(h,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial\varphi(h,t)}{\partial h} \\ \dfrac{\partial\psi(h,t)}{\partial t} & \dfrac{\partial\psi(h,t)}{\partial h} \end{Vmatrix} \tag{П.2}$$

с определителем

$$\Delta(h,t) = \Delta(h,0)\exp\int\limits_0^t \left(\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}\right) d\tau.$$

Записывается общее решение системы в (П.1)

$$\begin{aligned}\delta x &= c_1\dot{\varphi}(h,t) + c_2\varphi'(h,t),\\ \delta y &= c_1\dot{\psi}(h,t) + c_2\psi'(h,t)\end{aligned} \tag{П.3}$$

с постоянными c_1 и c_2. Разрешение системы (П.3) относительно c_1 и c_2 используется для перехода к новым переменным u, v:

$$u = -(\dot{\psi}\delta x - \dot{\varphi}\delta y)/\Delta, \quad v = [\eta(h,t)\delta x - \xi(h,t)\delta y]/\Delta. \tag{П.4}$$

При этом полагается

$$\xi(h,t) = \frac{T'(h)}{T^*}t\dot{\varphi}(h,t) + \frac{\partial\varphi(h,t)}{\partial h},$$

$$\eta(h,t) = \frac{T'(h)}{T^*}t\dot{\psi}(h,t) + \frac{\partial\psi(h,t)}{\partial h},$$

где функции $\xi(h^*,t),\ \eta(h^*,t)$ будут T^*-периодическими. Наконец, из выражения для v в (П.4) получается

$$v = \frac{T'(h)}{T^*}tu + (\psi'(h,t)\delta x - \varphi'(h,t)\delta y)/\Delta. \tag{П.5}$$

Подстановкой в формулы (П.4) и (П.5) первого решения из матрицы (П.2) вычисляется: $u = 0,\ v = 1$. Соответственно для второго решения записывается:

$$u = -(\dot{\psi}\varphi' - \dot{\varphi}\psi')/\Delta = 1, \quad v = \frac{T'(h^*)}{T^*}tu + u.$$

Таким образом, система (П.1) приводится к виду

$$\dot{u} = 0, \quad \dot{v} = \frac{T'(h^*)}{T^*}u.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
3. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с N степенями свободы // АиТ. 2020. № 9. С. 93–104.

   Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an N Degree of Freedom Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
4. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой обратимой механической системы // АиТ. 2022. № 9. С. 94–108.

   Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations of a Controlled Reversible Mechanical System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9.
5. *Тхай В.Н.* Режим цикла в связанной консервативной системе // АиТ. 2022. № 2. С. 90–106.
   Tkhai V.N. Cycle Mode in a Coupled Conservative System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 2. P. 237–251.

6. *Тхай В.Н.* Мехатронная схема стабилизации колебаний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 1. С. 9–16.
7. *Boubaker O.* The Inverted Pendulum Benchmark in Nonlinear Control Theory: a Survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. 233–242.
8. *Fradkov A.L* Swinging Control of Nonlinear Oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202.
9. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems: Virtual Constraints Approach // IEEE T. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176.
10. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of Energy Level Sets of Underactuated Mechanical Systems Exploiting Impulsive Braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293.
11. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., Mei R., Wang Z., Huynh V.Th.* Robust Stabilizing Control for Oscillatory Base Manipulators by Implicit Lyapunov Method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–226.
12. *Zevin A.A.* Nonlocal generalization of Lyapunov theorem // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1997. V. 28. No. 9. P. 1499–1507.
13. *Zevin A.A.* Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 1339–1349.
14. *Тхай В.Н.* Колебания и равновесия в обратимой механической системе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Матем. Механ. Астрон. 2021. Вып. 4. С. 709–715.

    Tkhai V.N. Equilibria and oscillations in a reversible mechanical system // Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2021. Vol. 54. No. 4. P. 447–451. https://doi.org/10.1134/S1063454121040191
15. *Tkhai V.N.* Spatial oscillations of a physical pendulum // Proc. 2022 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), IEEE Xplore: 29 June 2022.
    https://ieeexplore.ieee.org/document/9807507
    https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807507
16. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнени. М.: Наука, 1974.
17. *Тхай В.Н.* Закон о зависимости периода нелинейных колебаний от одного параметра // Прикл. матем. механ. Т. 75. Вып. 3. С. 430–434.
18. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
19. *Devaney R.L.* Blue Sky Catastrophes in Reversible and Hamiltonian Systems // Indiana University Mathematics Journal. 1977. V. 26. No. 2. P. 247–263.
20. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6.

    Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.

Поступила в редакцию 25.10.2022

После доработки 20.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023