

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru),
В.А. РАССКАЗОВА, канд. физ.-мат. наук (varvara.rasskazova@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

МОДЕЛЬ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПОТОКОВОГО ПРОИЗВОДСТВА НА ЭТАПЕ ОПЕРАТИВНОГО ГРАФИКОВАНИЯ¹

Исследуется задача оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графикования. В качестве примера рассматривается отделение внепечной обработки конвертерного передела сталелитейного производства в отрасли черной металлургии. Для решения этой задачи предлагается модель целочисленного линейного программирования, в полной мере описывающая специфику исследуемых технологических процессов. Важным преимуществом такого подхода является его масштабируемость для решения смежных оптимизационных задач в отрасли цеховой логистики, а также гибкость к изменчивости и тонкой настройке системы ограничений и целевого функционала. Программная реализация разработанной модели составляет основу модуля оперативного графикования системы оптимального планирования потокового производства, с использованием которой проводится масштабный вычислительный эксперимент на реальных данных.

Ключевые слова: математическое обеспечение, целочисленное линейное программирование, потоковое производство, оперативное планирование.

DOI: 10.31857/S0005231023050069, **EDN:** AIRUYJ

1. Введение

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП) широко используется в различных областях науки и техники, включая транспортное и производственное планирование. В [1, 2] были разработаны модели ЦЛП для решения прикладных задач планирования транспортных процессов на железной дороге. В [3] методы ЦЛП рассматривались в контексте решения задач о потоках

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

в сетях. В [4, 5] различные задачи теории расписаний были сведены к рассмотрению соответствующих задач ЦЛП. В [6] модели ЦЛП были предложены для решения некоторых задач промышленного планирования. Основные трудности, возникающие при сведении прикладных задач к рассмотрению соответствующих моделей ЦЛП, связаны с описанием комплексной системы ограничений, присущей многим задачам прикладной природы. В настоящей статье предлагается модель ЦЛП для решения задачи оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графирования, которая в полной мере отражает все значимые особенности рассматриваемых технологических процессов. Программная реализация предложенной модели составляет основу модуля оперативного графирования интеллектуальной системы принятия решений в задачах планирования и логистики потокового производства в отрасли черной металлургии.

В [7–10] приводится расширенный обзор приложений моделей ЦЛП, а также современных методов решения. В [7, 8] детально обсуждаются классические постановки и методы решения задач ЦЛП, включая булевое ЦЛП. В [9, 10] особое внимание уделяется разработке моделей ЦЛП для решения различных прикладных задач в области управления, планирования и принятия решений. Предлагаемый в настоящей статье подход также является масштабируемым и может быть продолжен для решения смежных задач оптимизации технологических процессов на металлургическом производстве. Такими смежными задачами могут быть транспортная цеховая логистика, управление крановым хозяйством, переназначение технологических маршрутов и другие.

Поскольку задача ЦЛП является хорошо известной \mathcal{NP} -трудной задачей, методы ее решения продолжают активно исследоваться и развиваться. Расширенный обзор современных методов решения задач ЦЛП представлен в [11, 12]. В настоящей статье не обсуждаются подробно методы решения задач ЦЛП. Основной целью здесь является разработка адекватной и масштабируемой математической модели, в полной мере описывающей технологические особенности рассматриваемых процессов. При этом для получения решения может быть использовано любое современное программное обеспечение.

В [13–15] обсуждались некоторые прикладные задачи, связанные с оптимальным планированием технологических процессов на металлургическом производстве, ориентированные в основном на повышение качества конечной продукции. В [13] была предложена методология для решения комплексных задач принятия решений в управлении металлургическим производством. Робастные оптимизационные подходы к решению смежных задач на сталеплавильном производстве были предложены в [16–18]. В [14, 15] также были разработаны алгоритмы для улучшения качества конечной продукции на стане горячей прокатки. В настоящей работе рассматривается идеологически другой подход к оптимизации производства, когда основное внимание уделяется энергоэффективности каждого этапа производственной цепочки. В частно-

сти, оптимальная реализация рассматриваемого в работе этапа оперативного графикования позволит существенно повысить качество производства в целом за счет повышения показателей исполнимости плана и равномерной загрузки оборудования.

Хорошо известно, что различные классы задач Machine Scheduling и Shop Scheduling могут быть успешно сведены к задаче Resources Constrained Project Scheduling Problem (RCPSP). Исследуемая в настоящей работе прикладная задача планирования потокового производства на этапе оперативного графикования также характеризуется свойствами, схожими с RCPSP. Для заданного множества ресурсов (машин, агрегатов внепечной обработки) требуется построить график обработки требований (работ, сталь-ковшей с плавками горячего металла) в рамках заданного набора технологических ограничений. Таким образом, исследуемая задача оперативного графикования потокового производства может быть классифицирована как RCPSP с фиксированной длительностью обработки и с ограничениями на время начала и завершения обработки каждого требования. Широкий обзор различных классов задач RCPSP представлен в [19].

RCPSP является \mathcal{NP} -трудной задачей в сильном смысле даже в своей простейшей постановке. Наилучший точный алгоритм для ее решения был предложен в [20] и доставляет решение на входах размера до $n = 60$, где n — количество требований. Ясно, что такая размерность оказывается недостаточной в практических задачах. Что касается алгоритмов полиномиальной сложности с гарантированной погрешностью (когда ошибка не превосходит заданной константы), они не известны даже для случая $K = 1$, где K — количество ресурсов. Популярный подход к решению RCPSP основан на формировании верхних и нижних оценок для оптимального решения. В [21, 22] верхние и нижние оценки решения RCPSP были получены с использованием методов линейного программирования. Среди эффективных полиномиальных алгоритмов для решения RCPSP следует выделить алгоритм List Scheduling (LS). Важным недостатком алгоритма LS является ограничение на размерность задачи — даже в случае небольшого (несколько единиц) количества требований алгоритм не гарантирует оптимальности полученного решения. Но, кроме того, LS оказывается недостаточно гибким к имплементации в модель специфических ограничений прикладного характера, таким, как посменный план производства (когда в указанный интервал времени должно быть исполнено заданное число требований в совокупности по всем машинам). То же самое верно и для различных модификаций LS, включая Ant Colony и другие метаэвристики. Таким образом, актуальной представляется разработка обобщенной модели, допускающей тонкую настройку ограничений и функционала с учетом особенностей рассматриваемых процессов. В настоящей статье для этих целей предлагается модель ЦЛП.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 1 приводится общая постановка задачи, в том числе в терминах предметной области. Раздел 2 посвящен описанию модели ЦЛП для решения исследуемой задачи и алгорит-

мов формирования функционального пространства. В разделе 3 приводятся результаты вычислительного эксперимента с использованием разработанной модели ЦЛП. В заключении обсуждаются пути дальнейшего развития тематики, наращивание функционала модели на случай несовместности системы ограничений, а также продолжение методологии в решении смежных задач цеховой логистики.

2. Математическая модель задачи оперативного графирования потокового производства

Под задачей оперативного графирования потокового производства понимается формирование детализированного графика движения требований (работ, подлежащих исполнению) по машинам цеха с ограничениями на последовательность машин в технологической цепочке, интервалы и длительность обработки каждого требования в зависимости от заданных характеристик и типа машины. Рассмотрим участок потокового производства на примере отделения внепечной обработки конвертерного сталелитейного цеха. Обозначим:

T — количество различных типов машин для внепечной обработки стали (установка доводки стали, агрегат циркуляционного вакуумирования стали и т.п.),

$k(i) \in \mathbb{N}$ — количество машин типа $i = \overline{1, T}$ (установка доводки стали № 1, установка доводки стали № 2, установка печь-ковш № 1 и т.д. по каждому типу машин),

$$K = \sum_{i=1}^T k(i)$$

— количество всех машин в цехе.

Нормативную длительность транспортировки (минимальное время в минутах) для каждой пары машин в цехе определим квадратной матрицей вида

$$\Delta = \|\delta_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, K},$$

где $\delta_{ij} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и выполняются следующие условия:

- 1) равенство $\delta_{ij} = 0$ достигается в том и только в том случае, когда транспортировка работы (сталь-ковша) от машины i до машины j запрещена;
- 2) транспортировка допускается только между различными машинами, т.е.

$$\delta_{ii} = 0 \quad \text{для всех } i = \overline{1, K};$$

- 3) длительность транспортировки для любой пары машин не зависит от начала движения, т.е.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad \text{для всех } i, j = \overline{1, K}.$$

При последовательном назначении нескольких работ на одну и ту же машину требуется время на ее настройку. Это обусловлено тем, что разные работы могут иметь разные технологические характеристики и требования к обработке и тогда машина (агрегат внепечной обработки) должна быть подготовлена для выполнения соответствующих требований. И даже при одинаковых технологических требованиях необходима проверка работоспособности машины перед назначением ее на выполнение следующей работы. В предположении, что нормативы настройки определяются только типом машины, обозначим вектор длительностей настройки через

$$\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_T),$$

где π_i — минимально необходимое время (в минутах).

В период планирования работ для любой машины могут быть предусмотрены ремонтные и обслуживающие мероприятия — технический осмотр (ТО) или планово-предупредительный ремонт (ППР). Обозначим множество всех запланированных ТО и ППР (далее ТО) через

$$R = \{\rho_i | i = 1, \dots, Ro\},$$

где Ro — число таких осмотров и ремонтов. Для каждого элемента ρ_i определены параметры $(s(\rho_i), f(\rho_i), m(\rho_i))$, где $s(\rho_i), f(\rho_i)$ — время начала и завершения, а $m(\rho_i) \in 1, \dots, K$ — идентификатор машины (агрегата внепечной обработки), для которой планируется ТО.

Сортамент стали является важнейшей характеристикой работ, подлежащих назначению на машины. Именно сортамент стали определяет технологическую инструкцию для формирования работы уже на уровне прогнозного графикования. Так, в частности, для разных сортов сталей определены различные нормативы по минимальной и максимальной допустимым выдержкам металла в сталь-ковшах. На этапе оперативного графикования сортамент стали также играет определяющую роль, поскольку различные сортаменты подлежат различным процедурам внепечной обработки (по типу и по количеству агрегатов в технологическом маршруте, по длительности обработки стали на агрегате определенного типа и т.п.) Пусть для рассматриваемого потокового производства (конвертерного цеха) задано множество сортов сталей

$$S = \{\sigma_i | i = \overline{1, s}\}.$$

Нормативные минимальную и максимальную длительности обработки для каждого сортамента стали и для каждого типа машин определим матрицами

$$M = \|\mu_{ij}\|, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, T}$$

и

$$\hat{M} = \|\hat{\mu}_{ij}\|, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, T},$$

где $\mu_{ij}, \hat{\mu}_{ij} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ характеризуют соответственно минимальное и максимальное время обработки (в минутах) для стали сортамента i на машине типа j и $\mu_{ij} = \hat{\mu}_{ij} = 0$, если сталь сортамента i не подлежит обработке на машине типа j .

Пусть для каждого сортамента $\sigma_i \in S$ также определены допустимые типы технологических маршрутов (множество обобщенных технологических маршрутов, обобщенных ТМ), т.е.

$$P(\sigma_i) = \{p_1(i), \dots, p_n(i)\},$$

где $n = n(\sigma_i) \in \mathbb{N}$ — количество различных обобщенных ТМ для обработки сортамента σ_i , и каждый обобщенный ТМ $p_j(i)$ представляет собой последовательность типов машин вида

$$p_j(i) = (\tau_1(i, j), \dots, \tau_l(i, j)),$$

где $l = l(\sigma_i, j) \in \mathbb{N}$ — количество машин в обобщенном ТМ j для обработки сортамента σ_i , и $\tau_k(i, j) \in \{1, 2, \dots, T\}$ — тип k -й машины в рассматриваемом ТМ. При этом для всех σ_i множество $P(\sigma_i)$ содержит первым элементом основной ТМ и допустимые альтернативные в порядке убывания приоритета. По существу приоритет определяется показателем энергоэффективности производства, следующего по данному ТМ. Так, в частности, для основного ТМ закладывается меньшая совокупная длительность транспортировки (даже с учетом минимально возможной длительности обработки на каждой машине) с тем, чтобы машины не простаивали, а сырье не остывало (дополнительный нагрев требует значительных расходов ресурсов).

2.1. Исходные данные

Пусть $Z = \{\zeta_i | i = \overline{1, z}\}$ — множество работ прогнозного графика. Для каждой работы ζ_i заданы $(k_i, r_i, u_i, d_i, \sigma_i)$, где k_i — позиция начала (конвертер), r_i — время начала, u_i — позиция завершения (машина непрерывной разливки стали), d_i — время завершения, $\sigma_i \in S$ — сортament стали. Необходимо определить конкретные технологические маршруты и сроки выполнения всех работ.

Поскольку позиции начала и завершения работ прогнозного графика по сути своей также являются некоторыми опорными точками цеха, то определим нормативную длительность транспортировки работы (сталь-ковша) от каждой такой позиции до остальных машин. Обозначим:

$$\Delta' = \|\delta'_{ij}\|, \quad i = \overline{1, K'}, \quad j = \overline{1, K},$$

где K' — количество начальных позиций в цехе (количество конвертеров), δ'_{ij} — минимальное время транспортировки (в минутах) от начальной позиции i до машины j , и $\delta'_{ij} = 0$, если транспортировка запрещена. Аналогично

$$\Delta'' = \|\delta''_{ij}\|, \quad i = \overline{1, K''}, \quad j = \overline{1, K},$$

где K'' — количество конечных позиций в цехе (количество установок непрерывной разливки стали), δ''_{ij} — минимальное время транспортировки (в минутах) от машины j до конечной позиции i , и $\delta''_{ij} = 0$, если транспортировка запрещена.

2.2. Постановка задачи

Задача формирования оперативного графика назначения плавок (задача оперативного графикования) может быть сформулирована следующим образом. Для каждой работы $\zeta_i \in Z$, $i = \overline{1, z}$ должен быть назначен детализированный по времени и по машинам технологический маршрут (расширенный ТМ) вида

$$f(\zeta_i) = (s_1(i), m_1(i), f_1(i), \dots, s_l(i), m_l(i), f_l(i))$$

с ограничениями:

- 1) для любого $f(\zeta_i)$ такого, что $\sigma = \sigma_i$, и некоторого $j \in \{1, \dots, n(\sigma)\}$ выполняется $l = l(\sigma, j)$, т.е. длина (по количеству машин) расширенного ТМ соответствует длине некоторого обобщенного ТМ для обработки сортамента σ ;
- 2) для любого $f(\zeta_i)$ и соответствующего $j \in \{1, \dots, n(\sigma)\}$ выполняется

$$t(m_k(i)) = \tau_k(i, j)$$

для всех $k = \overline{1, l}$, где $t(m_k(i))$ — тип k -й машины в расширенном ТМ;

- 3) для всех $f(\zeta_i)$ и $m_k(i), m_h(i)$ таких, что $k < h$, выполняется

$$s_h(i) - f_k(i) \geq \delta_{kh},$$

где δ_{kh} — минимальная длительность транспортировки от машины $m_k(i)$ до машины $m_h(i)$;

- 4) для всех $f(\zeta_i)$ и $m_k(i)$ таких, что $t(m_k(i)) = t$, выполняется

$$\mu_{\sigma t} \leq f_k(i) - s_k(i) \leq \hat{\mu}_{\sigma t},$$

где $\mu_{\sigma t}, \hat{\mu}_{\sigma t}$ — соответственно минимальная и максимальная длительности обработки сортамента σ на машине типа t ;

- 5) для любых $f(\zeta_i), f(\zeta_j)$ и $m = m_k(i) = m_h(j)$ таких, что $t(m) = t$, выполняется

$$\begin{cases} s_h(i) - f_k(j) \geq \pi_t, & \text{если } s_k(i) \leq s_h(j), \\ s_k(i) - f_h(j) \geq \pi_t & \text{иначе,} \end{cases}$$

где π_t — минимальное время (в минутах), необходимое для настройки машины типа t при последовательном назначении работ;

6) для всех $f(\zeta_i)$ и ТО $\rho_j \in R$ таких, что $m_k(i) = m = m(\rho_j)$ для некоторого k , выполняется

$$\begin{cases} s_k(i) > s(\rho_j), \\ s_k(i) \geq f(\rho_j) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} s_k(i) < s(\rho_j), \\ f_k(i) \leq s(\rho_j), \end{cases}$$

где $s(\rho_j)$, $f(\rho_j)$ — время начала и завершения ТО на машине m ;

7) для всех $f(\zeta_i)$ таких, что $k_i = k$ и $m_1(i) = m$, выполняется

$$s_1(i) - r_i \geq \delta'_{km},$$

где $s_1(i)$ — время прибытия работы i на первую машину в расширенном ТМ $f(\zeta_i)$, r_i — начало выполнения i -й работы, k_i — позиция начала выполнения работы, δ'_{km} — минимальное время транспортировки (в минутах) от позиции начала выполнения работы до первой машины в расширенном ТМ;

8) для всех $f(\zeta_i)$ таких, что $u_i = u$ и $m_l(i) = m$, выполняется

$$d_i - f_l(i) \geq \delta''_{um},$$

где $f_l(i)$ — время завершения выполнения работы i на последней машине в расширенном ТМ, d_i — время завершения выполнения i -й работы, δ''_{um} — минимальное время транспортировки (в минутах) от последней машины в расширенном ТМ до позиции завершения работы.

Целевой функционал определим как минимальную совокупную длительность транспортировки, что соответствует максимальной совокупной длительности обработки всех требований на каждой машине в ТМ обработки, т.е.

$$\sum_{i=1}^z \sum_{j=1}^{l(i)} (f_j(i) - s_j(i)) \longrightarrow \max,$$

где $l(i)$ — длина (по количеству машин) ТМ $f(\zeta_i)$, назначенного для исполнения работы $\zeta_i \in Z$. Выбор данного функционала обусловлен тем, что длительная транспортировка влечет необходимость в доводке требований на очередной машине в ТМ и сопутствующие дополнительные расходы ресурсов (температурный или химический нагрев). Таким образом, суммарная длительность транспортировки, как уже было отмечено при обсуждении приоритетов ТМ, отражает показатель энергоэффективности процесса, а минимизация ее (т.е. максимизация длительности обработки, времени пребывания на агрегате) соответствует целям повышения энергоэффективности.

Другими словами, задача оперативного графикования состоит в том, чтобы для каждого требования был построен детальный ТМ в условиях заданных ограничений на последовательность и длительность обработки на каждой машине, а также с учетом нормативной длительности транспортировки. Для решения этой задачи предлагается модель ЦЛП, обсуждению и описанию которой посвящен следующий раздел.

3. Модель целочисленного линейного программирования для решения задачи оперативного графического потокового производства

В моделировании прикладных задач методами ЦЛП основополагающая роль отводится структуре функционального пространства (переменных модели), поскольку эффективная и адекватная реализация этого этапа закладывает как структуру системы ограничений, так и последующие возможности тонкой настройки модели с учетом дополнительных технологических особенностей исследуемых процессов. Остановимся подробнее на этой процедуре.

В алгоритме 1 для каждого требования формируется набор булевских переменных, соответствующих обработке требования на одной из машин цеха с указанием времени начала и окончания, а также длительности операций. При этом:

- функция $end(i, s, j, k)$ — фиксирует $l(s, j) - k$ машин в маршруте (начиная с окончания) с минимальной длительностью обработки и транспортировки, где i — идентификатор требования, j — обобщенный ТМ для обработки сортамента $s = \sigma_i$, и k — количество фиксируемых машин;
- функция $start(i, s, j, k)$ — фиксирует $k - 1$ машин в маршруте (начиная с начала) аналогично функции $end(i, s, j, k)$;
- функция $move(i, s, j, k, r)$ — для фиксированных начала и окончания маршрута формирует варианты начала и окончания обработки требования i на k -й машине с минимальной длительностью обработки.

Алгоритм 1. Формирование функционального пространства

- | | | |
|-----|--|---|
| 1: | $c = 0$ | ▷ глобальный счетчик переменных |
| 2: | $s_1 = 0, s_2 = 0, f_1 = 0, f_2 = 0$ | ▷ вспомогательные счетчики |
| 3: | Для всех $i = \overline{1, z}$ выполнять | |
| 4: | $s = \sigma_i$ | ▷ сортмент |
| 5: | $n = n(s)$ | ▷ количество обобщенных ТМ |
| 6: | Для всех $j = \overline{1, n}$ выполнять | |
| 7: | Для всех $k = \overline{1, l(s, j)}$ выполнять | |
| 8: | Если $k \neq l(s, j)$ то | |
| 9: | $end(i, s, j, k)$ | ▷ зафиксировать $l(s, j) - k$ машин от конца ТМ |
| 10: | Иначе | |
| 11: | $s_1 = 0, s_2 = 0$ | |
| 12: | Если $k \neq 1$ то | |
| 13: | $start(i, s, j, k)$ | ▷ зафиксировать $k - 1$ машин от начала |
| 14: | Иначе | |
| 15: | $f_1 = 0, f_2 = 0$ | |
| 16: | $t = \tau_k(s, j)$ | ▷ тип k -й машины |
| 17: | Для всех $r = \overline{1, k(t)}$ выполнять | |
| 18: | $move(i, s, j, k, t, r)$ | ▷ перемещение k -й машины |
-

Алгоритм 2. Функция $end(i, s, j, k)$

- 1: Для всех $h = \overline{1, l(s, j) - k}$ выполнять
 - 2: $t = \tau_{l(s, j) - h + 1}(s, j)$
 - 3: Для всех $r = \overline{1, k(t)}$ выполнять
 - 4: $m = m(t, r)$ ▷ идентификатор r -й машины типа t
 - 5: Для всех $ii = \overline{f_1, f_2}$ выполнять
 - 6: $c = c + 1$
 - 7: Если $ii = 0$ то
 - 8: $u = u_i$
 - 9: $f(c) = d_i - \delta'_{um}$ ▷ отступить влево длительность транспортировки
 - 10: Иначе
 - 11: $f(c) = s(ii) - \delta_{m(ii)m}$
 - 12: $s(c) = f(c) - \mu_{st}$ ▷ отступить влево длительность обработки
 - 13: $id(c) = i, p(c) = j, num(c) = l(s, j) - h + 1, \alpha(c) = j$
 - 14: Если $f_2 = 0$ то
 - 15: $f_1 = c - k(t) + 1$
 - 16: Иначе
 - 17: $f_1 = f_2 + 1$
 - 18: $f_2 = c$
-

Алгоритм 3. Функция $start(i, s, j, k)$

- 1: Для всех $h = \overline{1, k - 1}$ выполнять
 - 2: $t = \tau_h(s, j)$
 - 3: Для всех $r = \overline{1, k(t)}$ выполнять
 - 4: $m = m(t, r)$
 - 5: Для всех $ii = \overline{s_1, s_2}$ выполнять
 - 6: $c = c + 1$
 - 7: Если $ii = 0$ то
 - 8: $v = k_i$
 - 9: $s(c) = r_i + \delta'_{vm}$ ▷ отступить вправо длительность транспортировки
 - 10: Иначе
 - 11: $s(c) = f(ii) + \delta_{m(ii)m}$
 - 12: $f(c) = s(c) + \mu_{st}$ ▷ отступить вправо длительность обработки
 - 13: $id(c) = i, p(c) = j, num(c) = h, \alpha(c) = j$
 - 14: Если $s_2 = 0$ то
 - 15: $s_1 = c - k(t) + 1$
 - 16: Иначе
 - 17: $s_1 = s_2 + 1$
 - 18: $s_2 = c$
-

Алгоритм 4. Функция $move(i, s, j, k, t, r)$

```
1:  $m = m(t, r)$ 
2: Для всех  $ii = \overline{s_1, s_2}$  выполнять
3:   Для всех  $jj = \overline{f_1, f_2}$  выполнять
4:     Если  $ii = 0$  то
5:        $t_1 = r_i, v = k_i, \delta = \delta'_{vm}$ 
6:     Иначе
7:        $t_1 = f(ii), \delta = \delta_{m(ii)m}$ 
8:     Если  $jj = 0$  то
9:        $u = u_i, t_2 = d_i - \delta''_{um} - \mu_{st}$ 
10:    Иначе
11:       $t_2 = s(jj) - \delta_{m(ii)m} - \mu_{st}$ 
12:    Пока  $t_2 - t_1 \geq \delta$  выполнять
13:       $c = c + 1, s(c) = t_2, f(c) = s(c) + \mu_{st}, id(c) = i, p(c) = j, num(c) = k,$   

 $m(c) = m, \alpha(c) = j, t_2 = t_2 - step$  ▷ переместить начало обработки  

на  $k$ -й машине влево
```

Ясно, что реализация алгоритма 1 возможна и в иной конфигурации, когда в первую очередь фиксируется начало маршрута и только затем его окончание. В общем случае формируемые в разных подходах подмножества переменных модели могут оказаться различными, что влечет за собой структурные различия последующих ограничений и функционала. Кроме того, в предложенном варианте для каждого требования i фиксируется минимальная длительность обработки на каждой машине, что снижает оптимизационный потенциал. Однако с целью сокращения размерности модели в целом задача оперативного графикования потокового производства может быть деконструирована на два этапа, первым из которых и является предложенная конфигурация алгоритма 1 с фиксированной минимальной длительностью обработки. Последующее расширение в допустимых пределах для каждой машины может быть реализовано в рамках вспомогательной модели ЦПП с гарантированным решением, что составляет область развития предложенной методологии.

Отдельно отметим содержательный смысл параметра $step$ в алгоритме 4 — это настраиваемый параметр, соответствующий дискрету формирования функционального пространства. Так, в частности, при достаточно малом значении параметра $step$ переменные, соответствующие одному и тому же требованию i и обработке по одному и тому же ТМ j , будут иметь различия в длительности транспортировки пропорционально величине параметра $step$. Соответственно малые значения параметра $step$ (в экстремальном случае, равном 1 мин) существенно увеличивают размерность функционального пространства. В этой связи возникает естественная задача поиска баланса между величиной параметра $step$ и быстродействием модели в целом (поскольку большая размерность функционального пространства влечет значительное увеличение расхода вычислительных ресурсов).

По результатам работы алгоритма 1 (включая вложенные функции алгоритмов 2, 3 и 4) будут сформированы массивы параметров переменных модели ЦЛП. При этом для каждой переменной $x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, c}$ определены

$$id_i, p_i, num_i, m_i, s_i, f_i, \alpha_i,$$

где id_i — идентификатор работы, для которой производится назначение машины, p_i — обобщенный ТМ, num_i — порядковый номер машины в ТМ, m_i — идентификатор машины, s_i — время начала обработки, f_i — время завершения обработки, α_i — коэффициент целевой функции, определяемый в простейшем случае как порядковый номер выбранного обобщенного ТМ.

Важнейшим ограничением в решении задачи оперативного графирования является выполнение всех работ множества Z . Тогда

$$(1) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, num_i = 1\} = 1$$

для всех $id = \overline{1, z}$. Условие (1) обеспечивает выбор единственного расширенного ТМ для выполнения каждой работы. Причем признак $num_i = 1$ позволяет избежать конструкции “если, то”, связанной с длиной выбираемого ТМ.

Далее выбранное в ограничении (1) начало ТМ должно быть продолжено в соответствии с его длиной по количеству машин, т.е.

$$(2) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, p_i = p\} = l(\sigma, p) \cdot \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, p_i = p, num_i = 1\}$$

для всех $id = \overline{1, z}$ и $p = \overline{1, n(\sigma)}$, где $\sigma = \sigma_{id}$. Другими словами, ограничение (2) призвано “отследить” выбор полного (по количеству машин) ТМ, начало которого определяется ограничением (1). В то же время ограничение (2) не противоречит выбору таких $x_i = x_j = 1$, что $num_i = num_j = k$ для некоторых $k > 1$. С целью исключения подобных ошибок введем в рассмотрение следующие ограничения:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : id_i = id, p_i = p, num_i = k\} \leq 1$$

для всех $id = \overline{1, z}$, $p = \overline{1, n(\sigma)}$ и $k = \overline{2, l(\sigma, p)}$, где $\sigma = \sigma_{id}$.

Таким образом, ввиду ограничений (1) в решение будет выбран единственный ТМ. Далее ввиду ограничений (2) этот ТМ будет достроен до $l(\sigma, p)$ по числу машин. Причем каждая машина k будет выбрана только один раз ввиду ограничения (3).

Сформулируем теперь ограничения на производительность машин. При последовательном назначении работ на одну и ту же машину время на подготовку должно быть не менее заданного параметра производительности для

соответствующего типа машины, т.е.

$$(4) \quad x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^c \{x_j : m_i = m_j, |s_i - f_j| \leq \pi_t\} \leq 1$$

для всех $m_i = \overline{1, K}$, где $t = \tau_k(\sigma, p)$ при $k = \text{num}_i$, $id_i = id$, $\sigma = \sigma_{id}$, $p = p_i$, и π_t — нормативная длительность подготовки машины типа t . Ясно, что ограничения (4) оказываются избыточными, поскольку некоторые из них могут быть подмножеством других. Для формирования набора максимальных по включению ограничений вида (4) может быть использовано простое лексикографическое правило (попарное сравнение двоичных строк длины K , где каждая строка соответствует ограничению для переменной x_i и j -й элемент строки принимает значение 1, если m_j входит в ограничение для x_i).

Ограничения на ТО могут быть введены на этапе формирования функционального пространства посредством обращения в нуль всех переменных, для которых

$$(5) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : s(\rho) \leq s_i \leq f(\rho), m_i = m(\rho)\} = 0,$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^c \{x_i : s_i \leq s(\rho) \leq f_i, m_i = m(\rho)\} = 0$$

для всех запланированных ТО $\rho \in R$, где $m(\rho)$ — машина, на которой планируется ТО, $s(\rho)$, $f(\rho)$ — начало и завершение. Другими словами, для любых x_i таких, что время начала или завершения обработки требования i на машине m_i приходится на период запланированного ТО этой машины, должно выполняться $x_i = 0$. Это условие может быть выполнено как на уровне формирования множества переменных модели (за счет предварительной проверки), так и на уровне ограничений. Последний вариант оказывается более предпочтительным в условиях модифицированной постановки поиска максимальной совместной подсистемы ограничений, когда часть из них может быть нарушена в соответствии с установленными приоритетами. Однако такая постановка остается за пределами настоящего исследования и составляет направление развития.

В общем случае целевым функционалом в задаче оперативного графирования потокового производства выступает показатель энергоэффективности. Однако с целью декомпозиции задачи и снижения размерности основной модели в простейшей конфигурации коэффициентами переменных используются порядковые номера обобщенных ТМ — основной ТМ является более энергоэффективным по сравнению с альтернативными, причем для каждого следующего альтернативного ТМ имеет место снижение показателей энергоэффективности обработки. Таким образом, задача состоит в минимизации

целевой функции вида

$$(7) \quad \sum_{i=1}^c \alpha_i \cdot x_i \longrightarrow \min$$

с ограничениями

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, num_i = 1\} = 1, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, p_i = p\} = l(\sigma, p) \cdot \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, p_i = p, num_i = 1\}, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: id_i = id, p_i = p, num_i = k\} \leq 1, \\ x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^c \{x_j: m_i = m_j, |s_i - f_j| \leq \pi_t\} \leq 1, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: s(\rho) \leq s_i \leq f(\rho), m_i = m(\rho)\} = 0, \\ \sum_{i=1}^c \{x_i: s_i \leq s(\rho) \leq f_i, m_i = m(\rho)\} = 0, \\ x_i \in \{0, 1\}, \end{array} \right.$$

где

- $id = \overline{1, z}$ — множество требований, подлежащих назначению на последовательность машин,
- $p = \overline{1, n(\sigma)}$ — множество обобщенных ТМ для обработки сортамента $\sigma = \sigma_{id}$,
- $l(\sigma, p)$ — длина ТМ по числу машин,
- $k = \overline{1, l(\sigma, p)}$ — порядковый номер машины в ТМ p ,
- $t = \tau_k(\sigma, p)$ — тип k -й машины в ТМ p ,
- π_t — нормативная длительность настройки для машины типа t ,
- $\rho \in R$ — множество запланированных ТО,
- $m(\rho)$ — машина, на которой планируется ТО ρ ,
- $s(\rho), f(\rho)$ — начало и завершение ТО ρ .

Для решения задачи (7) с ограничениями (8) может быть использовано любое прикладное программное обеспечение (ПО) для решения задач математического программирования (IBM CPLEX, Analytic Solver VBA Excel, Gurobi, Google OR-Tools и т.д.) или встроенные библиотеки языков программирования высокого уровня (Optimization Toolbox, CVXOPT, HeO и др.).

4. Вычислительный эксперимент

Модель ЦЛП (7), (8) была реализована на языке Python версии 3.8.5 с использованием библиотеки PuLP для поиска решения в модуле оперативного графирования системы планирования потокового производства. Простейшая схема компонент системы и потоков данных представлена на рисунке, где

- [1] запрос параметров суточного задания, передача набора серий разливки с указанием времени начала разливки, количества плавок, идентификаторов серий;
- [2] запрос параметров суточного задания по идентификаторам серий (сортament стали, цикл разливки, рекомендованный технологический маршрут внепечной обработки);
- [3] передача параметров суточного задания из внешних систем в базу данных;
- [4] передача параметров суточного задания из базы данных на ВЭБ-интерфейс Пользователя;
- [5] запрос на расчет прогнозного графика, передача набора серий разливки с указанием начала разливки, количества плавок и параметров суточного задания;
- [6] запрос нормативно-справочной информации по допустимым выдержкам по сортаментам и статистики расходов энергоресурсов в зависимости от длительности обработки (формирование коэффициентов целевого функционала);
- [7] передача нормативно-справочной информации из базы данных в модуль прогнозного графирования;
- [8] передача параметров прогнозного графика (перечень плавок с указанием сортамента, выдержки, времени окончания продувки на конвертере

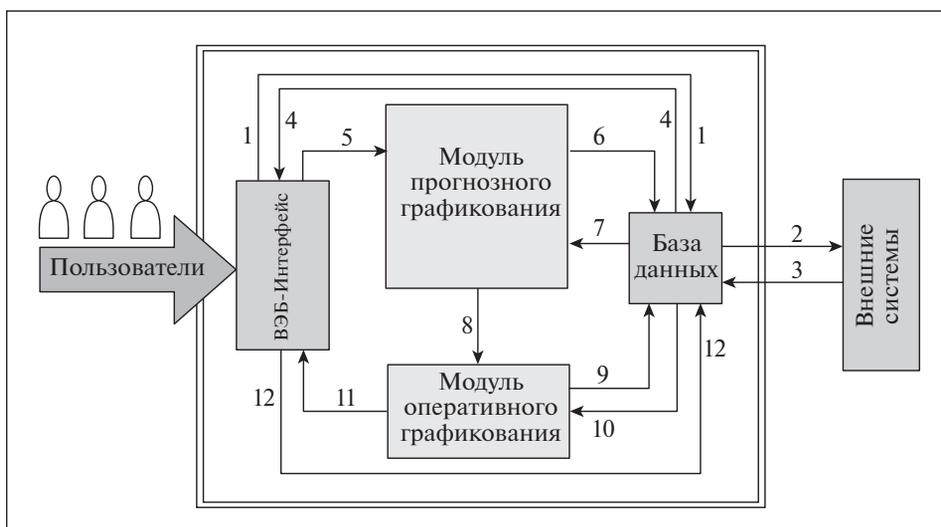


Схема компонент системы.

и начала разливки, рекомендованного технологического маршрута внепечной обработки);

- [9] запрос нормативно-справочной информации (альтернативные технологические маршруты внепечной обработки, длительность обработки на каждой машине в зависимости от сортамента и выдержки, длительность транспортировки сталь-ковша с плавкой между агрегатами цеха);
- [10] передача нормативно-справочной информации из базы данных в модуль оперативного графирования;
- [11] передача результатов расчета прогнозного и оперативного графиков (полный маршрут обработки каждой плавки в суточном задании с указанием времени начала и окончания обработки на каждом агрегате, включая конвертер и машину непрерывного литья);
- [12] сохранение результатов расчета прогнозного и оперативного графиков для последующего отображения (по запросу) и анализа.

Вычислительный эксперимент проводился на персональном компьютере с характеристиками Intel Core m3 1.2 GHz, 8Gb 1867 MHz LPDDR3, macOS 10.13.6. Входными данными выступили данные о фактически реализованных сценариях производства, зафиксированных в конвертерном цехе № 2 Новолипецкого металлургического комбината (г. Липецк, Россия). Для каждого зафиксированного суточного задания (по месяцам 2020 и 2021 г.) был предложен оптимизированный график внепечной обработки (оперативный график) и сравнивались средневзвешенные затраты по расходу энергоресурсов каждого типа в денежном эквиваленте. Результаты проведенного вычислительного эксперимента частично представлены в табл. 1, 2, где были использованы следующие обозначения.

- В столбце “Дата” указан день рассматриваемого месяца, для которого было зафиксировано суточное задание и произведено сравнение затрат на производство в фактически реализованном сценарии и в оптимизированном, полученном с помощью разработанной модели ЦЛП.
- В столбцах “ F_1 ” и “ F_2 ” приводятся значения целевой функции фактически реализованного и оптимизированного сценариев соответственно — суммарный расход на производство всех плавков суточного задания по типам ресурсов в денежном эквиваленте (в сотнях рублей). Данные значения рассчитываются по каждой плавке, исходя из маршрута ее обработки и с учетом заданных средних расходов (например, расход электродов при нагреве плавки низколегированного сортамента на установке печь-ковш составляет 25 кг, что в денежном выражении эквивалентно 4644,2 руб).
- В столбце “ Δ , %” указана разница между значениями “ F_1 ” и “ F_2 ”, т.е. если значение в столбце “ Δ , %” отрицательно, то достигнутое значение функционала в оптимизированном сценарии оказывается больше, чем для фактически реализованного (это объясняется тем, что в фактически реализованных сценариях некоторые технологические ограничения

модели могут быть нарушены, что по сути влечет принципиально другую постановку задачи в части нормативно-справочной информации).

- В столбце “ t , с” указано процессорное время в секундах, затраченное на поиск решения для оптимизированного сценария.

Таблица 1. Май, 2020

Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с	Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с
01	1961,6	1852,1	5,58	7,11	02	1859,8	1759	5,42	5,20
03	1730,9	1690,2	2,35	3,22	05	1953,4	1843,8	5,61	6,64
06	1816,3	1627,7	10,38	3,92	07	1894,8	1835	3,16	4,64
08	1893,3	1832,8	3,20	9,25	09	1801,9	1717,2	4,70	8,69
10	2162,4	1823,8	15,66	60,75	11	1673,3	1251,6	25,20	1,08
12	1426,8	1101,8	22,78	0,55	13	2921,7	1131,3	61,28	0,74
14	1632,0	931,5	42,92	0,44	15	1364,2	1080,5	20,80	0,88
16	1434,8	1086,9	24,25	0,50	17	1488,4	1133,2	23,86	0,42
18	1527,8	1283,7	15,98	0,74	19	1641,3	1233,4	24,85	0,51
20	1781,4	1383	22,36	0,52	21	1877,2	1704,7	9,19	2,65
22	1820,3	1723,2	5,33	16,07	24	1990,7	2065,5	-3,76	33,47
25	1787,1	1632,2	8,67	34,85	26	1887,2	1925,6	-2,03	10,34
27	1905,0	1770,6	7,06	3,94	28	2136,1	1982,8	7,18	3,71
29	1887,9	1990,8	-5,45	25,17	30	2017,1	1891,7	6,22	26,67
31	2052,3	1935,3	5,70	15,39					

Таблица 2. Июнь, 2020

Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с	Дата	F_1	F_2	Δ , %	t , с
01	2297,0	2205,9	3,97	23,05	02	1952,1	1833,3	6,09	16,67
03	2291,1	1815,4	20,76	7,52	04	2045,3	1659,5	18,86	10,29
05	1997,5	2005,2	-0,39	24,68	06	1915,3	1880,5	1,82	4,63
07	1942,8	2044,4	-5,23	6,93	08	1599,5	1321,3	17,39	5,67
09	1648,8	1299,8	21,17	3,79	10	1786,3	1535,1	14,06	5,11
11	2228,7	1903,2	14,60	32,12	12	1723,8	1507,4	12,55	2,69
13	1483,7	1228	17,23	0,66	14	1554,5	984,9	36,64	0,46
15	1195,7	1030,9	13,78	0,67	16	1104,1	873,9	20,85	0,71
17	1461,5	1123,6	23,12	0,55	18	918,9	748,1	18,59	0,67
19	1692,3	1439,8	14,92	1,71	20	1959,7	1790,9	8,61	20,54
21	1956,8	1566,8	19,93	3,37	22	2305,3	2126,6	7,75	23,25
23	1986,4	1567,8	21,07	24,78	24	1839,5	1807,7	1,73	41,31
25	1732,3	1556	10,18	7,64	26	1721,3	1742,4	-1,23	22,03
27	1921,4	1691,6	11,96	4,98	28	1679,7	1424,8	15,18	13,14
29	1831,0	1462,7	20,11	3,86	30	1963,9	1503,8	23,43	4,13

Таблица 3. Результаты вычислительного эксперимента

Месяц	Avg, %	Месяц	Avg, %	Месяц	Avg, %
2020, May	13,05	2020, June	13,65	2020, July	9,76
2020, August	8,81	2020, September	11,10	2020, October	18,09
2020, November	9,64	2020, December	19,16	2021, January	9,39
2021, February	13,58	2021, March	10,59	2021, April	18,15

Аналогичные расчеты были произведены для периодов с августа по декабрь 2020 г. и с января по апрель 2021 г. В табл. 3 представлены обобщенные результаты по каждому месяцу рассматриваемого периода со средним значением параметра “ Δ , %”, где:

- в столбце “Месяц” указан месяц рассматриваемого периода 2020–2021 гг.,
- в столбце “Avg, %” приводятся значения показателя улучшения целевой функции в среднем, рассчитанное как среднее арифметическое по всем значениям “ Δ , %” в указанном месяце.

Как видно из табл. 3, разработанная в настоящей статье модель ЦЛП как математическое обеспечение модуля оперативного графикования системы оптимального планирования потокового производства доставляет существенное улучшение функционала качества на реальных данных — до 19,16% в среднем (максимальное значение в столбце “Avg, %” в табл. 3). Экономический эффект достигается за счет перераспределения машин цеха между требованиями, что влечет в свою очередь преимущественный выбор основного ТМ для обработки. Другими словами, в фактическом сценарии по основному ТМ обрабатываются требования, которые в оптимизированном сценарии были назначены на альтернативные ТМ. В совокупности это приводит к тому, что суммарный показатель энергоэффективности по суточному заданию в целом оказывается выше в оптимизированном сценарии. Следует также отметить, что значение имеет не только количественный признак (когда количество требований, следующих по основному ТМ, в оптимизированном сценарии больше, чем в фактическом), но и качественный — если одно из двух фиксированных требований необходимо подлежит назначению на альтернативный ТМ, то приоритетным с точки зрения целевого функционала является вариант назначения, для которого совокупный расход ресурсов меньше (с учетом сортамента каждого требования). При этом вычислительные затраты оказываются вполне приемлемыми с точки зрения оперативности функционирования системы (значения в столбце “ t , с” в табл. 1, 2). Таким образом, можно ожидать высокую эффективность внедрения системы в целом и, в частности, модуля оперативного графикования, основанного на разработанной модели ЦЛП, в практику эксплуатации потокового производства.

5. Заключение

В статье исследовалась задача оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графикования на примере отделения внепечной обработки конвертерного цеха сталелитейного производства в отрасли черной металлургии. Для решения этой задачи была предложена модель целочисленного линейного программирования, в полной мере описывающая все технологические особенности исследуемых процессов, а также допускающая гибкую настройку и модификацию системы ограничений и целевого функционала. Программная реализация предложенной модели была положена в основу модуля оперативного графикования системы оптимального планирования

потокового производства, с использованием которой был проведен масштабный вычислительный эксперимент на реальных данных. Результаты проведенного вычислительного эксперимента демонстрируют высокую эффективность предложенного подхода и перспективу достижения значительного экономического эффекта от внедрения системы в практику эксплуатации потокового производства.

Дальнейшее развитие тематики связано, в первую очередь, с оснащением разработанной модели дополнительным функционалом для улучшения качества получаемых решений за счет увеличения длительности обработки требований на каждой машине в пределах допустимых интервалов. Другой функционал, также подлежащий развитию и имплементации в разработанную модель, связан с поиском максимально совместных подсистем ограничений с приоритетами в условиях противоречивости модели в ее исходной постановке.

Продолжением предложенного подхода к моделированию производственных задач методами целочисленного линейного программирования является исследование смежных задач цеховой логистики, включая транспортное планирование и управление крановым хозяйством. В таких задачах также часто имеет место несовместность системы ограничений в исходной постановке. В этой связи планируемые к исследованию и разработке методы формирования максимальных совместных подсистем ограничений с приоритетами также могут получить широкое и эффективное приложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами. 2012. № 38. С. 161–169.
2. Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н., Наумов А.В., Рассказова В.А. О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // АИТ. 2020. № 6. С. 3–16. <https://doi.org/10.31857/S0005231020060013>
Gainanov D.N., Ignatov A.N., Naumov A.V., Rasskazova V.A. On Track Procession Assignment Problem at the Railway Network Sections // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 967–977. <https://doi.org/10.1134/S0005117920060028>
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
4. Ryan D.M., Foster B.A. An Integer Programming Approach to Scheduling. Computer Scheduling of Public Transport Urban Passenger Vehicle and Crew Scheduling / Eds. Wren A. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 269–280.
5. Wagner H.M. An Integer Linear-Programming Model for Machine Scheduling // Nav. Res. Logist. Quart. 1959. V. 6. No. 2. P. 131–140.
6. Pochet Y., Wolsey L.A. Production Planning by Mixed Integer Programming. Switzerland: Springer Series in Operations Research & Financial Engineering, 2006.
7. Шевченко В.Н., Золотых Н.Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2004.

8. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.
9. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование. Модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит, 2007.
10. *Appa G.M., Pitsoulis L.S., Paul W.H.* Handbook on Modeling for Discrete Optimization. Switzerland: Springer Series in Operations Research & Management Science., 2006.
11. *Wolsey L.A.* Integer Programming. NJ: John Wiley & Sons, 2020.
12. *Hu T.C., Kahng A.B.* Linear and Integer Programming Made Easy. Switzerland: Springer, 2016.
13. *Кабулова Е.Г.* Интеллектуальное управление многостадийными системами металлургического производства // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2019. Т. 7. № 1(24). С. 341–351.
<https://doi.org/10.26102/2310-6018/2019.24.1.022>
14. *Столбов В.Ю., Гитман М.Б., Федосеев С.А.* Управление процессом формирования качества продукции промышленного предприятия // Прикладная математика и вопросы управления. 2016. № 3. С. 79–98.
15. *Gainanov D.N., Berenov D.A.* Algorithm for Predicting the Quality of the Product of Metallurgical Production // CEUR Workshop Proceedings. 2017. V. 1987. P. 194–200.
16. *Qiu Y., Wang L., Xu X., Fang X., Pardalos P.M.* Scheduling a Realistic Hybrid Flow Shop with Stage Skipping and Adjustable Processing Time in Steel Plants // Appl. Soft Comput. 2018. V. 64. P. 536–549.
17. *Kong M., Pei J., Xu J., Liu X., Pardalos P.M.* A Robust Optimization Approach for Integrated Steel Production and Batch Delivery Scheduling with Uncertain Rolling Times and Deterioration Effect // Int. J. Prod. Res. 2020. V. 58. No. 17. P. 5132–5154. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1693659>
18. *Long J., Sun Z. et al.* A Robust Dynamic Scheduling Approach Based on Release Time Series Forecasting for the Steelmaking Continuous Casting Production // Appl. Soft Comput. 2020. V. 92. P. 106271.
19. *Лазарев А.А., Гафаров А.А.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: Наука, 2011.
20. *Brucker P., Knust S.* Complex Scheduling. Germany: Springer-Verlag Berlin, 2006.
21. *Mingozzi A., Maniezzo V., Ricciardelli S., Bianco L.* An Exact Algorithm for Project Scheduling with Resource Constraints Based on New Mathematical Formulation // Management Sci. 1998. V. 44. P. 714–729.
22. *Burkov V.N.* Problems of Optimum Distribution of Resources // Control Cybernet. 1972. V. 1. No. 1(2). P. 27–41.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 08.11.2022

После доработки 22.02.2023

Принята к публикации 20.03.2023