

© 2023 г. В.Ф. СОКОЛОВ, д-р физ.-мат. наук (sokolov@ipm.komisc.ru)  
(Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар)

**СУБОПТИМАЛЬНАЯ РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ  
НЕИЗВЕСТНОГО АВТОРЕГРЕССИОННОГО ОБЪЕКТА  
С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ И СМЕЩЕННЫМ  
ВНЕШНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ**

Рассматривается задача субоптимальной стабилизации объекта с дискретным временем, неопределенностями по выходу и управлению и ограниченным внешним возмущением. Коэффициенты авторегрессионной номинальной модели, коэффициенты усиления неопределенностей, норма и смещение внешнего возмущения предполагаются неизвестными. Показателем качества служит наихудшая асимптотическая верхняя граница модуля выхода объекта. Решение задачи в условиях неидентифицируемости всех неизвестных параметров базируется на методе рекуррентных целевых неравенств и оптимальном онлайн оценивании, в котором показатель качества задачи управления служит идентификационным критерием. Предложена нелинейная замена неизвестных параметров возмущений, сводящая задачу оптимального онлайн оценивания к задаче дробнолинейного программирования. Работоспособность адаптивного субоптимального управления иллюстрируется результатами численного моделирования.

*Ключевые слова:* робастное управление, адаптивное управление, оптимальное управление, ограниченное возмущение, верификация модели.

**DOI:** 10.31857/S0005231023060028, **EDN:** CRYBQU

## 1. Введение

В 1980-х гг. в знаменитых статьях [1, 2] было показано, что известные к тому времени алгоритмы адаптивного управления в детерминированной постановке не гарантируют устойчивости адаптивных систем при наличии сколь угодно малых внешних возмущений или немоделируемой динамики. В течение двух последующих десятилетий были предложены различные модификации стандартных алгоритмов оценивания для обеспечения робастной устойчивости адаптивных систем (под робастной понимается устойчивость системы при наличии в ней операторных возмущений, называемых в теории робастного управления неопределенностью). При этом робастная устойчивость доказывалась для достаточно малых операторных возмущений с помощью аппарата функций Ляпунова и независимо от параллельно разрабатывавшейся в эти же годы теории робастного управления в  $H_\infty$ -постановке [3].

Работы этого направления стали именовать робастным адаптивным управлением [4–6]. В то же время проблема нахождения по данным измерений номинальной (т.е. невозмущенной) модели и уровней неопределенностей и внешних возмущений была признана в середине 1990-х гг. главной проблемой для практических приложений  $H_\infty$ -теории [7]. Поэтому оценка качества заданной или полученной в результате идентификации модели управляемого объекта была названа центральной проблемой в теории идентификации систем [8]. Эта проблема до настоящего времени остается открытой и актуальной даже в задачах офлайн идентификации, т.е. идентификации по данному набору измерений, а не по ходу управления [9].

В начале 1990-х гг. были получены основополагающие результаты по теории робастного управления в  $\ell_1$ -постановке, в которой основным сигнальным пространством служит пространство  $\ell_\infty$  ограниченных вещественных последовательностей и показатели качества управления формулируются в терминах  $\ell_\infty$ -нормы выхода системы управления [10, 11]. В  $\ell_1$ -теории робастного управления, отличие от  $H_\infty$ -теории, были получены явные представления для асимптотических показателей качества для систем со структурированной неопределенностью, внешними ограниченными возмущениями и заданными командными сигналами [12–15]. Это позволило предложить общий метод синтеза адаптивного оптимального, с заданной точностью, робастного управления, потенциально реализующего максимальные возможности обратной связи и обеспечивающего в условиях неидентифицируемости неизвестных параметров такое же асимптотическое качество управления, что и для объектов с известными параметрами [16, 17]. Важность и актуальность исследования максимальных возможностей обратной связи отмечены в недавнем обзоре [18]. Указанный метод базируется на методе рекуррентных целевых неравенств [19], множественном оценивании неизвестных параметров, включая параметры возмущений, и использовании показателя качества задачи управления как идеального идентификационного критерия. Для систем общего вида этот метод не реализуем напрямую ввиду высокой сложности задачи вычисления текущих оптимальных оценок при невыпуклых показателях качества и невыпуклых ограничениях. Поэтому актуальной представляется задача поиска классов объектов или менее амбициозных постановок задач, для которых этот метод реализуем с учетом растущей мощности современных компьютеров. Примерами таких менее амбициозных постановок служат, например, задача подтверждения модели и оптимальной квантификации возмущений [20, 21] и задача синтеза оптимального робастного регулятора для объекта с известной передаточной функцией номинального объекта и неизвестными нормами внешнего возмущения и операторных возмущений по выходу и управлению [22]. В [23] приведены примеры задач адаптивного оптимального управления, в которых оптимальные значения показателей качества являются линейными или дробно-линейными функциями оцениваемых неизвестных параметров. В таких задачах оптимальное оценивание сводится

к линейному программированию и реализуемо в онлайн режиме по крайней мере для объектов невысоких порядков.

В настоящей работе задача адаптивной оптимальной робастной стабилизации рассматривается для относительно простого объекта с авторегрессионной номинальной моделью, неизвестными коэффициентами передаточной функции, неизвестными коэффициентами усиления неопределенностей по выходу и управлению, а также неизвестными нормой и смещением внешнего ограниченного возмущения. Задача заключается в минимизации наихудшей в рассматриваемом классе неопределенностей и возмущений верхней границы модуля выхода объекта в установившемся режиме. Целью настоящей работы является реализация указанного общего метода синтеза адаптивного оптимального управления для описанного выше объекта. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложена специальная замена неизвестных параметров неопределенностей и внешнего возмущения, благодаря которой показатель качества управления в рассматриваемой задаче становится дробно-линейной функцией неизвестных параметров, а множества согласованных с измерениями оценок неизвестных параметров описываются линейными неравенствами. Предложенная замена неизвестных параметров позволяет решать задачу оптимального оценивания в онлайн режиме.

2. Доказана устойчивость замкнутой адаптивной системы в оптимальной области допустимых норм неопределенностей, универсальной для всех априорно допустимых номинальных объектов.

3. При дополнительном предположении о “непреднамеренности” суммарного возмущения гарантируется оптимальность адаптивного управления с заданной точностью, т.е. реализация максимальных возможностей обратной связи.

4. Результаты численного моделирования для объекта с пятью неизвестными коэффициентами передаточной функции номинальной модели и четырьмя описанными выше неизвестными параметрами возмущений иллюстрируют работоспособность и оптимальность адаптивного управления.

5. Актуальная в теории идентификации систем проблема оценки качества полученной в результате идентификации модели решается в онлайн режиме вычислением оптимальных оценок с наилучшим значением показателя качества, согласованным с данными измерений и гарантируемым в установившемся режиме. Приведенные результаты численного моделирования наглядно иллюстрируют несправедливость традиционной критики идентификации с помощью множественного оценивания (set-membership approach) как слишком грубого метода. Эта критика базируется на традиционном и кажущемся обязательным предположении, что должны быть известны априорные границы возмущений, одинаковые для всех допустимых объектов.

6. Использование растущей вычислительной мощности современных компьютеров делает возможным, по крайней мере для объектов невысоких по-

рядков, онлайн вычисление полиэдральных оценок неизвестных параметров, согласованных с данными измерений и априорной информацией об управляемой системе. Это позволяет решать проблему онлайн верификации модели и/или априорных предположений и их соответствия достижению желаемого качества управления. Традиционные методы синтеза адаптивного управления на основе градиентных алгоритмов и модификаций метода наименьших квадратов не рассматривают проблемы верификации модели и априорных предположений.

**Обозначения:**

$|\varphi|$  — евклидова норма вектора  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ;

$\ell_e$  — пространство вещественных последовательностей  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ ,

$x_s^t = (x_s, x_{s+1}, \dots, x_t)$  для  $x \in \ell_e$ ;

$|x_s^t| = \max_{s \leq k \leq t} |x_k|$ ;

$\ell_\infty$  — нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей  $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$  с нормой  $\|x\| = \sup_t |x_t|$ ;

$\|x\|_{ss} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_t|$ ;

$\ell_1$  — нормированное пространство абсолютно суммируемых последовательностей с нормой  $\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$ ;

$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k| = \|g\|_1$  — индуцированная норма устойчивой линейной стационарной системы  $G: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  с передаточной функцией  $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ .

## 2. Постановка задачи

Объект управления с дискретным временем описывается моделью

$$(2.1) \quad a(q^{-1})y_t = b_1 u_{t-1} + v_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $y_t \in \mathbb{R}$  — измеряемый выход объекта в момент времени  $t$ ,  $u_t \in \mathbb{R}$  — управление,  $v_t \in \mathbb{R}$  — суммарное возмущение,  $q^{-1}$  — оператор сдвига назад ( $q^{-1}y_t = y_{t-1}$ ) на линейном пространстве  $\ell_e$ ,

$$a(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}.$$

Начальные значения  $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \dots, y_0)$  произвольные,  $y_k = 0$  при  $k < 1 - n$  и  $u_k = 0$  при  $k < 0$ .

Априорная информация об объекте управления включает следующие предположения.

**АП1.** Вектор-столбец коэффициентов *номинальной модели* (т.е. модели без суммарного возмущения  $v$ ) принадлежит известному ограниченному многограннику  $\Xi$ ,

$$\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1)^T \in \Xi = \{ \hat{\xi} \mid P \hat{\xi} \geq p \} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}, \quad p \in \mathbb{R}^l,$$

$b_1 \neq 0$  для любого  $\xi \in \Xi$ .

**АП2.** Суммарное возмущение  $v$  имеет вид

$$(2.2) \quad v_t = c^w + \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t,$$

$$(2.3) \quad \|w\|_\infty \leq 1, \quad |\Delta^1(y)_t| \leq p_t^y = |y_{t-\mu}^{t-1}|, \quad |\Delta^2(u)_t| \leq p_t^u = |u_{t-\mu}^{t-1}|,$$

где  $c^w$  — смещение и  $\delta^w$  — норма (верхняя граница) внешнего ограниченного возмущения  $c^w + \delta^w w$ ,  $w \in \ell_\infty$  — неизвестное нормализованное внешнее возмущение,  $\delta^y \geq 0$  и  $\delta^u \geq 0$  — коэффициенты усиления неопределенностей по выходу и управлению соответственно, операторы  $\Delta^1: \ell_e \rightarrow \ell_e$  и  $\Delta^2: \ell_e \rightarrow \ell_e$  — линейные нестационарные или нелинейные строго причинные операторы с ограниченной памятью  $\mu$  (оператор  $\Delta: \ell_e \rightarrow \ell_e$  называется строго причинным, если значения  $z_t$  последовательности  $z = \Delta(x)$  зависят только от  $x_{-\infty}^{t-1}$  для всех  $t$  [10]).

Память неопределенностей  $\mu$  выбирается конструктором исходя из априорной информации об управляемой системе и может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для качества синтезируемого ниже адаптивного управления (см. замечание 1 в конце раздела 3 и замечание 3 в разделе 6).

**АП3.** Вектор  $\theta = (\xi^T, c^w, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$  параметров объекта (2.1) неизвестен,  $|c^w| \leq C^w$  с известной верхней границей  $C^w$ .

Содержательная постановка рассматриваемой в статье задачи заключается в построении обратной связи вида  $u_t = U_t(y_{1-n}^t, u_0^{t-1}, \Xi)$ , гарантирующей как можно меньшую верхнюю границу для асимптотического показателя качества

$$(2.4) \quad J_\mu(\theta) = \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t|,$$

где  $\sup$  берется на множестве возмущений  $v$ , удовлетворяющих предположению **АП2**. На обратную связь налагается трудно формализуемое в точных терминах требование ее вычислительной реализуемости в онлайн режиме.

Главная сложность сформулированной оптимальной задачи заключается в неидентифицируемости неизвестного вектора  $\theta$  в рассматриваемой детерминированной постановке (см. раздел 4).

### 3. Робастное качество оптимальной системы при известных параметрах

Для объекта с известным вектором коэффициентов  $\xi$  и при известном смещении  $c^w$  регулятор

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_t &= \frac{1}{b_1} [(a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} - c^w] = \\ &= \frac{1}{b_1} [a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n+1} - c^w] \end{aligned}$$

гарантирует при всех  $t$  равенство

$$(3.2) \quad y_{t+1} = v_{t+1} - c^w = \delta^w w_{t+1} + \delta^y \Delta^1(y)_{t+1} + \delta^u \Delta^2(u)_{t+1}.$$

Из непредсказуемости и произвольности значения  $v_{t+1} - c^w$  в момент  $t$  вычисления управления  $u_t$  следует, что регулятор (3.1) является *оптимальным* для показателя качества (2.4). Введем обозначения для передаточной функции от  $y$  к  $u$  регулятора (3.1):

$$G^\xi(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b_1 \lambda} = \frac{1}{b_1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \lambda^k, \quad \|G^\xi\| = \frac{1}{|b_1|} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Замкнутая система (2.1), (3.1) называется *робастно устойчивой* в классе неопределенностей (2.3), если значение показателя качества (2.4) конечно. Робастное качество оптимальной системы (2.1), (3.1) описывается следующей теоремой.

*Теорема 1. Для замкнутой системы (2.1), (3.1) справедливы утверждения:*

1. Система робастно устойчива при  $\mu = +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$(3.3) \quad \delta^y + \delta^u \|G^\xi\| < 1.$$

2. Если выполнено условие робастной устойчивости (3.3), то

$$(3.4) \quad J_\mu(\theta) \nearrow J(\theta) = \frac{\delta^w + \delta^u |c^w/b_1|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} \quad (\mu \rightarrow +\infty),$$

где знак  $\nearrow$  означает монотонную сходимость снизу при  $\mu \rightarrow +\infty$ .

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Последнее априорное предположение **АП4** об управляемом объекте диктуется условием робастной стабилизируемости (3.3).

**АП4.** Неизвестный вектор параметров  $\theta$  удовлетворяет неравенству

$$(3.5) \quad \delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \leq \bar{\delta} < 1$$

с известным числом  $\bar{\delta}$ .

Предположение об известной верхней границе  $\bar{\delta}$  не является ограничительным. По существу оно заключается в не влияющем на качество управления априорном выборе конструктором сколь угодно близкого к единице значения  $\bar{\delta}$  и исключает из рассмотрения неприемлемые для практических приложений модели вблизи границы области робастно стабилизируемых объектов. Замена открытого множества параметров  $\theta$ , характеризуемого необходимым условием робастной стабилизируемости (3.3), сколь угодно близким к нему закрытым множеством, определенным неравенством (3.5), позволяет сформулировать строгие результаты о качестве управления.

*Замечание 1.* Базовые результаты  $\ell_1$ -теории робастного управления относились к системам со структурированной неопределенностью с бесконечной памятью ( $\mu = +\infty$ ) и только нулевыми начальными данными [10] и поэтому не могли применяться в задачах адаптивного управления. Второе утверждение теоремы 1 позволяет использовать показатель  $J(\theta)$  и модель неопределенностей с ограниченной памятью вида (2.3) не только для постановки и решения задач адаптивного оптимального управления без потерь для качества управления, но и для онлайн верификации модели объекта, включая квантификацию неопределенностей и внешнего возмущения (т.е. оценку коэффициентов усиления неопределенностей и верхней границы внешнего возмущения).

#### 4. Оптимальное оценивание в условиях неидентифицируемости

В этом разделе поясняется неидентифицируемость всех неизвестных параметров и на содержательном уровне обосновывается необходимость использования показателя качества  $J$  в качестве идентификационного критерия.

Следующее простое утверждение позволяет использовать метод рекуррентных целевых неравенств для оценки неизвестного вектора параметров  $\theta$ .

*Утверждение 1.* Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T, \quad \hat{\xi} \in \Xi, \quad \hat{\delta}^w \geq 0, \quad \hat{\delta}^y \geq 0, \quad \hat{\delta}^u \geq 0,$$

неизвестного вектора  $\theta$  при всех  $t$  справедливы неравенства

$$(4.1) \quad |\hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1} - \hat{c}^w| \leq \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_t^y + \hat{\delta}^u p_t^u,$$

то объект управления (2.1) с вектором параметров  $\hat{\theta}$  удовлетворяет уравнению (2.1) и априорным предположениям **АП1**, **АП2** при всех  $t$ .

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Из утверждения 1 следует, что при любом управлении объектом (2.1) полная информация о векторе неизвестных параметров  $\theta$  к моменту времени  $t$  имеет вид включения

$$\theta \in \Theta_t = \left\{ \hat{\theta} \in \Theta_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_k - \hat{b}_1 u_{k-1} - \hat{c}^w| \leq \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_k^y + \hat{\delta}^u p_k^u \quad \forall k \leq t \right\},$$

где

$$\Theta_0 = \left\{ \hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T \mid \hat{\xi} \in \Xi, \right. \\ \left. \hat{\delta}^w \geq 0, \hat{\delta}^y \geq 0, \hat{\delta}^u \geq 0, \hat{\delta}^y + \hat{\delta}^u \|G^{\hat{\xi}}\| \leq \bar{\delta} \right\}$$

— априорное множество допустимых параметров.

Множества  $\Theta_t$  состоят из векторов  $\hat{\theta} \in \Theta_0$ , которые удовлетворяют уравнению (2.1) и априорным предположениям **АП1**, **АП2**, **АП4** при имеющихся

измерениях  $y_{1-n}^t, u_0^{t-1}$ . Очевидно, что любой вектор  $\hat{\theta}$  с достаточно большой компонентой  $\hat{\delta}^w$  лежит в  $\Theta_t$ . Из этого, в частности, следует *неидентифицируемость* параметров  $\xi$  и  $c^w$  оптимального регулятора (3.1) при любом управлении объектом (2.1).

Метод рекуррентных целевых неравенств заключается в построении сходящейся последовательности оценок  $\theta_t$ , достаточно точно удовлетворяющих *целевым неравенствам* (4.1) при всех достаточно больших  $t$ . Однако, в отличие от задач адаптивной стабилизации, этого недостаточно для решения задачи обеспечения как можно меньшей оценки для показателя качества (2.4). Действительно, если оценки  $\theta_t$  сходятся к некоторой предельной оценке  $\theta_\infty$  и выполнены целевые неравенства, то из теоремы 1 и утверждения 1 следует неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq J(\theta_\infty).$$

Для решения поставленной оптимальной задачи этого неравенства недостаточно и необходимо обеспечить выполнение с заданной точностью дополнительного неравенства

$$J(\theta_\infty) \leq J(\theta)$$

с неизвестным и неидентифицируемым вектором  $\theta$ . Из этого следует необходимость использования показателя качества  $J(\theta)$  задачи управления в качестве идентификационного критерия, т.е. использования оптимального оценивания вида

$$(4.2) \quad \theta_t = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_t} J(\hat{\theta}) = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_t} \frac{\hat{\delta}^w + \hat{\delta}^u |c^w / \hat{b}_1|}{1 - \hat{\delta}^y - \hat{\delta}^u \|G^\xi\|}.$$

Прямая реализация формулы (4.2) в режиме онлайн затруднительна, поскольку, во-первых, количество целевых неравенств в описании множеств  $\Theta_t$  может неограниченно возрастать и, во-вторых, показатель качества  $J$  и условие робастной стабилизируемости (3.5) невыпуклы. Первая трудность преодолевается использованием верхних полиэдральных аппроксимаций множеств  $\Theta_t$  и введением мертвой зоны при обновлении оценок. Способ избавления от невыпуклости в задаче оптимального оценивания описан в следующем разделе.

## 5. Сведение к модели с неопределенностью по выходу

В этом разделе описана замена неизвестных параметров возмущений, позволяющая преобразовать показатель качества к дробно-линейному виду, а невыпуклое условие робастной стабилизируемости (3.5) к ослабленному линейному условию путем сведения к модели с неопределенностью только по выходу.



Пусть объект (2.1) управляется так, что для всех  $t$  выполнены неравенства

$$(5.1) \quad |u_t| \leq C_1 + C_2 |y_{t-n+1}^t|$$

с некоторыми постоянными  $C_1, C_2$ . Тогда из уравнения (2.1) и предположения **АП2** следует

$$(5.2) \quad \begin{aligned} |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| &\leq \delta^w + \delta^y |y_{t-\mu}^{t-1}| + \delta^u |u_{t-\mu}^{t-1}| \leq \\ &\leq \delta^w + \delta^u C_1 + (\delta^y + \delta^u C_2) |y_{t-\mu-n}^{t-1}|, \end{aligned}$$

и для любого  $\bar{\mu} \geq \mu + n$  получаем

$$(5.3) \quad |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| \leq \delta^w + \delta^u C_1 + (\delta^y + \delta^u C_2) |y_{t-\bar{\mu}}^{t-1}|.$$

Введем новые неизвестные параметры  $\zeta, \delta^e$  и  $\delta$ :

$$(5.4) \quad \zeta = (\xi, c^w, \delta^e, \delta), \quad \delta^e = \delta^w + \delta^u C_1, \quad \delta = \delta^y + \delta^u C_2.$$

Неравенства (5.3) для этих новых параметров принимают вид

$$(5.5) \quad |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| \leq \delta^e + \delta |y_{t-\bar{\mu}}^{t-1}|.$$

Неравенства (5.5) эквивалентны неравенствам (4.1) для модифицированного вектора параметров

$$\theta^m = (\xi^T, c^w, \delta^e, \delta, 0)^T.$$

В силу утверждения 1 неравенства (5.5) означают, что при управлении, удовлетворяющем неравенствам (5.1), выход  $y$  можно считать выходом объекта (2.1) с модифицированным вектором параметров  $\theta^m$  (без неопределенности по управлению) и для этого объекта в силу теоремы 1 имеем

$$(5.6) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq I(\zeta) := J(\theta^m) = \frac{\delta^e}{1 - \delta}.$$

Если объект (2.1) управляется оптимальным регулятором (3.1), то

$$|u_t + c^w/b_1| \leq \|G^\xi\| \|y_{t-n+1}^t\|,$$

и, следовательно,

$$(5.7) \quad |u_t| \leq |c^w/b_1| + \|G^\xi\| \|y_{t-n+1}^t\|.$$

Неравенства (5.7) гарантируют неравенства (5.1) и (5.3) с постоянными  $C_1 = |c^w/b_1|$  и  $C_2 = \|G^\xi\|$ , для которых параметры  $\delta^e$  и  $\delta$  из (5.4) имеют вид

$$(5.8) \quad \delta^e = \delta^w + \delta^u |c^w/b_1|, \quad \delta = \delta^y + \delta^u \|G^\xi\|.$$

Тогда из формулы (3.4) для  $J(\theta)$  и формулы (5.6) для  $I(\zeta)$  с параметрами (5.8) следует

$$(5.9) \quad J(\theta) = I(\zeta), \quad \zeta = (\xi^T, c^w, \delta^w + \delta^u |c^w/b_1|, \delta^y + \delta^u \|G^\xi\|)^T.$$

Таким образом, для характеризуемой неравенствами (5.5) воображаемой системы без неопределенности по управлению показатель качества становится дробно-линейной функцией, зависящей только от нормы  $\delta^e$  воображаемого внешнего возмущения и коэффициента усиления  $\delta$  воображаемой неопределенности по выходу.

## 6. Адаптивное управление

Перейдем к описанию алгоритма адаптивного субоптимального управления, основанного на использовании новых неизвестных параметров  $\delta^e$  и  $\delta$ . После подачи управления  $u_t$  и измерения выхода  $y_{t+1}$  в момент времени  $t+1$  будут обновляться векторные оценки

$$\zeta_t = (\xi_t^T, c_t^w, \delta_t^e, \delta_t)^T$$

неизвестного вектора  $\zeta$  из (5.9) и полиэдральные оценки  $Z_t$ , составленные из априорных ограничений и нескольких линейных неравенств, порожденных новыми целевыми неравенствами (5.5). Начальные оценки  $Z_0$  и  $\zeta_0$  имеют вид

$$Z_0 = \left\{ \hat{\zeta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^e, \hat{\delta})^T \mid \hat{\xi} \in \Xi, \hat{\delta}^e \geq 0, 0 \leq \hat{\delta} \leq \bar{\delta} \right\}, \quad \zeta_0 = (\xi_0^T, 0, 0, 0)^T,$$

где  $\xi_0$  — любой вектор из априорного многогранника  $\Xi$ ,  $\bar{\delta}$  — верхняя оценка параметра  $\delta$  из предположения **АП4**.

Выберем любое число  $\bar{\mu} \geq \mu + n$  запоминаемых выходов  $y_{t-\bar{\mu}+1}^t$  и параметр  $\varepsilon > 0$  мертвой зоны, гарантирующей конечное число обновлений оценок. Управление  $u_t$  в момент  $t$  определяется *адаптивным регулятором*

$$(6.1) \quad u_t = \frac{1}{b_1^t} (a_1^t y_t + a_2^t y_{t-1} + \dots + a_n^t y_{t-n+1} - c_t^w).$$

Алгоритм обновления векторных оценок  $\zeta_t$  и полиэдральных оценок  $Z_t$  имеет следующий вид. После измерения выхода  $y_{t+1}$  в момент  $t+1$  положим

$$\varphi_t := (-y_t, -y_{t-1}, \dots, -y_{t-n+1}, u_t)^T, \quad \eta_{t+1} := \text{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^T \zeta_t - c_t^w),$$

$$p_{t+1} = |y_{t-\bar{\mu}+1}^t|, \quad \psi_{t+1} := (\eta_{t+1} \varphi_t^T, \eta_{t+1}, 1, p_{t+1})^T, \quad \nu_{t+1} := \eta_{t+1} y_{t+1}.$$

В этих обозначениях уравнение адаптивного регулятора (6.1) эквивалентно равенству  $\varphi_t^T \zeta_t + c_t^w = 0$ , так что  $\eta_{t+1} = \text{sign}(y_{t+1})$ , а целевое неравенство (5.5) в момент  $t+1$  для текущей оценки  $\zeta_t$  эквивалентно неравенству

$$(6.2) \quad \psi_{t+1}^T \zeta_t \geq \nu_{t+1}.$$

Положим

$$(6.3) \quad \zeta_{t+1} := \zeta_t, \quad Z_{t+1} := Z_t, \quad \text{если } \psi_{t+1}^T \zeta_t \geq \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

В противном случае положим

$$(6.4) \quad Z_{t+1} := Z_t \cap \Omega_{t+1}, \quad \Omega_{t+1} := \left\{ \hat{\zeta} \mid \psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1} \right\},$$

$$(6.5) \quad \zeta_{t+1} := \underset{\hat{\zeta} \in Z_{t+1}}{\operatorname{argmin}} I(\hat{\zeta}),$$

где показатель качества  $I$  определен в (5.6).

Алгоритм обновления оценок имеет простую геометрическую интерпретацию. Согласно формуле (6.3) оценки  $Z_t$  и  $\zeta_t$  обновляются только в том случае, когда расстояние от вектора  $\zeta_t$  до полупространства  $\Omega_{t+1}$  больше параметра мертвой зоны  $\varepsilon$  (см. доказательство теоремы 2). Согласно формуле (6.4) обновление  $Z_t$  заключается в добавлении линейного неравенства  $\psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1}$ , которое является тем из двух линейных неравенств, составляющих целевое неравенство (5.5), которое нарушается для оценки  $\zeta_t$ . Вычисление оптимальной оценки  $\zeta_{t+1}$  согласно (6.5) — задача дробно-линейного программирования, сводящаяся к задаче линейного программирования введением вспомогательной переменной [25].

*Теорема 2.* Пусть объект (2.1) с неизвестным вектором параметров  $\theta = (\xi^T, c^w, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$  удовлетворяет предположениям АП1–АП4, управляется адаптивным регулятором (6.1) с алгоритмом оценивания (6.3)–(6.5) и с параметром мертвой зоны, удовлетворяющим неравенствам

$$(6.6) \quad 0 < \varepsilon < (1 - \bar{\delta}) / (\sqrt{n+1} + G_u), \quad G_u = \sup_{\xi \in \Xi} \|G^\xi\|.$$

Тогда справедливы утверждения:

1) Если параметры  $\delta^y$  и  $\delta^u$  удовлетворяют неравенству

$$(6.7) \quad \delta^y + \delta^u G_u \leq \bar{\delta} < 1,$$

то множественные оценки  $Z_t$  и векторные оценки  $\zeta_t$  сходятся за конечное время и

$$(6.8) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq I(\zeta_\infty^\varepsilon) < I(\zeta_\infty) + K_{\zeta_\infty} \varepsilon,$$

$$(6.9) \quad I(\zeta_\infty) \leq \bar{I} = \frac{\delta^w + \delta^u \max_t |c_t^w / b_1^t|}{1 - \delta^y - \delta^u \max_t \|G^{\xi_t}\|} \leq \frac{\delta^w + \delta^u \max_t |c_t^w / b_1^t|}{1 - \delta^y - \delta^u G_u},$$

где  $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$  — предельное значение  $\zeta_t$ ,

$$(6.10) \quad \zeta_\infty^\varepsilon = \left( \xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e + \varepsilon(\sqrt{2} + |c_\infty^w / b_1^\infty|), \delta_\infty + \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|) \right)^T,$$

$$(6.11) \quad K_{\zeta_\infty} = \frac{\sqrt{2} + |c_\infty^w / b_1^\infty| + \delta_\infty^e (\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)}{(1 - \delta_\infty - \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|))^2}.$$

2) Если при всех  $t$  справедливы неравенства

$$(6.12) \quad |u_t| \leq \bar{u}_t = |c^w/b_1| + \|G^\xi\| \|y_{t-\bar{\mu}+1}^t\|,$$

то множественные оценки  $Z_t$  и векторные оценки  $\zeta_t$  сходятся за конечное время и

$$(6.13) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq I(\zeta_\infty^\varepsilon) < I(\zeta_\infty) + K_{\zeta_\infty} \varepsilon \leq J(\theta) + K_{\zeta_\infty} \varepsilon,$$

где  $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$  — предельное значение  $\zeta_t$ ;  $\zeta_\infty^\varepsilon$  и  $K_{\zeta_\infty}$  имеют вид (6.10) и (6.11) соответственно.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

*Замечание 2.* Первое утверждение теоремы 2 гарантирует устойчивость адаптивного управления в суженном множестве (6.7) параметров  $(\delta^y, \delta^u)$  по сравнению с множеством параметров (3.5), соответствующих робастно стабилизируемым объектам при известных параметрах номинальной модели. Верхняя оценка  $\bar{I}$  в (6.9) является сильно завышенной относительно вычисляемых в процессе управления и сходящихся за конечное время согласованных с измерениями верхних оценок  $I(\zeta_t^\varepsilon)$ . Несмотря на это, она лучше, чем априорная универсальная оценка для всего класса допустимых векторов коэффициентов  $\Xi$ , которую можно получить для проекционных или МНК алгоритмов оценивания и которая справедлива в существенно большей двумерной области допустимых параметров  $(\delta^y, \delta^u)$ .

*Замечание 3.* Второе утверждение теоремы 2 базируется на условии (6.12). Это условие не верифицируемо данными измерений, поскольку параметры  $c^w, b_1$  и  $\xi$  неизвестны. Адаптивный регулятор (6.1) гарантирует справедливость этих неравенств для текущих оценок  $c_t^w, b_1^t$  и  $\xi_t$ . Однако в связи с тем, что в цепочке неравенств (5.2) и (5.3) каждое из неравенств является существенно огрубленным (в том числе допустимым выбором любого  $\bar{\mu} \geq \mu + n$ ), и с учетом того, что текущие оптимальные оценки  $\zeta_t$  минимизируют показатель качества  $I$ , неравенства (6.12), как показывают многочисленные численные эксперименты, фактически не нарушаются. Формальное доказательство этого затруднено тем обстоятельством, что, хотя замена переменных (5.4) позволяет перейти к “хорошему” дробно-линейному показателю качества  $I(\zeta)$  при линейных целевых неравенствах (5.5), исходная нелинейность показателя качества  $J(\theta)$  и нелинейность условия робастной стабилизируемости (3.3) “спрятаны” при замене переменных (5.4) в дополнительном условии (5.7) на постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

*Замечание 4.* Важнейшим исключительным достоинством рассмотренного метода синтеза адаптивного робастного управления является верифицируемость априорных предположений об управляемом объекте. Индикатором приемлемости априорных предположений служит неубывающая последовательность наименьших согласованных с априорными предположениями

и данными измерений значений  $I(\zeta_t)$ . Ни в какой момент времени  $t$  не известно, является ли текущее значение  $I(\zeta_t)$  предельным значением  $I(\zeta_\infty)$ . Но если оценки  $\zeta_t$  не изменяются на длительном промежутке времени, то это означает, что текущая оценка удовлетворяет целевым неравенствам и, следовательно, гарантирует эту наилучшую верхнюю границу  $I(\zeta_t)$  для  $|y_t|$  после затухания переходных процессов. Неизменность оценки  $\zeta_t$  на длительном промежутке времени гарантирует также соответствие априорных предположений данным измерений при текущем гарантируемом асимптотическом качестве управления  $I(\zeta_t)$ . Традиционные методы синтеза адаптивного управления как в детерминированной, так и в стохастической постановке, оставляют проблемы верификации модели и априорных предположений вне рассмотрения.

*Замечание 5.* Формула (6.11) для постоянной  $K_\infty$  приведена с единственной целью пояснить, что точность решения оптимальной задачи — порядка  $\varepsilon$ . Эту точность проще контролировать прямым вычислением разности  $I(\zeta_t^\varepsilon) - I(\zeta_t)$  и корректировать ее при необходимости соответствующим изменением параметра мертвой зоны  $\varepsilon$ . При этом следует учитывать, что при уменьшении  $\varepsilon$  число возможных обновлений оценок и, соответственно, число неравенств в описании оценок  $Z_t$  может возрастать экспоненциально относительно числа оцениваемых параметров, поскольку объемы исключаемых из  $Z_t$  шаров пропорциональны  $\varepsilon^{\dim \zeta}$ . Остается открытым вопрос о грубости экспоненциальной оценки  $\varepsilon^{\dim \zeta}$  с учетом того, что при добавлении новых линейных неравенств отсекаются гораздо большие множества сфальсифицированных измерениями параметров.

## 7. Численное моделирование

В этом разделе приводятся результаты численного моделирования описанного выше адаптивного субоптимального управления. Эффективность этого управления иллюстрируется сравнением с адаптивным управлением, основанным на оценивании по методу наименьших квадратов (МНК). Алгоритм МНК лежит в основе стохастической теории адаптивного оптимального управления для систем со случайными внешними возмущениями [26, 27]. Однако попытки обобщения этой теории на системы с неопределенностью в целом оказались безуспешными даже для стохастических неопределенностей.

В случае объекта (2.1) МНК-оценки  $(\xi_t^T, c_t^w)$  минимизируют средний квадрат невязки (т.е. централизованного суммарного возмущения) модели:

$$(7.1) \quad (\xi_t, c_t^w) = \operatorname{argmin}_{\xi \in \Xi, c^w} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \left( \hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t - \hat{c}^w \right)^2,$$

не учитывая принципиально различное влияние на динамику системы внешнего возмущения  $w$  и неопределенностей  $\Delta^1$  и  $\Delta^2$ , и поэтому не могут лежать в основе алгоритмов оценивания, ориентированных на минимизацию верхней

границы выхода объекта. МНК-оценки вычисляются по рекуррентным формулам

$$\xi_{t+1} = \xi_t + K_t(y_{t+1} - \xi_t^T \varphi_t), \quad K_t = \frac{P_t \varphi_t}{1 + \varphi_t^T P_t \varphi_t}, \quad P_{t+1} = (I - K_t \varphi_t^T) P_t$$

с добавлением проектирования оценок  $\xi_t$  на априорное множество  $\Xi$ . При моделировании адаптивного управления с начальными матрицами вида  $P_0 = cI$ , где  $I$  — единичная матрица и  $c > 0$ , относительно лучшие в среднем результаты для МНК-оценивания наблюдались при  $c \in [1, 5]$ . Ниже приводятся результаты для  $c = 1$ .

Численное моделирование иллюстрируется на примере объекта (2.1) с неустойчивыми полюсами, т.е. корнями  $a(\lambda)$ ,  $0,9$ ,  $0,8$ ,  $0,7 \pm 0,6i$ , и коэффициентом  $b_1 = 2$ . Этим параметрам соответствует (с точностью  $10^{-4}$ ) вектор коэффициентов

$$\xi = (-4,0082, 6,4542, -5,0654, 1,634, 2)^T \in \mathbb{R}^5.$$

Априорные ограничения:  $0,1 \leq b_1 \leq 10$ ,  $|a_k| \leq 20$  для всех  $k$ ,  $|c^w| \leq 100$ . Параметр мертвой зоны  $\epsilon$  в (6.3) равен  $0,001$ .

Результаты моделирования приводятся ниже для случайных возмущений и детерминированных возмущений вида

$$(7.2) \quad v_t = c^w + \cos(5t) + \delta^y \sin(3\sqrt{t}) |y_{t-\mu}^{t-1}| + \delta^u \sin(\ln(0,3t + \pi/2)) |u_{t-\mu}^{t-1}|$$

с параметрами  $c^w = 1$ ,  $\delta^y = 0,2$ ,  $\delta^u = 0,05$ ,  $\mu = 20$ . “Экзотические” возмущения вида (7.2) с нестационарными частотами подбирались для иллюстрации возможной “плохой” динамики замкнутой адаптивной системы с МНК алгоритмом оценивания.

Во всех численных экспериментах начальные данные  $y_{1-n}^0$  выбирались случайным образом (с равномерным распределением) из отрезка  $[-\delta^w, \delta^w]$  и для иллюстрации качества оценок в установившемся режиме моделировались “локально плохие” возмущения  $v_{t+1}$ , максимизирующие  $|y_{t+1}|$  на интервалах времени  $[800, 810]$  и  $[1200, 1210]$ . Оптимальный интервал  $[-J(\theta), J(\theta)]$  обозначен на всех приведенных ниже графиках выхода  $y_t$  пунктирными прямыми с ординатами  $\pm J(\theta)$ .

В экспериментах с независимыми случайными возмущениями  $w_t$ ,  $\Delta^1(y)_t$ ,  $\Delta^2(u)_t$ , равномерно распределенными на соответствующих им интервалах, адаптивное управление на основе МНК на большинстве реализаций начальных данных  $y_{1-n}^0$  демонстрирует в установившемся режиме требуемое неравенство  $|y_t| \leq I(\zeta) = J(\theta) \approx 2,76$  при относительно небольших смещениях среднего значения выхода от нуля. Однако достаточно часто наблюдаются всплески с выходом за пределы оптимального интервала вследствие максимизирующего  $|y_{t+1}|$  возмущения  $v_{t+1}$  на указанных выше интервалах времени. Этот эффект представлен на левом графике рис. 1. Также достаточно часто выход  $y_t$  не попадает в оптимальный интервал. Известно, что смещение внешнего возмущения ( $c^w \neq 0$ ) представляет большую трудность для МНК ввиду недостаточного возбуждения соответствующей оценке  $\hat{c}^w$  компоненты

(равной 1) регрессионного вектора. В представленном на правом графике рис. 1 численном эксперименте выход  $y_t$  в установившемся режиме превышает оптимальную верхнюю границу более чем на порядок. Для сравнения график выхода адаптивного управления с алгоритмом оптимального оценивания (6.3)–(6.5) при тех же реализациях всех случайных величин представлен на левом графике рис. 2, иллюстрируя оптимальность адаптивного управления. На правом графике рис. 2 иллюстрируется исключительное достоинство оптимального алгоритма в виде графика текущих оптимальных значений  $I(\zeta_t)$ , согласованных с текущими данными измерений  $(y_{1-n}^t, u_1^{t-1})$  и удовлетворяющих неравенствам  $I(\zeta_t) \leq J(\theta)$ . Подчеркнем, что фактически гарантируемое качество управления заметно лучше оптимального значения  $J(\theta)$ , когда моделируемые возмущения фактически не являются наихудшими. Эти графики иллюстрируют несправедливость традиционной критики идентификации с помощью множественного оценивания (set-membership approach) как слишком грубого метода.

На рис. 3 представлены графики выхода  $y_t$  при МНК (слева) и оптимальном (справа) алгоритмах оценивания при детерминированных возмущениях (7.2) и одинаковых начальных данных  $y_{1-n}^0$ . Левый график иллюстрирует превышение выходом  $y_t$  оптимальной верхней границы  $J(\theta) \approx 2,76$  на два порядка. На правом графике рис. 3 показан нечасто наблюдавшийся небольшой всплеск выхода адаптивного оптимального управления за пределы оптимального интервала  $[-J(\theta), J(\theta)]$ .

Левый график на рис. 4 иллюстрирует выполнение неравенств (6.12) (ввиду больших всплесков в начальный период представлен только установившийся режим). График  $u_t$  (сплошная линия) при всех  $t$  находится в трубке  $[-\bar{u}_t, \bar{u}_t]$ , ограниченной пунктирными линиями. Отметим, что в многочисленных экспериментах не удалось найти пример возмущений, при которых нарушались бы неравенства (6.12). Правый график иллюстрирует выполнение неравенств  $I(\zeta_t) \leq J(\theta)$ , гарантирующих оптимальность адаптивного управления.

Известно, что переходные процессы в устойчивых линейных стационарных системах с ограниченными внешними возмущениями и без них могут сопровождаться значительными всплесками при неблагоприятных начальных данных [28, 29]. Следует отметить, что в силу “интегральной” природы идентификационного критерия (7.1) МНК, как правило, порождает существенно меньшие всплески на начальном отрезке времени. Оптимальный алгоритм (6.3)–(6.5) достаточно долго приписывает большие всплески наличию неопределенности с близкими к верхней границе 0,9 оценками  $\delta_t$ . Это иллюстрируют правые графики на рис. 2 и 4, на которых достаточно долго  $I(\zeta_t) = 0$  (что эквивалентно оценкам  $\delta_t^w = 0$ ). Численные эксперименты показали, что использование МНК алгоритма оценивания вместо оптимального оценивания (6.3)–(6.5) на начальных отрезках времени длиной от  $2 \dim \zeta$  до  $10 \dim \zeta$  в большинстве случаев улучшает переходные процессы в адаптивной оптимальной системе.

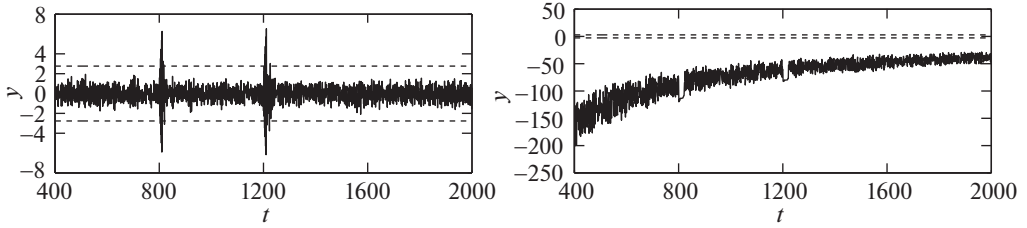


Рис. 1. Типичные выходы  $y_t$  при МНК алгоритме оценивания и случайных возмущениях.

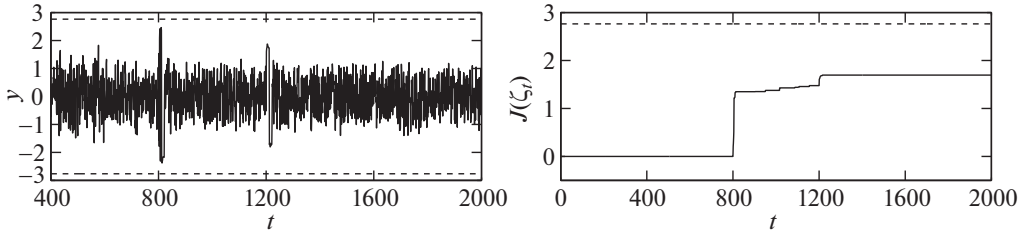


Рис. 2. Слева — выход  $y_t$  при оптимальном оценивании и случайных возмущениях; справа — график  $J(\zeta_t)$ .

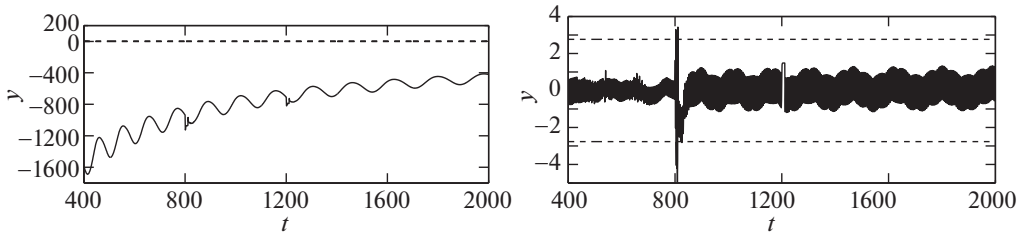


Рис. 3. Графики выхода  $y_t$  при МНК (слева) и оптимальном (справа) алгоритмах оценивания и детерминированных возмущениях (7.2).

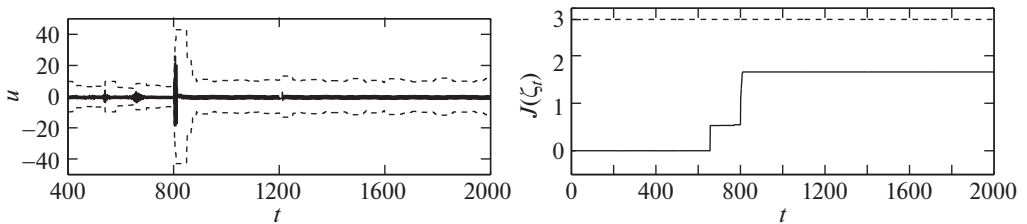


Рис. 4. Слева — графики  $u_t$  и  $\pm \bar{u}_t$ ; справа — график  $J(\zeta_t)$ .



Время на моделирование одного эксперимента на ноутбуке с процессором 4xIntelCore i5-7200U CPU@2.50GHz было менее 0,2 с. при МНК оценивании и в окрестности 2 с. при оптимальном оценивании. Число обновлений оценок на интервале  $[1, 2000]$  находилось в промежутке 50–75 и незначительно увеличивалось на интервале  $[1, 10^5]$ . Эти показатели иллюстрируют работоспособность алгоритма оптимального оценивания в онлайн режиме на примере системы с десятью неизвестными и девятью настраиваемыми параметрами, из которых 3 параметра (нормы внешнего ограниченного возмущения и неопределенностей по выходу и управлению) не оцениваются в рамках традиционных методов синтеза адаптивного управления.

## 8. Заключение

Согласно [30] “Основная задача управления для заданного процесса может быть сформулирована следующим образом: имея некоторую априорную информацию о процессе и конечное множество измерений, требуется построить регулятор с обратной связью, обеспечивающий заданное качество управления”. Более амбициозным вариантом этой задачи является требование асимптотической оптимальности управления за счет уточнения информации об управляемом процессе. Многие практические задачи управления формулируются в терминах допусков на отклонения выходов системы управления от заданных значений. Таким задачам соответствуют основное сигнальное пространство  $\ell_\infty$  ограниченных последовательностей и соответствующая ему теория робастного управления в  $\ell_1$ -постановке. Настоящая работа посвящена решению для объекта с авторегрессионной номинальной моделью проблемы применения  $\ell_1$ -теории в стандартном для приложений случае, когда априорная информация о параметрах номинальной модели и уровнях возмущений и неопределенностей недостаточна для априорного синтеза регулятора и недостающую информацию приходится извлекать из текущих данных измерений  $y_{1-n}^t, u_0^{t-1}$ . При четко сформулированных априорных предположениях предложено решение задачи оптимальной стабилизации в условиях сильной априорной неопределенности и неидентифицируемости неизвестных параметров, базирующееся на множественном оценивании неизвестных параметров и использовании показателя качества задачи управления как идентификационного критерия.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Условие робастной устойчивости (3.3) следует из теоремы 7 [24], примененной к системе (2.1), (3.1). Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно применить теоремы 5 и 6 [24] (см. также [15]). Для этого необходимо представить систему (2.1), (3.1) в стандартной  $M - \Delta$  форме, представленной на рис. 5 и имеющей блочный

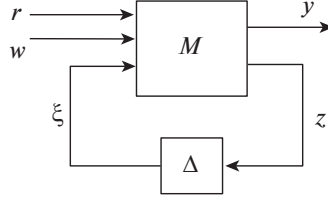


Рис. 5. М-Δ форма системы (2.1), (3.1).

вид.

$$(П.1) \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r \\ w \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{yr} & M_{yw} & M_{y\xi} \\ M_{zr} & M_{zw} & M_{z\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ w \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \xi = \Delta z.$$

Для системы (2.1), (3.1) сигнал  $r = c^w \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$ , и  $M - \Delta$  форма имеет вид

$$(П.2) \quad \begin{pmatrix} y \\ z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ w \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u \\ 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u \\ -\frac{c^w q}{b_1} & \delta^w G^\xi(q^{-1}) & \delta^y G^\xi(q^{-1}) & \delta^u G^\xi(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ w \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix},$$

где

$$z_t = \begin{pmatrix} y_t \\ u_t \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^1 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \Delta^1(y) \\ \Delta^2(u) \end{pmatrix}.$$

Первая и вторая строки матрицы  $M$  в (П.2) соответствуют равенству (3.2). Третья строка  $M$  соответствует представлению оптимального регулятора (3.1) в форме

$$\begin{aligned} u_t &= -c^w/b_1 + G^\xi(q^{-1})y_t = \\ &= -c^w/b_1 + \delta^w G^\xi(q^{-1})w_t + \delta^y G^\xi(q^{-1})\xi_t^1 + \delta^u G^\xi(q^{-1})\xi_t^2. \end{aligned}$$

Формула для  $J(\theta)$  в (3.4) соответствует показателю качества (2.4), в котором  $\sup$  берется на множестве возмущений  $v$  с неопределенностями  $\Delta^1$  и  $\Delta^2$  с конечной памятью (см. [12]), и выводится по теореме 5 [24] следующим образом. Положим  $\|z\|_{ss} = (\|z^1\|_{ss}, \dots, \|z^p\|_{ss})^T$  для векторной последовательности  $z \in \ell_e^p$  и

$$[M]_1 := \begin{pmatrix} \|M_{11}\|_1 & \cdots & \|M_{1p}\|_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \|M_{q1}\|_1 & \cdots & \|M_{qp}\|_1 \end{pmatrix}$$

для устойчивой  $q \times p$  матрицы  $M$  импульсных откликов  $M_{ij} \in \ell_1$ . Для матрицы  $M$  из (П.1) положим

$$M_{ss}(r) := \begin{pmatrix} [M_{yr}r]_{ss} + [M_{yw}]_1 & [M_{y\xi}]_1 \\ [M_{zr}r]_{ss} + [M_{zw}]_1 & [M_{z\xi}]_1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 5 из [24]

$$J(\theta) = [M_{yr}r]_{ss} + [M_{yw}]_1 + [M_{y\xi}]_1(I - [M_{z\xi}]_1)^{-1}([M_{zr}r]_{ss} + [M_{zw}]_1).$$

Тогда для системы (П.2) имеем

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \delta^w + (\delta^y \ \delta^u) \left( I - \begin{pmatrix} \delta^y & \delta^u \\ \delta^y \|G^\xi\| & \delta^u \|G^\xi\| \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \delta^w \\ |c^w| \|\frac{-q}{b_1} r\|_{ss} + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + (\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} 1 - \delta^y & -\delta^u \\ -\delta^y \|G^\xi\| & 1 - \delta^u \|G^\xi\| \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta^w \\ |c^w/b_1| + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + \frac{1}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} (\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} 1 - \delta^u \|G^\xi\| & \delta^u \\ \delta^y \|G^\xi\| & 1 - \delta^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^w \\ |c^w/b_1| + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + \frac{1}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} (\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} \delta^w + \delta^u |c^w/b_1| \\ (1 - \delta^y) |c^w/b_1| + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + \frac{\delta^y \delta^w + \delta^u |c^w| \|G^\xi\| + \delta^u \delta^w \|G^\xi\|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} = \frac{\delta^w + \delta^u |c^w/b_1|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|}. \end{aligned}$$

Наконец, монотонная сходимость  $J_\mu(\theta)$  к  $J(\theta)$  в (3.4) гарантируется теоремой 6 из [24].

*Доказательство утверждения 1.* Вектор  $\hat{\theta}$  удовлетворяет априорному предположению **АП1** в силу условий утверждения 1. Для всех  $t > 0$  положим  $\hat{v}_t = \hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1}$ . Тогда объект управления с вектором параметров  $\hat{\theta}$  и суммарным возмущением  $\hat{v}$  удовлетворяет уравнению (2.1), и в силу (4.1) возмущение  $\hat{v}$  удовлетворяет неравенствам

$$|\hat{v}_t - \hat{c}^w| \leq \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_t^y + \hat{\delta}^u p_t^u.$$

Значения  $\hat{v}_t$  можно представить в виде (2.2), выбрав подходящие значения  $w_t$ ,  $\Delta^1(y)_t$ ,  $\Delta^2(u)_t$ , удовлетворяющие неравенствам (2.3), и обеспечив тем самым справедливость априорного предположения **АП2**.

*Доказательство теоремы 2.*

Докажем, что при каждом обновлении оценок расстояние от  $\zeta_t$  до подпространства  $\Omega_{t+1}$  больше  $\varepsilon$ . Поскольку  $\zeta_t$  изменяется, только если  $\psi_{t+1}^T \zeta_t < \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|$  и  $\psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1}$  для любого  $\hat{\zeta} \in \Omega_{t+1}$ , то

$$\varepsilon |\psi_{t+1}| < |\psi_{t+1}^T (\hat{\zeta} - \zeta_t)| \leq |\psi_{t+1}| |\hat{\zeta} - \zeta_t|$$

и, следовательно,  $|\hat{\zeta} - \zeta_t| > \varepsilon$  для любого  $\hat{\zeta} \in \Omega_{t+1}$ . Таким образом, после добавления к описанию  $Z_t$  неравенства  $\psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1}$ , описывающего полупространство  $\Omega_{t+1}$ , полиэдр  $Z_{t+1}$  и все последующие не пересекаются с  $\varepsilon$ -окрестностью вектора  $\zeta_t \in Z_t$ . Из этого следует, что  $\varepsilon/2$ -окрестности различных оценок  $\zeta_t$  не пересекаются между собой. Так как  $Z_{t+1} \subset Z_t$  для всех  $t$ , число изменений оценок  $Z_t$  и  $\zeta_t$  будет конечным, если оценки  $\zeta_t$  лежат в ограниченном множестве. Из уравнения адаптивного регулятора (6.1) для всех  $t$  имеем

$$|u_t| \leq |c_t^w/b_1^t| + \|G^{\xi_t}\| \|y_{t-n+1}^t\|.$$

Тогда для объекта (2.1) на промежутке времени  $[0, t]$  справедливы неравенства (5.5) с параметрами

$$\tilde{\delta}_t^e = \delta^w + \delta^u \max_{s \leq t} |c_s^w/b_1^s|, \quad \tilde{\delta}_t = \delta^y + \delta^u \max_{s \leq t} \|G^{\xi_s}\|.$$

Следовательно  $\tilde{\zeta}_t = (\xi_t^T, c_t^w, \tilde{\delta}_t^e, \tilde{\delta}_t)^T \in Z_t$  при всех  $t$ . Если выполнено предположение (6.7), то  $I(\tilde{\zeta}_t) \leq \bar{I}$ , где  $\bar{I}$  определено в (6.9) (при этом правое неравенство в (6.9) очевидно следует из определения  $G_u$  в (6.6)). Из (6.5) для всех  $t$  следует

$$I(\zeta_t) \leq I(\tilde{\zeta}_t)$$

и тогда  $I(\zeta_t) \leq \bar{I}$ . Из ограниченности  $I(\zeta_t)$  следует ограниченность оценок  $\zeta_t$  и, таким образом, конечность числа обновлений оценок  $\xi_t$  и  $Z_t$ . Тогда  $\zeta_t = \zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$  с некоторого момента времени  $t_\infty$  и

$$(П.3) \quad \psi_{t+1}^T \zeta_\infty \geq \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}| \quad \forall t \geq t_\infty.$$

Из (П.3) следует, что для всех  $t \geq t_\infty$

$$\begin{aligned} |a_\infty(q^{-1})y_{t+1} - b_\infty(q^{-1})u_t - c_\infty^w| &\leq \delta_\infty^e + \delta_\infty p_{t+1} + \varepsilon |\psi_{t+1}| \leq \\ &\leq \delta_\infty^e + \delta_\infty p_{t+1} + \varepsilon(\sqrt{n+1} p_{t+1} + \sqrt{2} + |u_t|) \leq \\ &\leq \delta_\infty^e + \varepsilon(\sqrt{2} + |c_\infty^w/b_1^\infty|) + [\delta_\infty + \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)] p_{t+1}. \end{aligned}$$

В силу утверждения 1 из раздела 4 из полученного неравенства следует, что выход  $y$  при всех  $t \geq t_*$  удовлетворяет уравнению (2.1) с вектором параметров  $\zeta_\infty^e$  вида (6.10). Тогда теорема 1 гарантирует левое неравенство в (6.8). Для доказательства правого неравенства в (6.8), разность  $I(\zeta_\infty^e) - I(\zeta_\infty)$  оценим сверху с помощью неравенства

$$\frac{C_1 + \varepsilon_1}{C_2 - \varepsilon_2} - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 \varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{C_2(C_2 - \varepsilon_2)} < \frac{\varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{(C_2 - \varepsilon_2)^2}$$

с параметрами  $C_1 = \delta_\infty^e$ ,  $C_2 = 1 - \delta_\infty \leq 1$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon(\sqrt{2} + |c_\infty^w/b_1^\infty|)$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)$ . Тогда

$$I(\zeta_\infty^e) - I(\zeta_\infty) < \frac{\sqrt{2} + |c_\infty^w/b_1^\infty| + \delta_\infty^e(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)}{(1 - \delta_\infty - \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|))^2} \varepsilon$$

и, следовательно,  $K_{\zeta_\infty}$  имеет вид (6.11). Первое утверждение теоремы 2 доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть теперь в замкнутой адаптивной системе выполняются неравенства (6.12). Тогда из уравнения объекта (2.1) следуют неравенства (5.3) с постоянными  $C_1 = |c^w/b_1|$  и  $C_2 = \|G^\xi\|$ . Это означает, что для неизвестного вектора параметров  $\zeta$ , определенного в (5.9), при всех  $t$  выполняются целевые неравенства (5.5) с параметрами  $\delta^e, \delta$  вида (5.8) и включения  $\zeta \in Z_t$ . Тогда в силу выбора оптимальных оценок  $\zeta_t$  согласно (6.5) при всех  $t$

$$I(\zeta_t) \leq I(\zeta) = J(\theta),$$

где равенство  $I(\zeta) = J(\theta)$  установлено в (5.9). Отсюда, как и в первом утверждении теоремы 2, следуют сходимость оценок  $\zeta_t$  и  $Z_t$  за конечное время и неравенства (6.13).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rohrs C., Valavani L., Athans M., Stein G. "Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics" // The 21st IEEE Conference on Decision and Control. 1982. P. 3–11. <https://doi.org/10.1109/CDC.1982.268392>
2. Rohrs C., Valavani L., Athans M., Stein G. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics // IEEE Transactions Automatic Control. 1985. V. 30. No. 9. P. 881–889. <https://doi.org/10.1109/TAC.1985.1104070>
3. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
4. Annaswamy A.A., Fradkov A.L. A historical perspective of adaptive control and learning // Annual Reviews in Control. 2021. V. 52. P. 18–41. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.10.014>
5. Narendra K., Annaswamy A. Stable adaptive systems. Dover, 2005.
6. Ioannou P.A., Sun J. Robust adaptive control. PTR Prentice-Hall, NJ: Upper Saddle River, 1996.
7. Smith R.S., Dahleh M. (Eds.) The Modeling of Uncertainty in Control Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences). V. 192. London, U.K.: Springer-Verlag, 1994.
8. Ljung L., Guo L. The Role of Model Validation for Assessing the Size of the Unmodeled Dynamics // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. P. 230–239. <https://doi.org/10.1109/9.623084>
9. FLamnabhi-Lagarrique F., Annaswamy A., Engell S., Isaksson A., Khargonekar P., Murray R., Nijmeijer H., Samad T., Tilbury D., Van den Hof P. Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges // Annual Reviews in Control. 2017. V. 43. P. 1–64. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2017.04.001>
10. Khammash M., Pearson J.B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. V. AC-36. No. 4. P. 398–412. <https://doi.org/10.1109/9.75099>

11. *Khammash M., Pearson J.B.* Analysis and design for robust performance with structured uncertainty // *Syst. Control Lett.* 1993. V. 20. No. 3. P. 179–187.
12. *Khammash M.H.* Robust steady-state tracking // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1995. V. 40. No. 11. P. 1872–1880. <https://doi.org/10.1109/9.471208>
13. *Khammash M.H.* Robust Performance: Unknown Disturbances and Known Fixed Inputs // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1997. V. 42. No. 12. P. 1730–1734. <https://doi.org/10.1109/9.650028>
14. *Соколов В.Ф.* Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в  $\ell_1$ -метрике // *АиТ.* 1999. № 1. С. 101–112.  
*Sokolov V.F.* Asymptotic Robust Performance of the Discrete Tracking System in the  $\ell_1$ -metric // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 1. Part 2. P. 82–91.
15. *Соколов В.Ф.* Робастное управление при ограниченных возмущениях. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН. 2011.
16. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в  $\ell_1$ -постановке // *АиТ.* 1998. № 3. С. 107–131.  
*Sokolov V.F.* Adaptive Robust Control of a Discrete Scalar Object in the  $\ell_1$ -statement // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 3. Part 2. P. 392–411.
17. *Sokolov V.F.* Adaptive  $\ell_1$  robust control for SISO system // *Systems Control Lett.* 2001. V. 42. No. 5. P. 379–393. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(00\)00110-9](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00110-9)
18. *Guo L.* Feedback and uncertainty: Some basic problems and results // *Annual Reviews in Control.* 2020 V. 49. P. 27–36. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.04.001>
19. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. 1981.
20. *Sokolov V.F.* Control-oriented model validation and errors quantification in the  $\ell_1$  setup // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2005. T. 50. No. 10. P. 1501–1508. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.856646>.
21. *Sokolov V.F.* Model Evaluation for Robust Tracking Under Unknown Upper Bounds on Perturbations and Measurement Noise // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2014. T. 59. No. 2. P. 483–488. <https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2273295>.
22. *Соколов В.Ф.* Моделирование системы субоптимального робастного слежения при неизвестных верхних границах внешних и операторных возмущений // *АиТ.* 2014. № 5. С. 115–136.  
*Sokolov V.F.* Modeling the System of Suboptimal Robust Tracking Under Unknown Upper Bounds on the Uncertainties and External Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 5. P. 900–916.
23. *Соколов В.Ф.* Задачи адаптивного оптимального управления дискретными системами с ограниченным возмущением и линейными показателями качества // *АиТ.* 2018. № 6. С. 155–171.  
*Sokolov V.F.* Problems of Adaptive Optimal Control of Discrete-Time Systems under Bounded Disturbance and Linear Performance Indexes // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 6. P. 1086–1099.
24. *Sokolov V.F.*  $\ell_1$  robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty // *Syst. Control Lett.* 2001. V. 42. No. 5. P. 363–377. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(00\)00109-2](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00109-2)

25. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. N.Y.: Cambridge University Press, 2004.
26. *Guo L.* Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Trans. Automat. Control. 1996 V. 41. No. 1. P. 79–89. <https://doi.org/10.1109/9.481609>
27. *Guo L., Chen H.-F.* The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 7. P. 802–812.
28. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // АиТ. 2015. № 6. С. 18–41.  
*Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Autom. Remote Control. 2016. V. 76. No. 6. P. 957–976.
29. *Polyak D.T., Shcherbakova P.S., Smirnov G.* Peak effects in stable linear difference equations // J. Diff. Equat. and Appl. 2018. V. 24. No 9. P. 1488–1502. <https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1504930>
30. *Dahleh M.A., Doyle J.C.* From Data to Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences. 192. The modeling of Uncertainty in Control Systems. Springer Verlag, 1994. P. 61–63.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 25.04.2022

После доработки 24.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023