

Стохастические системы

© 2023 г. А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (ABosov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ¹

Представлена модель стохастической системы наблюдения, позволяющая учесть временные задержки между поступившим наблюдением и фактическим состоянием наблюдаемого объекта, сформировавшим эти наблюдения. Такого рода задержки возможны при наблюдении за движением объекта в водной среде с применением акустических сонаров и оказывают принципиальное влияние на точность отслеживания положения. Приведены уравнения для решения оптимальной в среднем квадратическом задачи фильтрации. Поскольку практическое использование оптимального решения фактически невозможно из-за вычислительной сложности, основное внимание уделено альтернативному, неоптимальному, но вычислительно эффективному подходу. Именно, к предложенной модели адаптирован условно-минимаксный нелинейный фильтр (УМНФ), сформулированы достаточные условия существования его оценки. Проведен вычислительный эксперимент на близкой к практическим потребностям модели. Результаты эксперимента показали, с одной стороны, работоспособность УМНФ в рассматриваемой модели, с другой — значительное падение качества оценивания в сравнении с моделью без случайной задержки наблюдений, что можно рассматривать как источник для дальнейшего исследования модели и связанных с ней задач.

Ключевые слова: нелинейная стохастическая система наблюдения, наблюдения со случайными запаздываниями, условно-минимаксный нелинейный фильтр, имитационное моделирование.

DOI: 10.31857/S000523102306003X, EDN: CSDMWT

1. Введение

Одним из самых универсальных инструментов описания поведения систем, изменяющихся с течением времени, являются модели стохастических динамических систем. Если при этом информация о неизвестном состоянии системы доступна только посредством косвенных наблюдений, то ключевое

¹ Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, Москва).

значение для решения практически любых задач получает задача фильтрации — оценивания текущего состояния системы вместе с поступлением очередных наблюдений. Решение задачи фильтрации, важное само по себе, дает средства к решению других задач как анализа (например, идентификации параметров), так и синтеза (например, управления с обратной связью) стохастических систем. Эти задачи в течение многих лет сохраняют актуальность и для множества приложений, и для фундаментальных исследований. Среди множества приложений одними из самых значимых являются примеры применения методов стохастической фильтрации в задачах слежения и навигации [1]. Традиционный прикладной контекст таких приложений — это летательные аппараты (ЛА), управляемые или беспилотные, и радиолокационные средства наблюдения. В последние годы те же задачи даже более часто исследуются в другом прикладном контексте, в связи с автономными подводными аппаратами (Autonomous underwater vehicles, AUV) или «подводными дронами» [2] (ПА). Этот класс роботизированных систем находит много разнообразных применений, и в большинстве из них требуется решать задачи слежения и навигации [3–5]. К моделям этих систем вполне применимы известные методы стохастической фильтрации начиная от фильтра Калмана [6] и его нелинейных субоптимальных аналогов типа расширенного фильтра Калмана [7] до модных современных концепций сигма-точечных фильтров (пионерская работа по этой теме — [8], удачный обзор — [9]. Однако для задач, связанных с водной средой, обнаруживаются существенные особенности. Так, хорошо известным свойством акустических измерителей является зависимость скорости распространения акустической волны от температуры, солености и давления воды [10]. Это обстоятельство хорошо изучено в [11] в задаче построения робастной навигационной системы, в которой объединяются данные измерений акустических датчиков с информацией от других датчиков в бортовой инерциальной навигационной системе. Близкая модель и подход применены в [12], но с акцентом на результативность использования доплеровских сенсоров. Эта работа навела на мысль о возможности исследования модели наблюдателя, учитывающей задержки наблюдений в зависимости от дальности до объекта. Действительно, при моделировании движения подводных, в частности автономных, аппаратов и типовых средств наблюдения за ними наблюдения за положением аппарата считаются доступными немедленно и не учитывается временная задержка между инициацией очередного такта измерителя и получением результата этого измерения. Традиционно этой разницей пренебрегают, что вполне обосновано для ЛА и различных радиолокаторов и вполне физически понятно. Кроме того, не слишком популярные модели с временной задержкой таковы еще и потому, что никакого нового качества в задачу фильтрации детерминированная известная задержка не вносит. Наконец, надо понять, какова природа задержки, чтобы предложить содержательную модель. Движение ПА в отличие от ЛА дает содержательные ответы на эти вопросы. Именно, поскольку измерители используют не радио, а звуковые волны, которые передаются водной средой,

то задержки, во-первых, могут быть весьма существенны, а во-вторых, будут меняться вместе с изменением дальности до наблюдаемого объекта. Исходя из этих положений в статье предложена принципиально новая модель стохастической динамической системы наблюдения. Она описана в разделе 2. В разделах 3 и 4 приведены решения задачи фильтрации — оптимальный и условно-минимаксный фильтры [13]. В разделе 5 обсуждаются результаты численного эксперимента, в котором моделируется движение ПА в плоскости и с постоянной скоростью, за которым ведутся акустические наблюдения их двух удаленных точек (измеряются дальности и углы до цели). Иллюстрируется принципиальная разница результативности оценивания положения аппарата по наблюдениям без и с задержкой. Также обсуждаются перспективы решения других связанных с рассматриваемой моделью задач, в частности возможность идентификации параметров движения.

2. Модель динамической системы со случайными задержками наблюдений

Система наблюдения описывается в дискретном времени $t = -T, -T + 1, \dots, 0, 1, \dots$. Началом процесса фильтрации предполагается момент $t = 0$, в который требуется получить первую оценку состояния, но эволюционировать система начала некоторое время T ранее. Состояние системы $x_t \in \mathbb{R}^{p_x}$ описывается разностными уравнениями общего вида:

$$(1) \quad x_t = \varphi_t(x_{t-1}, w_t), \quad x_{-T-1} = \eta,$$

где $w_t \in \mathbb{R}^{p_w}$ — дискретный белый шум, моделирующий возмущения, $\eta \in \mathbb{R}^{p_x}$ — начальные условия.

Значение τ_t временной задержки наблюдений моделируется случайной последовательностью, элементы которой — дискретные случайные величины со значениями во множестве $\{0, 1, \dots, T\}$, и является функцией состояния x_t :

$$(2) \quad \tau_t = \theta_t(x_t).$$

Косвенные наблюдения $y_t \in \mathbb{R}^{q_y}$ описываются уравнениями следующего вида:

$$(3) \quad y_t = \psi_t(x_{t-\tau_t}, v_t),$$

где $v_t \in \mathbb{R}^{q_v}$ — дискретный белый шум, моделирующий ошибки измерения. Предполагается, что векторы η, w_t, v_t независимы в совокупности.

Таким образом, единственным отличием данной модели от традиционной нелинейной системы наблюдения с дискретным временем является зависимость текущего наблюдения y_t от состояния, вычисленного раньше момента t на случайную величину τ_t . Такая формулировка следует предложенной выше прикладной интерпретации задачи как слежение за движением автономного ПА. Цель предложить модель максимально общего вида не ставится,

например, в (2) нет самостоятельного возмущения, а в (3) все наблюдения запаздывают на одну и ту же величину. При необходимости можно расширить модель и учесть дополнительное возмущение в (2), просто расширив им вектор состояния. Также можно τ_t сделать вектором. Но более важным представляется сформировать качественное представление о модели (1)–(3), даже если она имеет не самый общий вид.

Рассматривается задача оценивания состояния x_t по наблюдениям y_s , $s = 0, 1, \dots, t$, критерий точности \hat{x}_t среднеквадратический: $E \left\{ \|x_t - \hat{x}_t\|^2 \right\}$, $E \{x\}$ — математическое ожидание x , $\|x\|$ — обычная евклидова норма вектора x .

Отметим, что есть ряд причин, согласно которым модели как состояния (1), так и наблюдений (3) имеет смысл уточнять. Так, общим условием существования решения задачи фильтрации является наличие вторых моментов у процесса x_t , что обеспечивается ограничением линейного роста на функции φ_t , а это для практических целей слишком обременительно. Компромиссное описание требуется также для применения ряда наиболее популярных субоптимальных фильтров, например расширенного фильтра Калмана [7] или сигма-точечных фильтров [8]. И хотя в данной модели такие методы фильтрации применить не получится, но потребность замены модели (1)–(3) на некоторую диффузионного типа альтернативу ясна. Наконец, упрощенная форма (1)–(3) нужна для записи уравнений оптимальной фильтрации, представленных в следующем разделе.

3. Оптимальная фильтрация

Предлагаемый и, возможно, единственный подход к получению уравнений оптимальной фильтрации в рассматриваемой задаче состоит в записи рекуррентных байесовских соотношений для апостериорной плотности вероятности, что является типичным решением для дискретных систем наблюдения [14]. С целью упрощения представления предлагается уточнить модель (1)–(3) следующим образом:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_t &= \varphi_t(x_{t-1}) + w_t, & x_{-T-1} &= \eta, \\ y_t &= \psi_t(x_{t-\tau_t}) + v_t. \end{aligned}$$

Предполагаются известными плотности вероятности векторов w_t , η , v_t . Для обозначения этих плотностей, а также плотностей других, в том числе условных распределений далее будем использовать один и тот же способ. Пусть случайный вектор $(x', y)'$, где $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, ' — символ транспонирования, имеет и совместную, и маргинальные плотности вероятности. Тогда будем обозначать через $f_x(X)$ маргинальную плотность x , через $f_{x,y}(X, Y)$ совместную плотность x и y , через $f_{x|y}(X|Y)$ условную плотность x относительно y (предполагая дополнительно, что $f_y(Y) > 0$). Таким образом, для обозначения аргументов, соответствующих случайным переменным, используются те же буквы, только прописные.

Через y^t обозначим вектор всех наблюдений до момента t включительно, т.е. $y^t = (y'_0, \dots, y'_t)'$.

Заметим, что система с наблюдениями (4) не является марковской, но может быть представлена как компонент марковского процесса путем расширения вектора состояния. Введем новый вектор состояния $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{(T+1)p_x}$ следующим образом: $\mathbf{x}_t = (x'_{t-T}, \dots, x'_{t-1}, x'_t)'$, т.е. включим в него все состояния от момента $t - T$ до текущего t . Обратим внимание, что для расширенного состояния и соответствующих ему вероятностных характеристик, используемых далее, записываются символы, выделенные полужирным шрифтом. Уравнения состояния теперь примут вид

$$(5) \quad \begin{aligned} (\mathbf{x}_t)_{p_x+1}^{p_x} &= (\mathbf{x}_{t-1})_{p_x+1}^{2p_x}, \\ &\dots \\ (\mathbf{x}_t)_{(T-1)p_x+1}^{Tp_x} &= (\mathbf{x}_{t-1})_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x}, & \mathbf{x}_t &= \Phi_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ w_t \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{x}_t)_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x} &= \varphi_t \left((\mathbf{x}_{t-1})_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x} \right) + w_t, \end{aligned}$$

где через $(\mathbf{x})_i^j$ обозначен подвектор вектора \mathbf{x} с элементами от i -го до j -го. Таким образом, функция состояния φ_t из (4) заменяется на Φ_t из (5). Функцию наблюдателя ψ_t заменит Ψ_t :

$$\Psi_t(\mathbf{x}_t) = \left(\psi'_t((\mathbf{x}_t)_{p_x+1}^{p_x}), \dots, \psi'_t((\mathbf{x}_t)_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x}) \right)' = (\psi'_t(x_{t-T}), \dots, \psi'_t(x_t))'.$$

Вместо (2) зададим функцию $\Theta_t(\mathbf{x}_t)$, принимающую значения во множестве единичных векторов $\{e_0, \dots, e_T\}$ пространства \mathbb{R}^{T+1} так, чтобы $\Theta_t(\mathbf{x}_t) = e_i$, если $\theta_t(x_t) = i$. Это обозначение позволяет записать уравнение наблюдений в виде

$$(6) \quad y_t = \Theta'_t(\mathbf{x}_t) \Psi_t(\mathbf{x}_t) + v_t.$$

Таким образом, имеется каноническая форма марковской системы наблюдения с дискретным временем (5)–(6). Для условного распределения состояния \mathbf{x}_t этой системы относительно наблюдений y_s , $s = 0, \dots, t$, можно формально записать рекуррентные байесовские соотношения для апостериорной плотности вероятности [14]:

$$(7) \quad \begin{aligned} f_{\mathbf{x}_t|y^t}(\mathbf{X}_t|Y^t) &= \\ &= \frac{\int f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) d\mathbf{X}_{t-1} \cdot f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t)}{\int \int f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) d\mathbf{X}_{t-1} \cdot f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t) d\mathbf{X}_t}. \end{aligned}$$

Записывается (7) в предположении, что все фигурирующие в выражении плотности существуют, поэтому требуются, как минимум, некоторые уточнения в связи с переходной плотностью $f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1})$, записать которую

можно только с помощью обобщенных δ -функций. Кроме того, можно уточнить вид плотности $f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t)$. С этой целью внесем коррективы в вывод (7). Повторяя первые шаги, представим апостериорную плотность в виде

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}_t|y^t}(\mathbf{X}_t|Y^t) &= \frac{f_{\mathbf{x}_t,y^t}(\mathbf{X}_t, Y^t)}{f_{y^t}(Y^t)} = \frac{f_{\mathbf{x}_t,y^{t-1},y_t}(\mathbf{X}_t, Y^{t-1}, Y_t)}{f_{y^t}(Y^t)} = \\ &= \frac{f_{\mathbf{x}_t,y^{t-1}}(\mathbf{X}_t, Y^{t-1}) f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t)}{f_{y^t}(Y^t)}. \end{aligned}$$

Далее для первого множителя:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}_t,y^{t-1}}(\mathbf{X}_t, Y^{t-1}) &= f_{x_{t-T}, \dots, x_t, y^{t-1}}(X_{t-T}, \dots, X_t, Y^{t-1}) = \\ &= \int f_{x_{t-T-1}, x_{t-T}, \dots, x_t, y^{t-1}}(X_{t-T-1}, X_{t-T}, \dots, X_t, Y^{t-1}) dX_{t-T-1} = \\ &= \int f_{x_t|\mathbf{x}_{t-1}, y^{t-1}}(X_t|\mathbf{X}_{t-1}, Y^{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}, y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}, Y^{t-1}) dX_{t-T-1} = \\ &= \int f_{x_t|x_{t-1}}(X_t|X_{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) dX_{t-T-1} \cdot f_{y^{t-1}}(Y^{t-1}) = \\ &= \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) dX_{t-T-1} \cdot f_{x_t|x_{t-1}}(X_t|X_{t-1}) f_{y^{t-1}}(Y^{t-1}) = \\ &= \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) dX_{t-T-1} \cdot f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) f_{y^{t-1}}(Y^{t-1}). \end{aligned}$$

Последние преобразования выполнены в предположении, что $T > 1$, которое должно выполняться, чтобы рассматриваемая модель запаздывания имела смысл.

Выполненный шаг с первым множителем позволяет вместо переходной плотности $f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1})$ расширенного состояния использовать переходную плотность $f_{x_t|x_{t-1}}(X_t|X_{t-1})$ исходного состояния и, соответственно, вместо $\int \cdot d\mathbf{X}_{t-1}$, который вычисляется по пространству $\mathbb{R}^{(T+1)p_x}$, считать интеграл $\int \cdot dX_{t-T-1}$ по пространству \mathbb{R}^{p_x} .

Теперь для второго множителя:

$$\begin{aligned} f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t) &= \sum_{i=0}^T I(\Theta_t(\mathbf{X}_t) = e_i) f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t, \Theta_t(\mathbf{X}_t) = e_i) = \\ &= \sum_{i=0}^T I(\theta_t(X_t) = i) f_{y_t|\mathbf{x}_t, \tau_t=i}(Y_t|\mathbf{X}_t, \tau_t = i) = \\ &= \sum_{i=0}^T I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})). \end{aligned}$$

И окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{x}_t|y^t} &= \\
 &= \frac{\int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}} dX_{t-T-1} \cdot f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i}))}{f_{y^t}(Y^t) / f_{y^{t-1}}(Y^{t-1})} = \\
 &= \frac{f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}} dX_{t-T-1}}{\int f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}} dX_{t-T-1} d\mathbf{X}_t}.
 \end{aligned}$$

В последнем равенстве опущены аргументы у плотностей $f_{\mathbf{x}_t|y^t}(\mathbf{X}_t|Y^t)$ и $f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1})$, а также суммирование $\sum_{i=0}^T$ обозначено как \sum_i и учтено, что коэффициент $f_{y^t}(Y^t) / f_{y^{t-1}}(Y^{t-1})$ является нормирующим множителем.

Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для системы (4) существуют плотности вероятности возмущений $f_{w_t}(W_t)$, $t = -T, -T + 1, \dots$, ошибок наблюдений $f_{v_t}(V_t)$, $t = 0, 1, \dots$, и начального условия $f_\eta(X_{-T-1})$. Тогда для апостериорной плотности вероятности $\rho_t = \rho_t(\mathbf{X}_t|Y^t)$ расширенного состояния $\mathbf{x}_t = (x'_{t-T}, \dots, x'_{t-1}, x'_t)'$, $t = 0, 1, \dots$, этой системы относительно наблюдений $y^t = (y'_0, \dots, y'_t)'$, $t = 0, 1, \dots$, и оценки оптимального фильтра $x_t^ = E\{x_t|Y^t\}$ состояния x_t выполнены рекуррентные равенства*

$$\rho_t = \frac{f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int \rho_{t-1} dX_{t-T-1}}{\int f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int \rho_{t-1} dX_{t-T-1} d\mathbf{X}_t}, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_t^* = \int \mathbf{X}_t \rho_t(\mathbf{X}_t|Y^t) d\mathbf{X}_t, \quad x_t^* = (\mathbf{x}_t^*)_{T p_x + 1}^{(T+1)p_x},$$

с начальным условием

$$\begin{aligned}
 \rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}|Y^{-1}) &= \rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}) = \rho_{-1}(X_{-T-1}, \dots, X_{-1}) = \\
 &= f_\eta(X_{-T-1}) f_{w_{-T}}(X_{-T} - \varphi_{-T}(X_{-T-1})) \cdot \dots \cdot f_{w_{-1}}(X_{-1} - \varphi_{-T}(X_{-2})).
 \end{aligned}$$

Здесь, как и выше, опущены аргументы у плотностей $\rho_t(\mathbf{X}_t|Y^t)$ и упрощена запись суммы. Отметим, что для полученного соотношения (8) нет формальных причин, препятствующих возможности его компьютерной реализации. В отличие от (7) все множители в (8) описываются обычными функциями, так что интегралы могут вычисляться любым приближенным методом. Другой вопрос — это реалистичность выполнить такой компьютерный расчет. Это вопрос к размерностям, которые определяет в большей степени

значение T , чем размерности системы наблюдения p_x и q_y . В примере, рассмотренном далее в статье, полагается $T = 75$, и такой выбор подтверждается примерами реально смоделированных траекторий. В более реалистичных условиях величина T может составлять несколько сотен. Соответственно, даже при использованных в модельном примере небольших размерностях состояния ($p_x = 2$) и наблюдений ($q_y = 4$) интегралы в (7) пришлось бы вычислять по пространствам \mathbb{R}^{150} и \mathbb{R}^{300} , что, конечно, невозможно выполнить практически. Назначение соотношений (8) и канонической записи исследуемой системы наблюдения (5)–(6) состоит в том, чтобы обосновать отсутствие возможности как практической реализации даже приближенного оптимального фильтра, так и применения распространенных методов субоптимальной фильтрации. Так, формальная запись (5)–(6) не препятствует применению известных фильтров, например расширенного фильтра Калмана, полиномиальных, сигматочечных и иных аналогичных фильтров, равно как и более точных конструкций типа фильтра частиц [15]. Указанные особенности заранее показывают бесперспективность таких попыток. Единственная концепция практической фильтрации, сохраняющая актуальность для рассматриваемого случая, — это условно-минимаксная фильтрация.

4. Условно-минимаксная фильтрация

Идеи и детальное описание условно-минимаксного нелинейного фильтра (УМНФ) изложены в ряде доступных работ [13, 16], поэтому далее кратко приведены основные положения с учетом используемых в статье обозначений.

Оценка УМНФ \hat{x}_t состояния x_t по наблюдениям y^t ищется в форме прогноз-коррекция $\hat{x}_t = \tilde{x}_t + \Delta\hat{x}_t$. Для вычисления прогноза используется базовая прогнозирующая функция $\xi_t = \xi_t(x)$, типичный пример которой — прогноз в силу системы (1), т.е. $\xi_t(\hat{x}_{t-1}) = \varphi_t(\hat{x}_{t-1}, E\{w_t\})$ и $\xi_t \in \mathbb{R}^{p_x}$. Для вычисления коррекции используется базовая корректирующая функция $\zeta_t = \zeta_t(x, y)$, типичный пример которой — невязка наблюдений (3), т.е. $\zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) = y_t - \psi_t(\tilde{x}_t, E\{v_t\})$ и $\zeta_t \in \mathbb{R}^{q_y}$. Условно-минимаксные прогноз \tilde{x}_t и коррекция $\Delta\hat{x}_t$ являются решениями следующих оптимизационных задач:

$$(9) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_t &= \tilde{\Xi}_t(\xi_t), \tilde{\Xi}_t = \operatorname{argmin}_{\Xi_t} \max_{\mathcal{F}_z} E \left\{ \|x_t - \Xi_t(\xi_t)\|^2 \right\}, \\ \Delta\hat{x}_t &= \hat{x}_t - \tilde{x}_t = \hat{Z}_t(\zeta_t), \hat{Z}_t = \operatorname{argmin}_{Z_t} \max_{\mathcal{F}_z} E \left\{ \|x_t - \tilde{x}_t - Z_t(\zeta_t)\|^2 \right\}, \end{aligned}$$

где через \mathcal{F}_z обозначено распределение вектора z , относительно которого предполагается, что $\mathcal{F}_z \in \mathcal{F}(m_z, D_z)$ — классу всех вероятностных распределений со средним m_z и ковариацией D_z . Соответственно в первой задаче $z = (x'_t, \xi'_t)'$, а во второй — $z = (x'_t - \tilde{x}'_t, \zeta'_t)'$. Таким образом, базовые прогноз и коррекция уточняются наилучшим (в смысле близости в среднем квадратическом к оцениваемому состоянию) образом в предположении, что известны только моментные характеристики второго порядка оцениваемых и наблюдаемых переменных.

Отметим, что в общем случае выбор базовых прогноза и коррекции может являться самостоятельной задачей с решением, которое позволит обеспечить учет особенностей конкретной динамической системы. В частности, ξ_t и ζ_t не ограничиваются размерностями p_x и q_y . Предложенный в рассматриваемой задаче типовой выбор базовой коррекции $\zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) = y_t - \psi_t(\tilde{x}_t, E\{v_t\})$, по сути, игнорирует задержки наблюдений. Возможно, более правильным покажется выбор базовой коррекции в виде $\zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) = y_t - \psi_t(\tilde{x}_t - \tilde{\tau}_t, E\{v_t\})$, $\tilde{\tau}_t = \theta_t(\tilde{x}_t)$, т.е. задействие в базовой структуре фильтра модели задержки (2). В дальнейшем эту структуру прогноза можно исследовать подробнее, но на данный момент она представляется избыточной. Оптимизация (9) параметров должна не менее эффективно использовать разность $y_t - \psi_t(\tilde{x}_t, E\{v_t\})$, при этом размерность фильтра окажется такой же, как в постановке без учета временной задержки, в то время как «более сложная» коррекция $y_t - \psi_t(\tilde{x}_t - \tilde{\tau}_t, E\{v_t\})$, $\tilde{\tau}_t = \theta_t(\tilde{x}_t)$, приведет к значительному увеличению размерности фильтра, так как потребует хранения всех прогнозов $\tilde{x}_{t-\tau}$, $\tau = 0, 1, \dots, T$.

Поскольку наилучшим распределением в задачах (9) является нормальное, а соответствующая ему наилучшая в среднем квадратическом оценка определяется теоремой о нормальной корреляции [17], то искомые минимаксно-оптимальные функции $\tilde{\Xi}_t(\xi_t)$ и $\hat{Z}_t(\zeta_t)$ являются линейными, т.е.

$$(10) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_t &= F_t \xi_t + f_t, \quad \xi_t = \xi_t(\hat{x}_{t-1}), \\ \hat{x}_t &= \tilde{x}_t + H_t \zeta_t + h_t, \quad \zeta_t = \zeta_t(\tilde{x}_t, y_t), \end{aligned}$$

где

$$(11) \quad \begin{aligned} F_t &= \text{cov}(x_t, \xi_t) \text{cov}^+(\xi_t, \xi_t), \quad f_t = E\{x_t\} - F_t E\{\xi_t\}, \\ H_t &= \text{cov}(x_t - \tilde{x}_t, \zeta_t) \text{cov}^+(\zeta_t, \zeta_t), \quad h_t = -H_t E\{\zeta_t\}. \end{aligned}$$

В (11) использованы обозначения $\text{cov}(x, y)$ — ковариация x и y , $^+$ — операция псевдообращения по Муру-Пенроузу.

При этом прогноз \tilde{x}_t и оценка состояния \hat{x}_t являются несмещенными и обеспечивают следующее качество оценивания:

$$(12) \quad \begin{aligned} \tilde{K}_t &= \text{cov}(x_t - \tilde{x}_t, x_t - \tilde{x}_t) = \text{cov}(x_t, x_t) - F_t \text{cov}(\xi_t, x_t), \\ \hat{K}_t &= \text{cov}(x_t - \hat{x}_t, x_t - \hat{x}_t) = \tilde{K}_t - H_t \text{cov}(\zeta_t, x_t - \tilde{x}_t). \end{aligned}$$

Важно понимать, что соотношения (10)–(11) определяют условно-оптимальный фильтр Пугачева [18, 19], линейная структура которого постулируется изначально. Соответственно, концепция УМНФ дополняет этот фильтр минимаксным обоснованием структуры. Но не менее важен второй элемент концепции УМНФ — это способ практического определения коэффициентов F_t , f_t , H_t и h_t методом Монте-Карло, т.е. компьютерное имитационное моделирование, с помощью которого используемый фильтр получается заменой в (11) математических ожиданий и ковариаций их статистическими оценками, полученными в результате имитационного моделирования.

Применительно к рассматриваемой модели (1)–(3) или ее частному случаю (4) остается сформулировать условия существования решения (9). Удобный для практики вариант достаточных условий существования оценки УМНФ дает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) для системы наблюдения (1)–(3)

а) существует функция $C_\varphi(w) > 0$, $w \in \mathbb{R}^{p_w}$, такая что $E\{C_\varphi(w_t)\} < \infty$, $t = -T, -T + 1, \dots, 0, 1, \dots$, и $\|\varphi_t(x, w)\|^2 < C_\varphi(w) (1 + \|x\|^2)$, $x \in \mathbb{R}^{p_x}$;

б) существует функция $C_\psi(v) > 0$, $v \in \mathbb{R}^{p_v}$, такая что $E\{C_\psi(v_t)\} < \infty$, $t = 0, 1, \dots$, и $\|\psi_t(y, v)\|^2 < C_\psi(v) (1 + \|y\|^2)$, $y \in \mathbb{R}^{p_y}$;

в) существуют константы $C_\xi > 0$ и $C_\zeta > 0$ такие, что для структурных функций УМНФ выполнено $\|\xi_t(x)\|^2 < C_\xi (1 + \|x\|^2)$ и $\|\zeta_t(x, y)\|^2 < C_\zeta (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2)$;

2) для системы наблюдения (4)

а) возмущения w_t , ошибки наблюдений v_t и начальные условия η имеют нормальные распределения (или любые распределения со всеми конечными моментами);

б) существуют константы $C > 0$ и $D > 0$ такие, что $\|\varphi_t(x)\|^2 + \|\psi_t(y)\|^2 + \|\xi_t(x)\|^2 + \|\zeta_t(x, y)\|^2 < C (1 + \|x\|^D + \|y\|^D)$.

Тогда прогноз \tilde{x}_t и оценка \hat{x}_t условно-минимаксного фильтра (9) существуют, описываются соотношениями (10), (11) и обеспечивают качество фильтрации (12).

Данное утверждение является адаптацией теорем существования [13]. Доказательство состоит из двух принципиальных моментов. Во-первых, это решение минимаксных задач (9), которое дает уже упомянутое свойство линейной оценки, определяемой теоремой нормальной корреляции, в совокупности с наихудшим на классе $\mathcal{F}(m_z, D_z)$ нормальным распределением. Второй элемент доказательства — это существование вторых моментов векторов $(x'_t, \xi'_t)'$ и $(x'_t - \tilde{x}'_t, \zeta'_t)'$ в предположении конечности момента $E\{\|\hat{x}_{t-1}\|^2\} < \infty$. Достаточность условий 1) применительно к модели (1)–(3) или 2) применительно к (4) удобно подтвердить, используя расширенную систему (5). Именно, записывая систему наблюдения с помощью переменной \mathbf{x}_t и учитывая, что $\|\Theta_t(\mathbf{x})\| = 1$, получаем те же канонические обозначения системы наблюдения, что использованы в [13] и, следовательно, достаточность условий 1) и 2) для существования требуемых вторых моментов.

Качественное содержание условий 1) и 2) теоремы состоит в ограничении скорости роста функций модели и структуры фильтра на бесконечности: в условиях 1) — это линейный рост и ограниченность случайных факторов, в условиях 2) — это полиномиальный рост и существование всех моментов случайных факторов.

Таким образом, для подтверждения применимости оценки УМНФ в рассматриваемой задаче со случайным запаздыванием наблюдений остается проверить в рамках численного эксперимента возможность приближенного вычисления параметров (11) фильтра и сравнить реальное качество фильтрации с расчетными значениями (12), вычисленными с оценками Монте-Карло параметров (11).

5. Слежение за подводной целью, движущейся в плоскости с постоянной скоростью

Для практического эксперимента с исследуемой постановкой и алгоритмом фильтрации использована простая модель движения в плоскости с постоянной скоростью. Предполагается, что автономный ПА движется на глубине в горизонтальной плоскости Oxy . Описываемое далее движение ПА и наблюдения за ним схематически проиллюстрированы на рис. 1. Для обозначения координат траектории движения будем использовать общепринятые обозначения $x(t)$ и $y(t)$, единицей измерений этих величин принимаются километры (км). Использование здесь x , y не должно вызывать сложности в связи с общими обозначениями x_t , y_t , использованными выше для состояний и наблюдений. Начальное положение ПА задано вектором $(x(-T-1), y(-T-1))'$, который имеет нормальное распределение со средним $(0, 12,5)'$ и ковариацией $\text{diag}\{25, 100\}$. Координатные составляющие скорости постоянны и равны соответственно $v_x = 25$ км/ч, $v_y = 50$ км/ч. Единице измерения времени час (ч) отвечает шаг дискретизации наблюдений $h = 0,0001$ ч, что соответствует частоте около трех измерений в секунду. Рас-

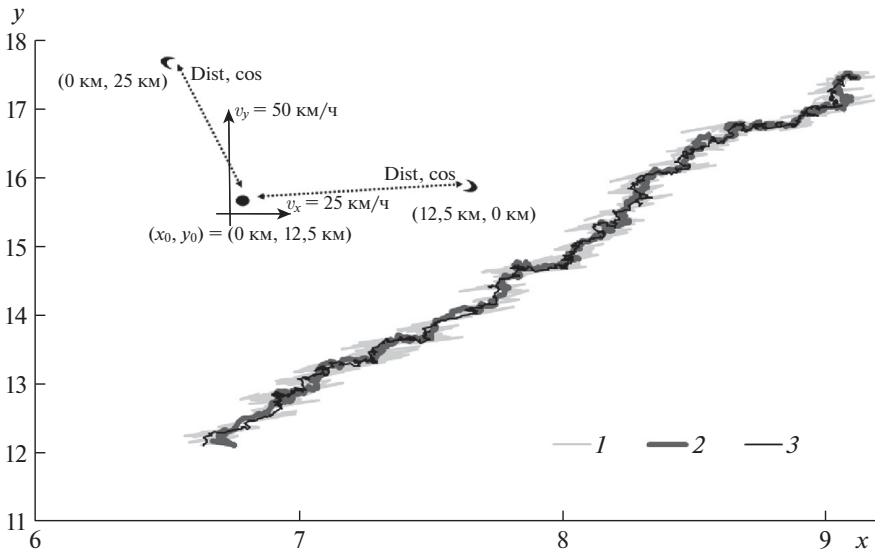


Рис. 1. Схема движения-наблюдения и пример типовых траекторий: 1 — прямая оценка положения \check{x}_t , 2 — траектория ПА x_t , 3 — оценка УМНФ \hat{x}_t .

чет выполняется для 1000 шагов дискретизации, что соответствует 6 мин движения. За это время ПА в среднем перемещается на расстояние порядка 5,5 км.

Величина задержки T будет принимать два значения. Сначала будут показаны результаты расчета для $T = 0$, т.е. в условиях обычных наблюдений, без задержки. Затем полагается $T = 75$, т.е. максимальная задержка 0,0075 ч или 27 с, на иллюстрациях ниже показано, что для выбранных параметров примера такая величина задержки отвечает используемой физической интерпретации, т.е. есть траектории, на которых задержка наблюдений близка к заданному максимуму.

Предполагается, что на движение ПА оказывают влияния неконтролируемые управляющие воздействия, которые моделируются аддитивными возмущениями $w_x(t)$ и $w_y(t)$, вектор $(w_x(t), w_y(t))'$ имеет нормальное распределение со средним $(0, 0)'$ и ковариацией $\text{diag}\{1, 4\}$. Таким образом, имеем следующую динамику:

$$(13) \quad \begin{aligned} x(t) &= x(t-1) + hv_x + \sqrt{h} w_x(t), \\ y(t) &= y(t-1) + hv_y + \sqrt{h} w_y(t). \end{aligned}$$

Наблюдатели расположены в двух точках на той же плоскости Oxy : первый имеет координаты $(0, l_y)$, $l_y = 25$, т.е. расположен в 25 км от начала координат по оси Oy , второй — $(l_x, 0)$, $l_x = 12,5$, т.е. расположен в 12,5 км от начала координат по оси Ox . Наблюдатели одинаковы, каждый измеряет дальность, $d_1(t)$ и $d_2(t)$, и направляющий косинус до объекта, $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Вектор ошибок наблюдений $(v_{d_1}(t), v_{d_2}(t), v_{c_1}(t), v_{c_2}(t))'$ предполагается гауссовским со средним $(0, 0, 0, 0)'$ и ковариацией $\text{diag}\{0,001^2, 0,005^2, 0,001^2, 0,005^2\}$. Поскольку на практике такие измерения могут быть реализованы толькосонарами, то нужно отметить, что назначенные точностные параметры не вполне отражают точность реальных устройств [20]. В описываемом эксперименте такие точностные характеристики использованы с тем, чтобы сохранить хотя бы видимую конкурентность альтернативному алгоритму фильтрации, алгоритму прямого вычисления положения, описанному далее. Увеличение погрешностей наблюдений приводит к тому, что этот алгоритм теряет смысл.

Итак, имеются следующие наблюдения:

$$(14) \quad \begin{aligned} d_1(t) &= \sqrt{(x(t-\tau_t))^2 + (y(t-\tau_t) - l_y)^2} + v_{d_1}(t), \\ c_1(t) &= \frac{(y(t-\tau_t) - l_y)}{\sqrt{(x(t-\tau_t))^2 + (y(t-\tau_t) - l_y)^2}} + v_{c_1}(t), \\ d_2(t) &= \sqrt{(x(t-\tau_t) - l_x)^2 + (y(t-\tau_t))^2} + v_{d_2}(t), \\ c_2(t) &= \frac{(x(t-\tau_t) - l_x)}{\sqrt{(x(t-\tau_t) - l_x)^2 + (y(t-\tau_t))^2}} + v_{c_2}(t). \end{aligned}$$

Остается определить модель τ_t . Для первого расчета предположение $T = 0$ автоматически влечет $\tau_t = 0$. Для второго расчета модель τ_t удобно задать двумя случайными величинами $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$, задающими задержки наблюдений соответственно для первого и второго наблюдателей. С учетом шага дискретизации $h = 0,0001$ ч и примерной скорости звука в воде $v_s = 5400$ км/ч $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ выражаются через дальности наблюдателей до ПА, т.е.

$$(15) \quad \begin{aligned} \tau_1(t) &= \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t) - l_y)^2}}{(hv_s)} \right] \right\}, \\ \tau_2(t) &= \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(x(t) - l_x)^2 + (y(t))^2}}{(hv_s)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение $[x]$ для целой части x и учтена потенциальная возможность удаления объекта на дистанцию, для которой величина задержки становится больше заданного максимума T . Заметим, что в (14) подразумевается использование вместо общего обозначения задержки τ_t значений $\tau_1(t)$ для $d_1(t)$ и $c_1(t)$, значений $\tau_2(t)$ для $d_2(t)$ и $c_2(t)$. Таким образом, модель задержки (15) имеет даже более общий вид, чем (2). На самом деле, никакого принципиального обобщения здесь нет и нетрудно скорректировать модель (2) так, чтобы учесть получившиеся в данном примере разные задержки для разных наблюдений. Поскольку на фильтрацию эти обстоятельства влияния не оказывают, то больше на них останавливаться не будем.

Для анализа качества фильтрации, обеспечиваемого оценкой УМНФ, требуется какой-то альтернативный вариант оценивания положения ПА. Как уже отмечалось выше, известные субоптимальные алгоритмы фильтрации к рассматриваемой модели неприменимы. По другой причине вычислительного характера, но с тем же результатом не представляется возможным рассчитывать оценку оптимального фильтра, определенной теоремой 1. Единственной реализуемой альтернативой на данном этапе исследования представляется алгоритм прямого вычисления положения или оценка по методу наименьших квадратов. Оценка $\check{x}_t = (\check{x}(t), \check{y}(t))'$ этого фильтра получается следующим образом. Сначала предположим, что в (14) нет задержки и отсутствуют ошибки наблюдений. Тогда каждая пара измеряемых дальности и косинуса очевидным образом может быть пересчитана в координаты $(\check{x}_1(t), \check{y}_1(t))$ и $(\check{x}_2(t), \check{y}_2(t))$. Теперь оценка положения \check{x}_t — это середина отрезка, соединяющего эти две точки. Эта довольно примитивная оценка в данной задаче не так плоха. Дело в том, что использование других алгоритмов, например расширенного фильтра Калмана, разных вариантов сигма-точечных фильтров и других, используемых без учета задержки, скорее всего, приведет к расходимости фильтра, в то время как оценка фильтра прямого вычисления положения гарантированно не может расходиться, поскольку не учитывает динамику вообще и использует только одно точечное наблюдение.

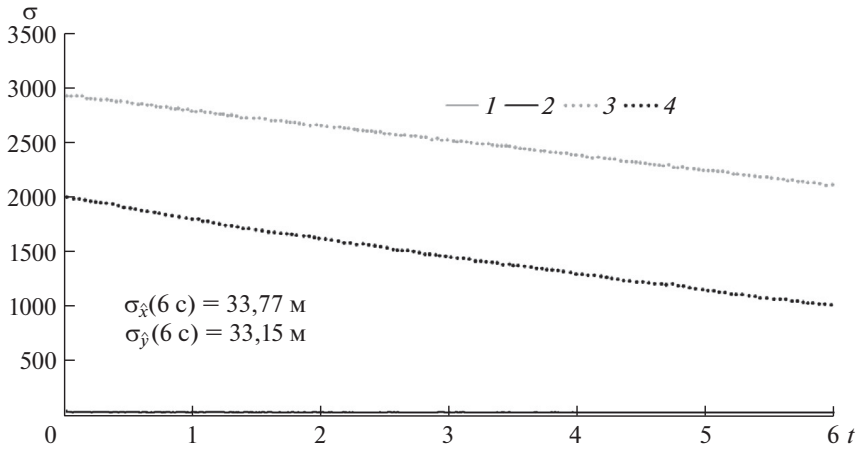


Рис. 2. Среднеквадратические отклонения: 1 — $\sigma_{\hat{x}}(t)$, 2 — $\sigma_{\hat{y}}(t)$, 3 — $\sigma_{\check{x}}(t)$, 4 — $\sigma_{\check{y}}(t)$.

Для синтеза УМНФ и анализа его качества моделировалось два независимых пучка по 100 000 траекторий. На первом пучке рассчитывались параметры фильтра по формулам (11) и (12), в которых математические ожидания заменялись статистическим средним, т.е. по методу Монте-Карло. На втором пучке оценивалось реальное качество оценки УМНФ $\hat{x}_t = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))'$ и оценки \check{x}_t . Сравнивались точности оценивания координат положения ПА, определяемые средними квадратическими отклонениями ошибок оценок, обозначенных соответственно как $\sigma_{\hat{x}}(t)$, $\sigma_{\hat{y}}(t)$ для оценки УМНФ \hat{x}_t и как $\sigma_{\check{x}}(t)$, $\sigma_{\check{y}}(t)$ для прямой оценки положения \check{x}_t .

Вначале рассмотрим результаты первого расчета, выполненного в предположении $T = 0$. На рис. 1, кроме уже упомянутой схемы движения, приведены пример типовой траектории движения ПА $(x(t), y(t))$ и соответствующие ей оценки \check{x}_t и \hat{x}_t . Кроме очень высокой точности оценки УМНФ, отметим, что в сравнении с ней прямая оценка положения не очень информативна. Формальные характеристики приведены на рис. 2. Дополнительно отметим, что эксперимент подтверждает несмещенность оценки УМНФ, оценка \check{x}_t немного смещена — примерно на 1 м по переменной x и на 0,5 м по переменной y , что при таком качестве оценивания вряд ли существенно. При довольно точных измерениях дальности низкое качество точечных наблюдений обеспечивается ошибкой измерения направляющего косинуса, которая на имеющейся удаленности до ПА приводит к очень большой километровой погрешности оценки положения. Конечно, такую оценку использовать не следует. Но в следующем расчете ее качество уже не будет представляться таким уж неприемлемым.

В следующем расчете сохранены все параметры, в том числе на иллюстрации рис. 3 приведена та же траектория $(x(t), y(t))$, что и на рис. 1, но предполагается $T = 75$. Визуально этот пример показывает, что точность оценки УМНФ значительно снизилась, а вот точность оценки прямых наблюдений

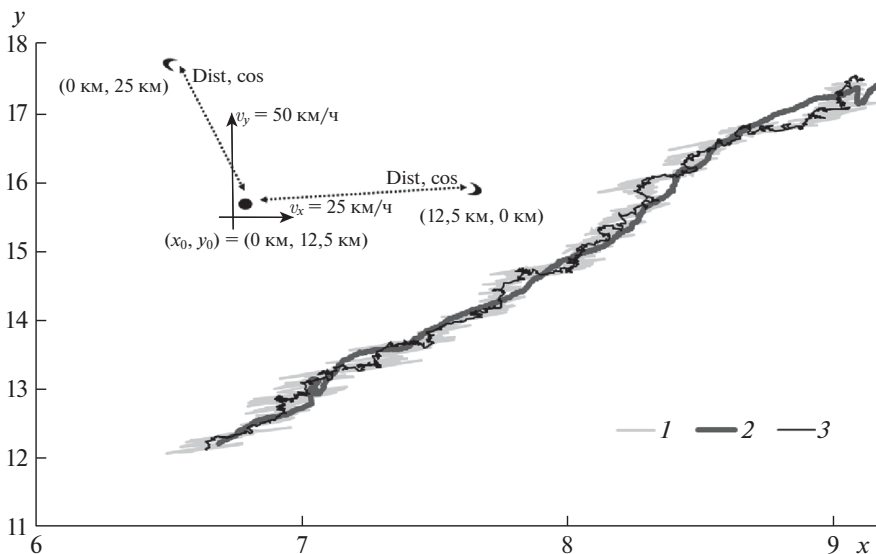


Рис. 3. Пример типовых траекторий в модели с запаздыванием: 1 — прямая оценка положения \tilde{x}_t , 2 — траектория ПА x_t , 3 — оценка УМНФ \hat{x}_t .

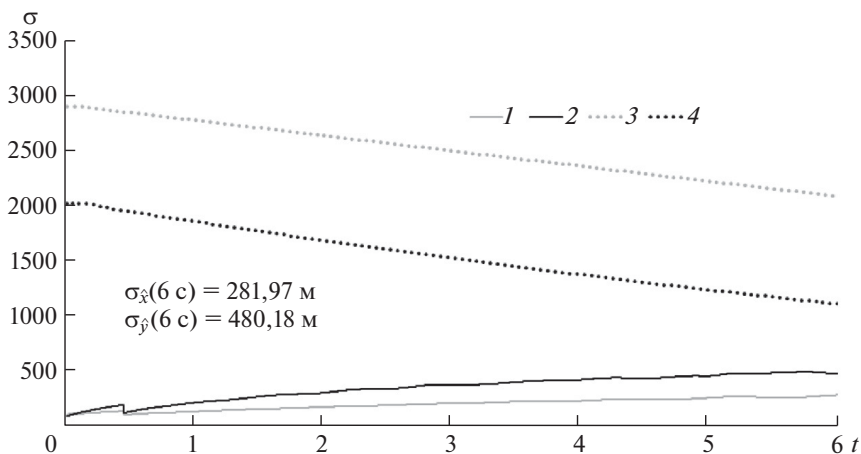


Рис. 4. Среднеквадратические отклонения в модели с запаздыванием: 1 — $\sigma_{\hat{x}(t)}$, 2 — $\sigma_{\hat{y}(t)}$, 3 — $\sigma_{\tilde{x}(t)}$, 4 — $\sigma_{\tilde{y}(t)}$.

изменилась не сильно. Этого следовало ожидать для оценки, использующей только одно точечное наблюдение. На нее не могла сильно повлиять задержка, так как в сравнении со скоростью звуковой волны даже в воде скорость ПА невелика в сравнении с уже имеющейся погрешностью оценки фильтра прямого вычисления положения. Формально качество иллюстрирует рис. 4, на котором представлены среднеквадратические отклонения для ошибок оценок координат положения ПА. И здесь главное — это падение качества оценки УМНФ на порядок, хотя, конечно, она продолжает значительно превос-

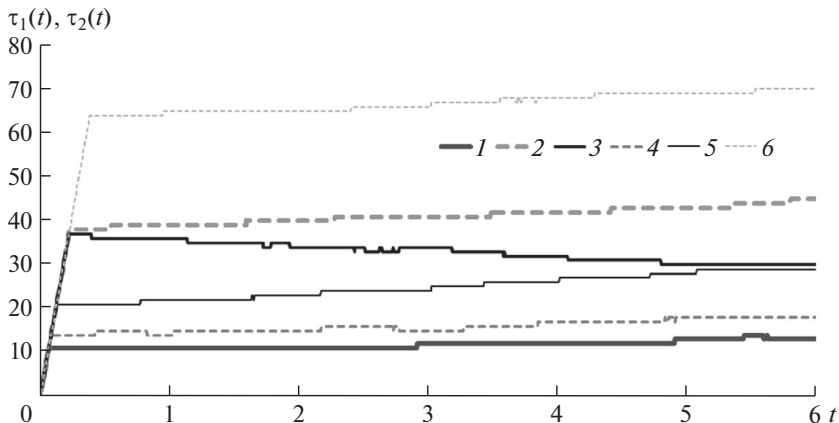


Рис. 5. Примеры траекторий задержек наблюдений: 1, 3, 5 — $\tau_1(t)$, 2, 4, 6 — $\tau_2(t)$, пары 1-2, 3-4, 5-6 отвечают одинаковым траекториям x_t .

ходить оценку прямых наблюдений. Причина этого ухудшения — процесс τ_t , или, точнее, $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$. Реальные значения величин задержки иллюстрирует рис. 5. Как видно, речь может идти о десятках секунд — время, за которое ПА может уплыть на сотни метров. Выводы по эксперименту сформулированы в заключении. Заметим только, что участки линейного роста $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ на начальной стадии связаны с отсутствием наблюдений в начальные моменты $t = 0, 1, \dots$, пока не достигаются значения t большие, чем задержки для данной траектории. Такое отличие в реализации эксперимента в сравнении с формальным описанием модели (1)–(3) нужно для того, чтобы на одном и том же пучке моделировать оба случая, с задержкой наблюдений и без нее.

6. Заключение

Представленная в статье попытка приблизиться к физической реальности, отражающей работу сонаров, наблюдающих за подводной целью, выражена простой моделью случайной задержки наблюдений, неизвестной и зависящей от состояния системы. Такая простая модель задержки дала довольно сложную для задачи фильтрации модель системы наблюдения. Фактически задержка — это многомерный мультипликативный шум в наблюдениях. Борьба с таким шумом крайне сложно. Многие субоптимальные алгоритмы фильтрации еще на уровне модели наблюдения исключают даже возможность такого шума. Целями выполненного эксперимента было, во-первых, подтверждение работоспособности концепции условно-минимаксной фильтрации, во-вторых, понимание величины потерь в качестве оценивания в сравнении с моделью без задержки. Обе цели достигнуты, но остался ряд вопросов для дальнейшего изучения. Первое, что требует улучшения, — это качество оценки состояния, обеспечиваемое УМНФ. В статье использована самая простая структура фильтра, в то время как физика примера позво-

ляет обоснованно предложить более гибкие решения, на что ориентирована концепция условно-оптимальной фильтрации и УМНФ, в частности. Второе направление — это обобщение модели движения, включающее отсутствие информации о параметрах движения. Действительно, как минимум, скорость движения ПА, точнее ее систематическая составляющая, вряд ли может считаться известной. Таким образом, параллельно с фильтрацией надо решать и задачу идентификации. Это типичная ситуация для практики, но здесь она будет существенно отягощена случайной задержкой. Наконец, третий вопрос — это использование доплеровских наблюдений. В [12] было показано, насколько существенно оценивание по наблюдениям простыми сонарами улучшается, если есть даже не очень точные данные о скорости. В рассматриваемой модели этот эффект может оказаться даже более значительным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bar-Shalom Y., X.-R. Li, Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software. John Wiley & Sons, Inc. 2002.
2. *Ehlers F. (Ed.)* Autonomous Underwater Vehicles: Design and Practice (Radar, Sonar & Navigation). London, UK: SciTech Publishing, 2020.
3. *Luo J., Han Y., Fan L.* Underwater Acoustic Target Tracking: A Review // *Sensors*. 2018. V. 18. No. 1(112).
4. *Ghafoor H., Noh Y.* An Overview of Next-Generation Underwater Target Detection and Tracking: An Integrated Underwater Architecture // *IEEE Access*. 2019. V. 7. P. 98841–98853.
5. *Su X., Ullah I., Liu X., Choi D.* A Review of Underwater Localization Techniques, Algorithms, and Challenges // *J. Sensors*. 2020. V. 2020 (6403161).
6. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // *Trans. ASME-J. Basic Engineer*. 1960. V. 82. Ser. D. P. 35–45.
7. *Bernstein I., Friedland B.* Estimation of the State of a Nonlinear Process in the Presence of Nongaussian Noise and Disturbances // *J. Franklin Instit*. 1966. V. 281. No. 6. P. 455–480.
8. *Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F.* A new approach for filtering nonlinear systems // *Proc. IEEE Amer. Control Conf. (ACC'95)*, 1995. P. 1628–1632.
9. *Menegaz H.M.T., Ishihara J.Y., Borges G.A., Vargas A.N.* A Systematization of the Unscented Kalman Filter Theory // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2015. V. 60. No. 10. P. 2583–2598.
10. *Christ R.D., Wernli R.L.* The ROV Manual: A User Guide for Remotely Operated Vehicles. 2nd Edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2013.
11. *Miller A., Miller B., Miller G.* Navigation of Underwater Drones and Integration of Acoustic Sensing with Onboard Inertial Navigation System // *Drones*. 2021. V. 5. No. 3 (83).
12. *Borisov A., Bosov A., Miller B., Miller G.* Passive Underwater Target Tracking: Conditionally Minimax Nonlinear Filtering with Bearing-Doppler Observations // *Sensors*. 2020. V. 20. No. 8 (2257).

13. *Pankov A.R., Bosov A.V.* Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1617–1620.
14. *Bertsekas D.P., Shreve S.E.* Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. N.Y.: Academic Press, 1978.
15. *Chen Z.* Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond // Statist. 2003. V. 182. No. 1. P. 1–69.
16. *Борисов А.В., Босов А.В., Кибзун А.И., Миллер Г.Б., Семенikhин К.В.* Метод условно-оптимальной нелинейной фильтрации и современные подходы к оцениванию состояний нелинейных стохастических систем // АиТ. 2018. № 1. С. 3–17.
Borisov A.V., Bosov A.V., Kibzun A.I., Miller G.B., Semenikhin K.V. The Conditionally Minimax Nonlinear Filtering Method and Modern Approaches to State Estimation in Nonlinear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 1–11.
17. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
18. *Пугачев В.С.* Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых разностными уравнениями // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1131–1133.
19. *Пугачев В.С.* Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // АиТ. 1979. № 6. С. 63–79.
Pugachev V.S. Estimation of Variables and Parameters in Discrete-time Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 4. P. 39–50.
20. *Weirathmueller M., Weber T.C., Schmidt V., McGillicuddy G., Mayer L., Huff L.* Acoustic Positioning and Tracking in Portsmouth Harbor, New Hampshire // Proc. OCEANS 2007, Vancouver, BC, Canada, 29 September – 4 October, 2007. P. 1–4.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 21.12.2022

После доработки 14.02.2023

Принята к публикации 30.03.2023