

## Управление в технических системах

© 2023 г. В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif\_ab@rambler.ru)  
(Азербайджанский Государственный Университет  
нефти и промышленности, Баку;  
Институт систем управления Министерства науки  
и образования Азербайджанской Республики, Баку)

### ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТ РАСПОЛОЖЕНИЯ И ЧИСЛА ТОЧЕК КОНТРОЛЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ОБОГРЕВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Решается задача синтеза управления процессом нагрева жидкого теплоносителя в теплообменнике за счет подаваемого в него пара. Процесс описывается линейным гиперболическим уравнением первого порядка с нелокальным краевым условием с запаздывающим во времени аргументом. Температура подаваемого пара ищется в виде линейной зависимости от значений температуры жидкости в теплообменнике в точках замера. Получены формулы градиента целевого функционала задачи управления в пространстве коэффициентов (параметров) обратной связи, участвующих в этой зависимости. Формулы использованы для построения численной схемы по определению параметров обратной связи, предложен алгоритм определения рационального (оптимального) числа точек замера.

*Ключевые слова:* система с распределенными параметрами, управление нагревом теплоносителя, обратная связь, точка контроля, градиент функционала, параметры обратной связи.

**DOI:** 10.31857/S0005231023060077, **EDN:** CSLSZB

#### 1. Введение

Решается задача оптимального синтеза управления процессом нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике, описываемого гиперболическим уравнением [1]. Нагрев жидкости осуществляется за счет подачи пара в теплообменник, температура которого является управлением. Нагретая жидкость циркулирует в замкнутой системе теплоснабжения. Это обуславливает наличие циклического краевого условия, связывающего значения температуры жидкости при выходе из теплообменника и возвращении в него после прохождения через обогревательную систему. Величина времени прохождения жидкости в системе нагрева задана и определяется скоростью движения жидкости и длиной трубопровода, по которому течет жидкость.

Целью управления является поддержание заданной температуры на выходе теплообменника. В рассматриваемой задаче температура подаваемого в теплообменник пара ищется в виде линейной зависимости от замеренных значений температуры жидкости в отдельных точках трубчатого теплообменника, т.е. для синтезируемого управления используется линейная зависимость

от замеренных значений температуры. Коэффициенты линейной зависимости, являющиеся синтезируемыми параметрами обратной связи, находятся минимизацией значения функционала, определяющего величину отклонения желаемой температуры жидкости в конце трубчатого теплообменника от вычисленной по имеющейся математической модели при заданных параметрах обратной связи. Подобная задача была рассмотрена в [1], позже в [2–5].

В данной статье, в отличие от ранее рассмотренных вариантов данной задачи, кроме определения значений синтезируемых параметров управления, предложен подход к оптимизации расположения мест точек замера температуры нагреваемой жидкости в трубчатом теплообменнике. Более того, исследуется вопрос эффективного (в определенном смысле, оптимального) количества точек замера температуры.

Предлагаемый ниже подход к решению задачи синтеза приводит исходное дифференциальное уравнение гиперболического типа к нагруженному дифференциальному уравнению, точками нагружения в котором являются оптимизируемые места точек замера. Подобные нагруженные задачи исследовались в [6, 7], а в [8, 9] предложены численные методы их решения.

Говоря в целом о задачах синтеза управления системами с распределенными параметрами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных [1, 10], необходимо отметить их сравнительно малую изученность в отличие от задач, описываемых дифференциальными уравнениями с обыкновенными производными [11]. Это объясняется, прежде всего, сложностью как построения адекватных математических моделей, так и их параметрической идентификации. Это связано с отсутствием или недостаточной точностью измеряемой оперативной информации о текущем состоянии исследуемых процессов. Не малое значение имело и отсутствие эффективных численных методов и вычислительных средств решения начально-краевых задач и надежного оборудования телемеханического контроля.

В последние годы интерес к этим задачам существенно возрос [12–18]. Это объясняется возросшими возможностями вычислительной и измерительной техники, развитием численных методов вычислительной математики, оптимизации, оптимального управления.

Задачам регулирования и оптимального управления системами как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами с обратной связью, в отличие от задач управления без обратной связи, посвящено сравнительно мало исследований, в которых предлагаются подходы к их решению [19–24]. В [11] приводится достаточно обширный анализ как истории исследований задач синтеза управления, так и современное их состояние.

Подход к решению задач синтеза, предлагаемый авторами, отличается от известных методов решения задач оптимального управления с обратной связью в основном тем, что исходная задача приводится к параметрической задаче оптимального управления относительно нагруженного дифференциального уравнения. Оптимизируемыми являются параметры обратной связи

зи, а точками нагружения — места проведения замеров текущего состояния процесса. В частности, данный подход был применен в наших исследованиях [4, 16, 17] для решения задач синтеза управления, отличающихся от рассмотренной в данной статье типом дифференциальных уравнений, краевыми условиями и целевым функционалом.

Применение предлагаемого метода и полученных формул для синтеза параметров обратной связи иллюстрируется на примере решения тестовой задачи, приводятся результаты компьютерных экспериментов и их анализ.

## 2. Формулировка проблемы

Рассматривается задача оптимального управления процессом нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике, которая далее поступает в систему теплоснабжения. Нагрев осуществляется за счет подачи горячего пара с регулируемой температурой в теплообменник (рис. 1). Процесс нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике длиной  $L$  может быть описан следующим линейным дифференциальным уравнением переноса гиперболического типа [1]:

$$(2.1) \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \lambda [q(t) - T(x, t)], \quad x \in (0, L), \quad t \in [0, t_f].$$

Здесь:  $T(x, t)$  — непрерывная и почти всюду дифференцируемая функция, определяющая температуру жидкости в точке  $x \in (0, L)$  в момент времени  $t \in [0, t_f]$ ;  $t_f$  — длительность процесса нагрева;  $\vartheta$  — величина скорости установившегося движения жидкости, являющаяся постоянной во времени во всех точках; управляющая кусочно-непрерывная функция  $q(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$  определяет температуру пара, подаваемого в теплообменник;  $\lambda$  — заданный коэффициент теплообмена между жидкостью в теплообменнике и подаваемого в него пара.

Температура подаваемого пара должна удовлетворять условиям технологического характера:

$$(2.2) \quad \underline{q} \leq q(t) \leq \bar{q}, \quad t \in [0, t_f].$$

Пусть нагретой в теплообменнике жидкости требуется время  $\tau$  для возврата из системы теплоснабжения в теплообменник. Это время задано и оно

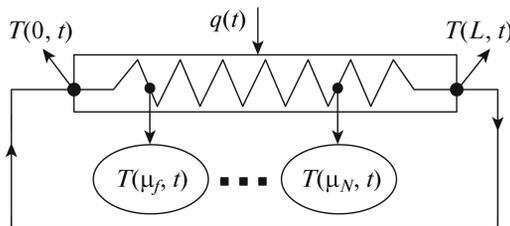


Рис. 1. Схема обогрвательной системы.

определяется длиной трубопроводной сети теплоснабжения  $l$ , которая многократно превосходит длину трубчатого теплообменника (т.е.  $l \gg L$ ), а именно  $\tau = (l + L) / \vartheta$ . В процессе движения жидкость остужается за счет теплообмена со средой обогрева, причем известен диапазон возможных потерь температуры при движении. В таком случае имеем следующее условие на температуру жидкости в начале и конце теплообменника

$$(2.3) \quad T(0, t) = (1 - \gamma)T(L, t - \tau), \quad t \in [0, t_f],$$

$$(2.4) \quad \gamma \in \Gamma = [1 - \delta, 1].$$

Величина  $\delta > 0$ , определяющая диапазон потерь тепла жидкости при прохождении нагреваемой среды, считается заданной.

Задана также плотность распределения  $\rho_\Gamma(\gamma)$  значений  $\gamma$  на множестве  $\Gamma$  такая, что

$$\rho_\Gamma(\gamma) \geq 0, \quad \int_\Gamma \rho_\Gamma(\gamma) d\gamma = 1.$$

Температура жидкости до начала процесса нагрева постоянна по времени и длине теплообменника, но задана не точно, а множеством возможных значений:

$$(2.5) \quad T(x, t) = \varphi = \text{const} \in \Phi = [\underline{\Phi}_0, \bar{\Phi}^0], \quad x \in [0, L], \quad t \leq 0,$$

где  $\underline{\Phi}_0, \bar{\Phi}^0$  заданы. Задана и функция плотности распределения  $\rho_\Phi(\varphi)$  такая, что

$$\rho_\Phi(\varphi) \geq 0, \quad \int_\Phi \rho_\Phi(\varphi) d\varphi = 1.$$

Рассматриваемая задача управления процессом нагрева жидкости в теплообменнике заключается в нахождении функции  $q(t)$ , определяющей температуру подаваемого пара, минимизирующей следующий функционал

$$(2.6) \quad J(q) = \int_\Phi \int_\Gamma \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; q, \varphi, \gamma) - V]^2 \rho_\Gamma(\gamma) \rho_\Phi(\varphi) dt d\gamma d\varphi + \\ + \varepsilon \|q(t) - \tilde{q}(t)\|_{L^2[0, t_f]}^2.$$

Здесь  $T(L, t; q, \varphi, \gamma)$  — значение температуры в конце теплообменника  $x = L$ , полученное из решения начально-краевой задачи (2.1), (2.3), (2.5) при заданных температуре подаваемого пара  $q = q(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ , начальной температуре жидкости  $\varphi$  и величине коэффициента потери тепла  $\gamma_0$ .

Специфика целевого функционала (2.6) заключается в том, что он оценивает качество управляющей функции  $q(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$  при управлении пучком траекторий  $T(x, t; q, \varphi, \gamma)$  при  $\varphi \in \Phi$  и  $\gamma \in \Gamma$ . Таким образом, рассматриваемая задача управления заключается в определении управления  $q(t)$ , для ко-

торого указанный пучок траекторий доставляет минимум функционалу. Другими словами, ищется управление, которое оптимально в среднем по множествам значений возможных начальных условий  $\Phi$  и коэффициентам потерь тепла  $\Gamma$ .

Заданное значение  $V$  равно желаемой температуре жидкости на выходе теплообменника при всевозможных начальных температурах  $\varphi \in \Phi$  и коэффициентах потери тепла  $\gamma \in \Gamma$ , которую надо поддерживать на интервале времени  $[t_b, t_f]$ . Заданное значение  $t_b$ ,  $0 \leq t_b \leq t_f$ , определяет момент времени, после которого температура жидкости на выходе теплообменника должна находиться в окрестности желаемой температуры  $V$ ;  $\varepsilon$ ,  $\tilde{q}(t)$  — заданные параметры регуляризации.

Функционал (2.6) оценивает поведение управляемого процесса нагрева в среднем по всевозможным значениям начальной температуры жидкости  $\varphi \in \Phi$  и коэффициентом потерь тепла  $\gamma \in \Gamma$ . Функционал (2.6) оценивает качество управления пучком фазовых траекторий, определенных множествами значений начальных условий  $\Phi$  и коэффициентов потерь тепла.

Предположим, что в точках трубчатого теплообменника  $\mu_i \in [0, L]$ ,  $i = 1, \dots, N$  ведутся замеры текущих значений температуры непрерывно

$$(2.7) \quad T_i(t) = T(\mu_i, t), \quad t \in [0, t_f], \quad i = 1, \dots, N,$$

или в заданные дискретные моменты времени  $t_j = j\Delta t$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $\Delta t = t_f/M$ :

$$(2.8) \quad T_{ij} = T(\mu_i, t_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

В общем случае как точки размещения  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ , так и их количество могут быть оптимизируемыми параметрами, причем они должны удовлетворять очевидным ограничениям:

$$(2.9) \quad 0 \leq \mu_i \leq L, \quad i = 1, \dots, N.$$

В случае непрерывных замеров (2.7) для назначения текущих значений температуры подаваемого пара используем линейную обратную связь (зависимость) в следующем виде:

$$(2.10) \quad q(t; \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\mu_i, t) - T_i^{nom.}] = \sum_{i=1}^N [\alpha_i T(\mu_i, t) - \beta_i], \quad t \in [0, t_f].$$

Здесь использовано обозначение

$$\beta_i = \alpha_i T_i^{nom.}, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\mathbf{P} = (\mu_1, \alpha_1, \beta_1, \dots, \mu_N, \alpha_N, \beta_N) = (\mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{3N}.$$

Вектор параметров обратной связи  $\mathbf{P}$ , значения которого определяют текущее значение температуры пара, подаваемого в теплообменник, а следовательно, определяют функционирование процесса нагрева в целом. Коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , будем называть коэффициентами усиления (по аналогии с задачами синтеза управления в системах с сосредоточенными параметрами).

Оптимизируемые параметры  $T_i^{nom}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определяют номинальные значения температуры, которые необходимо поддерживать в точках замера  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в процессе нагрева.

В случае, если замеры температуры проводятся в дискретные моменты времени, т.е. имеем (2.8), то для температуры пара, подаваемого в теплообменник, используем следующую кусочно-постоянную зависимость:

$$(2.11) \quad q(t; \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N [\alpha_i T_{ij} - \beta_i], \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, M.$$

Смысл параметров  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , такой же, что и выше. Подставляя управление вида (2.6) в уравнение (2.1), получим нагруженное дифференциальное уравнение [6, 8]:

$$(2.12) \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \lambda \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i T(\mu_i, t) - \beta_i \right], \quad x \in (0, L), \quad t \in [0, t_f],$$

в котором точками нагружения являются точки размещения замеров температуры.

Подставляя в (2.1) зависимость (2.10), получим дифференциальное уравнение

$$(2.13) \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \lambda \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i T(\mu_i, t_{j-1}) - \beta_i \right], \\ x \in (0, L), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, M,$$

со следующим естественным условием непрерывности процесса нагрева в моменты времени замера:

$$(2.14) \quad T(x, t_j + 0) = T(x, t_j), \quad x \in [0, L], \quad j = 1, \dots, M - 1.$$

Целевой функционал качества управления (2.6) для случаев с непрерывной (2.7) и дискретной обратной связью примет вид:

$$(2.15) \quad J(\mathbf{P}) = \int_{\Phi} \int_{\Gamma} \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - V]^2 \rho_{\Gamma}(\gamma) \rho_{\Phi}(\varphi) dt d\gamma d\varphi + \\ + \varepsilon \left\| \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}} \right\|_{\mathbb{R}^{3N}}.$$

Здесь  $\varepsilon$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}$  — параметры регуляризации;  $T(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  — решение начально-краевой задачи в случае непрерывных наблюдений (2.7) и задачи (2.13), (2.3), (2.5) при дискретных наблюдениях (2.9) и заданных значениях параметров обратной связи  $\mathbf{P}$ , начальной температуры  $\varphi \in \Phi$ , коэффициента потерь температуры  $\gamma \in \Gamma$ .

Будем предполагать, что известен диапазон возможных температур жидкости в трубчатом теплообменнике при всевозможных допустимых начальных температурах (2.5) и коэффициентах потерь температуры  $\gamma \in \Gamma$ :

$$(2.16) \quad \underline{T} \leq T(x, t) \leq \overline{T}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, t_f).$$

Ясно, что условие (2.16) должно выполняться для всех замеренных значений:

$$\underline{T} \leq T(\mu_i, t) \leq \overline{T}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, t_f), \quad i = 1, \dots, N.$$

Это означает, что  $N$ -мерный вектор

$$\tilde{T}(t) = (T(\mu_1, t), \dots, T(\mu_N, t)), \quad t \in (0, t_f)$$

принадлежит  $N$ -мерному кубу, вершины которого  $\tilde{T}^s = (\tilde{T}_1^s, \dots, \tilde{T}_N^s)$ ,  $s = 1, \dots, 2^N$  имеют координаты  $\underline{T}$  или  $\overline{T}$ , т.е.  $T_j^s$

$$\tilde{T}_j^s = \underline{T} \wedge \overline{T}, \quad x \in (0, L), \quad j = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, 2^N.$$

Тогда условия на управление (2.2), учитывая зависимость (2.9), можно перенести на параметры как при непрерывной, так и дискретной обратной связи в виде ограничений:

$$(2.17) \quad \underline{q} \leq \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i \overline{T} - \beta_i \right] \leq \bar{q}, \quad \underline{q} \leq \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_i \underline{T} - \beta_i \right] \leq \bar{q}.$$

Таким образом, рассматриваемая исходная задача управления температурой пара для нагрева теплоносителя и оптимизации мест расположения точек контроля при непрерывной обратной связи (2.7) приведена к задаче параметрического оптимального управления (2.12), (2.3), (2.5), (2.9), (2.16), (2.17), а при дискретной во времени обратной связи (2.8) вместо уравнения (2.12) должно использоваться уравнение (2.13). Размерность оптимизируемого конечномерного вектора параметров обратной связи  $\mathbf{P}$  равна  $3N$ , относительно которых имеются линейные ограничения (2.9), (2.17).

Специфика полученной задачи заключается, как указывалось выше, в нагруженности дифференциального уравнения (2.1) и целевом функционале (2.6), оценивающем поведение пучка траекторий при заданных параметрах обратной связи. Важно, что, несмотря на выпуклость целевого функционала в исходной задаче (2.1)–(2.6) по управлению  $q(t)$ , целевой функционал (2.15)

не является выпуклым по параметрам  $\mathbf{P}$  как для непрерывной, так и дискретной обратной связи (это следует из дифференциальных уравнений (2.12) и (2.13)). Отметим также небольшую размерность синтезируемого вектора параметров обратной связи, равного  $3N$ . В реальных приложениях  $N$  не превышает порядка 5–8, а следовательно, число постоянных параметров обратной связи не превышает порядка 20–30. Численное решение таких задач параметрического оптимального управления не представляет особых трудностей, учитывая, что решение не требуется проводить в режиме реального масштаба времени.

### 3. Необходимые условия оптимальности параметров обратной связи

Для исследования дифференцируемости и получения необходимых условий оптимальности первого порядка, используя известную технологию оценки приращения функционала, можно доказать следующую теорему.

*Теорема 1. Функционал (2.15) относительно решения начально-краевой задачи (2.12), (2.3), (2.5) при непрерывной обратной связи (2.7) дифференцируем по параметрам  $\mu_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, N$ . Компоненты градиента функционала определяются следующими формулами:*

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\mu_i} J(\mathbf{P}) = & \int_{\Phi} \left[ \int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \alpha_i \int_0^{t_f} \left( \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) T_x(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sigma(\mu_i - \tilde{\mu}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\alpha_i} J(\mathbf{P}) = & \int_{\Phi} \left[ \int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \int_0^{t_f} (T(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - \beta_i) \left( \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sigma(\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\beta_i} J(\mathbf{P}) = & \int_{\Phi} \left[ \int_{\Gamma} \left\{ \lambda \alpha_i \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sigma(\beta_i - \tilde{\beta}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

где  $i = 1, \dots, N$ .

Функция  $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  при заданных параметрах обратной связи  $\mathbf{P}$ , начальной температуре и коэффициенте потерь тепла  $\varphi$  является решением следующей сопряженной начально-краевой задачи

$$(3.4) \quad \psi_t(x, t) + \vartheta \psi_x(x, t) = \lambda \psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$(3.5) \quad \psi(x, t_f) = 0, \quad x \in [0, L],$$

$$(3.6) \quad \psi(L, t) = -\frac{2}{\vartheta}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_f - \tau, t_f],$$

$$(3.7) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau) - \frac{2}{a}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_b, t_f - \tau],$$

$$(3.8) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau), \quad t \in (0, t_b],$$

в точках  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , при  $t \in [0, t_f]$  удовлетворяющей условиям:

$$(3.9) \quad \psi(\mu_i^-, t) = \psi(\mu_i^+, t) + \frac{\lambda}{\vartheta} \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а в момент времени  $t_b$  удовлетворяющей условиям:

$$(3.10) \quad \psi(x, t_b^-) = \psi(x, t_b^+), \quad x \in [0, L].$$

**Теорема 2.** Функционал (2.15) относительно решения в начально-краевой задаче (2.13), (2.3), (2.5) при дискретной обратной связи (2.8) дифференцируем по параметрам обратной связи, а компоненты градиента функционала определяются формулами:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\mu_i} J(\mathbf{P}) = & \\ = \int_{\Phi} \left[ \int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \alpha_i \sum_{j=1}^M \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left( \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) T_x(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dt + \right. \right. & \\ \left. \left. + 2\sigma(\mu_i - \tilde{\mu}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, & \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\alpha_i} J(\mathbf{P}) = & \\ = \int_{\Phi} \left[ \int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \sum_{j=1}^M \int_{t_{j-1}}^{t_j} (T(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - \beta_i) \left( \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) dt + \right. \right. & \\ \left. \left. + 2\sigma(\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, & \end{aligned}$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} & \text{grad}_{\beta_i} J(\mathbf{P}) = \\ & = \int_{\Phi} \left[ \int_{\Gamma} \left\{ \lambda \mu_i \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx + 2\sigma(\beta_i - \tilde{\beta})_i \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

где  $i = 1, \dots, N$ .

Функция  $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  при заданных значениях  $\mathbf{P}, \varphi, \gamma$  является решением следующей начально-краевой задачи:

$$(3.14) \quad \psi_t(x, t) + \vartheta \psi_x(x, t) = \lambda \psi(x, t), \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$(3.15) \quad \psi(x, t_f) = 0, \quad x \in [0, L],$$

$$(3.16) \quad \psi(L, t) = -\frac{2}{\vartheta}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_M - \tau, t_M],$$

$$(3.17) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau) - \frac{2}{a}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_b, t_M - \tau],$$

$$(3.18) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau), \quad t \in (0, t_k],$$

в точках  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, N$ , при  $t_{j-1} \leq t \leq t_j, j = 1, \dots, M$ , удовлетворяющей условиям:

$$(3.19) \quad \psi(\mu_i^-, t) = \psi(\mu_i^+, t) + \frac{\lambda}{\vartheta} \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а в моменты времени  $t_j, j = 1, \dots, M$ , удовлетворяющей условиям:

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \psi(x, t_j^-) &= \psi(x, t_j^+) + \frac{\lambda}{\vartheta} \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta(x - \mu_i) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \psi(x, t) dx dt, \\ & x \in [0, L], \quad j = 1, 2, \dots, M. \end{aligned}$$

Сформулируем необходимые условия оптимальности в вариационной форме [25] относительно параметров обратной связи как для непрерывного, так и дискретного случая контроля, учитывая, как было указано в п. 2, возможность невыпуклости функционала (2.15).

**Теорема 3.** Пусть  $3N$ -мерный вектор параметров обратной связи  $\mathbf{P}^* = (\mu^*, \alpha^*, \beta^*)$ , удовлетворяющий условиям (2.9), (2.16), (2.17), доставляет локальный минимум функционалу (2.15). Тогда для произвольного вектора  $\mathbf{P} = (\mu, \alpha, \beta) \in R^{3N}$ , удовлетворяющего условиям (2.9), (2.16), (2.17),

выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial J(\mathbf{P}^*)}{\partial \mu}, \mu^* - \mu \right\rangle &\leq 0, \\ \left\langle \frac{\partial J(\mathbf{P}^*)}{\partial \alpha}, \alpha^* - \alpha \right\rangle &\leq 0, \\ \left\langle \frac{\partial J(\mathbf{P}^*)}{\partial \beta}, \beta^* - \beta \right\rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

Здесь знак  $\langle, \rangle$  означает скалярное произведение в  $N$  мерном пространстве.

#### 4. Схема численного решения задачи синтеза и результаты компьютерных экспериментов

Как показано выше, определение оптимальных значений параметров как непрерывной (2.7), так и дискретной (2.8) обратной связи приводит к решению задач параметрического оптимального управления. Для этого предлагается использовать методы оптимизации первого порядка [25, 26]. Учитывая линейность ограничений (2.16), (2.17) на оптимизируемые параметры и приведенные в теоремах 1 и 2 формулы для градиентов функционалов, эффективно использовать метод проекции градиента

$$(4.1) \quad \mathbf{P}^{\gamma+1} = \text{Pr}[\mathbf{P}^\gamma - \eta_\gamma \text{grad } J(\mathbf{P}^\gamma)].$$

Здесь  $\text{Pr}[\cdot]$  – оператор проектирования на ограничения (2.16), (2.17), который, учитывая их линейность, имеет конструктивный характер [24, 25]. Величина шага  $\eta_\gamma$  может определяться каким-либо методом из следующей одномерной минимизации:

$$\eta_\gamma = \arg \min_{\eta \geq 0} J(\mathbf{P}^\gamma - \eta \text{grad } J(\mathbf{P}^\gamma)).$$

Для учета запаздывания в краевых условиях как (2.3) для основной краевой задачи, так и условий (3.7) для сопряженной краевой задачи используется известный метод шагов с естественной величиной шага  $\tau$  [27]. Он заключается в том, что временной интервал  $[0; t_f]$  разбивается на интервалы длиной  $\tau$ :  $[t_s, t_{s+1}]$ ,  $\tau = t_{s+1} - t_s$ ,  $s = 1, \dots, m$ ,  $m = [t_f/\tau]$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_m = t_f$  ( $[a]$  – целая часть числа  $a$ , если  $t_f/\tau$  не является целым, то  $t_m = [t_f/\tau] + 1$ ). Далее начально-краевая задача решается последовательно от  $s = 0$  до  $s = m$ , а сопряженная задача (3.4)–(3.9) решается в обратном порядке от  $s = m$  до  $s = 0$ . В этом случае краевые условия при решении соответствующей начально-краевой задачи в каждом подынтервале запаздывание содержать не будут.

Другой спецификой задачи является нагруженность дифференциального уравнения (2.12). Подобные нагруженные задачи для различных типов дифференциальных уравнений исследованы в [6, 8]. Для численного их решения

в [8] были предложены методы, основанные на использовании методов сеток и специального представления для решения полученных редуцированных конечно-разностных краевых задач. Применение этого подхода для рассматриваемых задач не представляет сложности.

Для выбора параметров регуляризации  $\varepsilon$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}$  в функционале (2.15) и проведения самой регуляризации задачи используются алгоритмы, предложенные в [25, 26].

Решение начально-краевых задач проводилось с применением неявной схемы метода сеток, а для выбора сеточных шагов  $h_x$  по  $x$  и  $h_t$  по времени проводились численные эксперименты.

## 5. Оптимизация числа точек замеров

Может оказаться, что количество точек замера состояния управляемого процесса не задано и требуется оптимизировать их число и места их размещения. В связи с этим рассмотрим следующий подход к оптимальному выбору числа точек замеров. Очевидно, что оптимальное число наблюдаемых точек в какой-то степени должно удовлетворять условию возможной минимальности их числа.

Обозначим через  $J_N^* = J^*(\mathbf{P}^N; N)$  минимальное значение функционала задачи (2.3), (2.4)–(2.15) при заданном числе  $N$  точек наблюдения,  $\mathbf{P}^N$  — оптимальные значения параметров синтезированного управления с обратной связью. Ясно, что  $J_N^* = J^*(\mathbf{P}^N; N)$  как сложная функция аргумента  $N$  является невозрастающей, т.е. в общем случае имеет место неравенство

$$(5.1) \quad J^*(\mathbf{P}^*; \cdot) \leq J^*(\mathbf{P}^{N_1}; N_1) \leq J^*(\mathbf{P}^{N_2}; N_2), \quad N_2 < N_1.$$

Здесь  $J_N^* = J^*(\mathbf{P}^N; N)$  — оптимальное значение функционала исходной задачи (2.1)–(2.6) при числе точек наблюдений, равном  $N$ ;  $J^* = J^*(\mathbf{P}^*; \cdot)$  — оптимальное значение функционала задачи с обратной связью, распределенной по всему стержню, что соответствует замерам текущего состояния «почти» во всех точках стержня, т.е.

$$J^*(\mathbf{P}^*; \cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} J^*(\mathbf{P}^N; N).$$

Из (5.1) следует, что при увеличении числа наблюдаемых точек оптимальные значения целевого функционала могут лишь уменьшаться и приближаться сколь угодно близко к  $J^*$  (рис. 2). Следовательно, для произвольно заданного  $\delta > 0$  можно определить число точек замера  $N_\delta$ , при котором будет выполняться

$$J^*(\mathbf{P}^N; N) \leq J^* + \delta, \quad \text{при } N > N_\delta.$$

Для некоторых задач может оказаться, что существует определенное конечное значение  $N^*$ , для которого имеет место:

$$J^*(\mathbf{P}^N; N) = J^*, \quad \text{при } N > N^*.$$

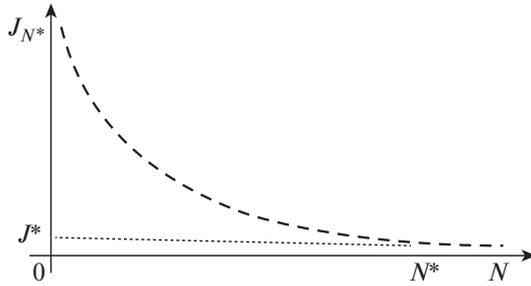


Рис. 2. Зависимость оптимального значения целевого функционала от числа замеров.

В качестве оптимального числа наблюдаемых точек предлагается принять такое минимальное значение  $N^*$ , при котором впервые выполняется одно из следующих неравенств:

$$(5.2) \quad \Delta J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) = \left| J^*(\mathbf{P}^{N^*+1}; N^* + 1) - J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) \right| \leq \delta,$$

$$\Delta J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) / J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) \leq \delta.$$

Здесь  $\delta$  — заданное положительное число, определяемое требуемой точностью решения задачи оптимизации числа наблюдаемых точек.

По результатам решения задачи синтеза параметров управления нагревом стержня с заданным числом  $N$  наблюдаемых точек можно уменьшить их число  $N$ , если для полученного оптимального вектора  $\mu^N$  для расположения каких-либо двух соседних точек наблюдения выполнилось условие

$$(5.3) \quad |\mu_{j+1}^N - \mu_j^N| \leq \delta_1, \quad j = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где  $\delta_1 > 0$  — заданное достаточно малое число. Выполнение условия (3.2) позволяет оставить одну из двух соседних точек замера, а следовательно, уменьшить на единицу число точек замера. Ясно, что уменьшение числа точек замера приводит как к увеличению надежности системы управления, так и уменьшению затрат на ее создание и эксплуатацию.

## 6. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты компьютерных экспериментов, полученные при следующих значениях данных, участвующих в исходной задаче (2.1)–(2.6).

Задача решена при следующих значениях данных, участвующих в ее постановке:  $L = 1$ ;  $\vartheta = 1$ ;  $\lambda = 0,1$ ;  $\tau = 0,2$ ,  $t_f = 5$ ,  $V = 70$ ,  $\Phi = [0, 0,2]$ ,  $\underline{q} = 55$ ;  $\bar{q} = 75$ ;  $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 8$ ,  $\underline{\alpha}_1 = \underline{\alpha}_2 = 1$ ,  $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = 75$ ,  $\underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = 57$ . Функция плотности  $\rho_\Gamma(\gamma)$  в расчетах была принята равномерно распределенной на  $[0, 0,2]$ , а аппроксимация интеграла по  $\Gamma$  осуществлялась методом прямоугольников с шагом 0,05.

**Таблица 1.** Начальные значения оптимизируемых параметров  $\mu, \alpha, \beta$  и соответствующие значения функционала

№	$\mu_1^0$	$\mu_2^0$	$\alpha_1^0$	$\alpha_2^0$	$\beta_1^0$	$\beta_2^0$	$J(\mathbf{P}^0)$
1	0,1	0,8	4	6	61	63	363,210004
2	0,2	0,9	3	5	65	60	357,150011
3	0,4	0,8	1	8	62	63	257,310003
4	0,5	0,7	5	2	63	66	165,150016
5	0,2	0,7	6	4	66	62	205,190007

**Таблица 2.** Полученные значения параметров и функционала

№	$\mu_1^{(6)}$	$\mu_2^{(6)}$	$\alpha_1^{(6)}$	$\alpha_2^{(6)}$	$\beta_1^{(6)}$	$\beta_2^{(6)}$	$J(\mathbf{P}^{(6)})$
1	0,2994	0,5994	5,9956	3,9952	66,9945	68,9949	0,3422
2	0,3000	0,6000	5,9977	3,9983	66,9978	68,9954	0,3259
3	0,2971	0,5971	5,9962	3,9988	66,9951	68,9948	0,3538
4	0,3000	0,6000	5,9978	3,9971	66,9991	68,9975	0,3145
5	0,3000	0,6000	5,9991	3,9961	66,9964	68,9973	0,3062

Отметим, что значения  $\alpha_i, \bar{\alpha}_i, i = 1, 2$  были подобраны с использованием результатов проведенных пробных расчетов, при которых требовалось выполнение технологического условия (2.2) при заданных  $q, \bar{q}$ .

Численные эксперименты выполнены при разных начальных значениях параметров  $(\mathbf{P}^0)^j = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \beta_1^0, \beta_2^0, \mu_1^0, \mu_2^0)^j, j = 1, 2, \dots, 5$ , использованных для итерационной процедуры оптимизации (4.1). В табл. 1 приведены эти значения и соответствующие значения функционала, в этих точках.

В табл. 2 приведены значения параметров  $(\mathbf{P}^{(6)})^j = (\mu_1^{(6)}, \mu_2^{(6)}, \alpha_1^{(6)}, \alpha_2^{(6)}, \beta_1^{(6)}, \beta_2^{(6)})^j$  и функционала  $J(\mathbf{P}^{(6)})^j$ , полученные на шестой итерации метода проекции градиента из начальных точек  $(\mathbf{P}^0)^j, j = 1, 2, \dots, 5$ , приведенных в табл. 1.

Как видно из табл. 3, при  $N = 6$  и  $N = 7$  минимальные значения функционалов удовлетворяют условию (5.2), а при  $N = 7$  оптимальные значения второй и третьей компонент вектора  $\mu$  удовлетворяют условию (5.3) при  $\delta = \delta_1 = 0,01$ . Значит, можно считать, что оптимальным числом точек замера является  $N^* = 6$ .

Проведены численные эксперименты, в которых точные значения наблюдаемых состояний процесса в точках замера  $T(\mu_1, t), T(\mu_2, t)$  были зашумлены случайными помехами по формуле

$$T(\mu_i, t) = T(\mu_i, t) (1 + \chi(2\theta_i - 1)), \quad i = 1, 2,$$

где  $\theta_i$  — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$ ,  $\chi$  — уровень помех.

В табл. 4 приведены полученные значения функционала и относительные отклонения между получаемой и желаемой температурами на выходе агрега-

**Таблица 3.** Результаты решения задач при разном числе точек наблюдения

№	$(\mu^0); (\alpha^0); (\beta^0)$	$J(\mathbf{P}^0)$	$(\mu^*); (\alpha^*); (\beta^*)$	$J(\mathbf{P}^*)$
3	(0,1; 0,4; 0,7); (3; 4; 8); (61; 65; 67)	336,46	(0,300; 0,600; 0,899); (5,002; 4,201; 4,002); (66,998; 67,998; 68,998)	0,3456
4	(0,1; 0,5; 0,7; 0,8); (1; 4; 8; 2); (60; 63; 66; 67)	323,64	(0,150; 0,300; 0,600; 0,849); (5,001; 4,102; 4,006; 3,999); (66,996; 67,999; 68,001; 68,999)	0,3549
5	(0,1; 0,2; 0,5; 0,7; 0,8); (3; 5; 7; 8; 3); (61; 63; 64; 66; 67)	368,54	(0,250; 0,300; 0,610; 0,800; 0,896); (5,101; 4,126; 4,106; 4,012; 3,9982); (66,987; 67,979; 68,201; 68,571; 68,989)	0,3436
6	(0,1; 0,2; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8); (3; 5; 6; 7; 8; 3); (58; 61; 64; 65; 66; 68)	408,37	(0,208; 0,305; 0,481; 0,605; 0,805; 0,900); (5,003; 4,086; 4,015; 4,013; 3,906; 3,999); (66,997; 67,999; 68,121; 68,571; 68,989; 68,999)	0,3234
7	(0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8); (3; 4; 5; 6; 7; 8; 3); (58; 60; 63; 64; 66; 67; 70)	217,23	(0,198; 0,303; 0,307; 0,491; 0,62; 0,791; 0,901); (0,162; 0,202; 0,198; 0,51; 0,303; 0,363; 0,371); (5,003; 4,086; 4,015; 4,013; 3,906; 3,912; 3,998); (66,998; 68,003; 68,323; 68,772; 68,979; 69,002; 69,012)	0,3023

**Таблица 4.** Значения функционала и относительные отклонения между получаемой и желаемой температурами на выходе агрегата при разных уровнях помех в измерениях

	$\chi = 0,00$	$\chi = 0,01$	$\chi = 0,03$	$\chi = 0,05$
$\max_{t \in [0,1]}  T(L,t) - V  /  V $	0,021941	0,033052	0,038311	0,064574
$J^*(\mathbf{P}^*)$	0,3023	0,3543	0,3762	0,3916

та при уровнях помех, равных 0% (без помех), 1%, 3%, 5%, соответствующих значениям  $\chi = 0$  (без помех), 0,01; 0,03; 0,05.

Как видно из табл. 4, управление процессом нагрева теплоносителя в печи нагреваемого аппарата с обратной связью достаточно устойчиво к погрешностям замеров.

## 7. Заключение

В статье исследуется задача синтеза управления температурой подаваемого пара в нагревательный аппарат для нагрева теплоносителя, циркулирующего в замкнутой системе теплоснабжения. Задача описывается линейным гиперболическим уравнением первого порядка, а краевые условия содержат запаздывание, обусловленное необходимым временем для циркуляции теплоносителя.

Температура пара, подаваемого в аппарат, назначается в зависимости от текущих значений температуры в точках замера. Исходная задача синтеза управления приводится к параметрической задаче оптимального управления относительно нагруженного дифференциального уравнения. Оптимизируемым является конечномерный вектор параметров обратной связи, являющихся коэффициентами в указанной выше зависимости. Получены условия оптимальности параметров обратной связи, содержащие формулы градиента целевого функционала. Приведены численные результаты решения тестовой задачи с применением полученных формул.

Предложенный подход может быть использован в задачах синтеза управления другими системами с распределенными параметрами.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Воспользуемся известной технологией получения формул для приращения функционала за счет приращения оптимизируемых аргументов функционала [25]. При этом линейная часть приращения функционала по каждому из аргументов и будет искомой компонентой градиента функционала по соответствующему аргументу.

Прежде чем приступить к получению формул для компонент градиента функционала, отметим следующее. Учитывая, что начальная температура теплоносителя  $\varphi \in \Phi$  и параметр  $\gamma \in \Gamma$ , определяющий величину потерь тепла, взаимно независимы и они не зависят от самого процесса нагрева теплоносителя в теплообменнике, из (2.11), (2.12) имеем:

$$\begin{aligned}
 \text{grad } J(\mathbf{P}) &= \text{grad} \int_{\Phi} \int_{\Gamma} I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) \rho_{\Phi}(\varphi) d\gamma d\varphi = \\
 \text{(П.1)} \quad &= \int_{\Phi} \int_{\Gamma} \text{grad } I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) \rho_{\Phi}(\varphi) d\gamma d\varphi,
 \end{aligned}$$

где использовано обозначение

$$I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) = \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - V]^2 dt + \varepsilon \|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}\|_{\mathbb{R}^{3N}}.$$

Поэтому получим формулу для  $\text{grad } I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma)$  при каких-либо допустимых произвольно заданных параметрах обратной связи  $\mathbf{P}$ , параметре потерь тепла  $\gamma \in \Gamma$  и начальном условии  $T(x, t) = \varphi, t \leq 0$ .

Пусть  $T(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  есть решение нагруженной начально-краевой задачи (2.12), (2.3), (2.5) при произвольно выбранных векторе оптимизируемых параметров  $\mathbf{P} = (\mu, \alpha, \beta)'$ ; начальном условии  $\varphi \in \Phi$  и значении параметра потерь тепла  $\gamma \in \Gamma$ . Для краткости, где это не вызывает неоднозначность, у решения  $T(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  параметры  $\mathbf{P}, \varphi, \gamma$  будем опускать.

Пусть параметры  $\mathbf{P} = (\mu, \alpha, \beta)'$  получили допустимое приращение  $\Delta\mathbf{P} = (\Delta\mu, \Delta\alpha, \Delta\beta)'$ , а  $\tilde{T}(x, t) = \tilde{T}(x, t; \tilde{\mathbf{P}}, \varphi, \gamma) = T(x, t) + \Delta T(x, t)$  — решение задачи (2.12), (2.3), (2.5), которое соответствует приращенному вектору аргументов  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}$ .

Подставляя функцию  $\tilde{T}(x, t)$  в условия (2.12), (2.3), (2.5), получим следующую начально-краевую задачу с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно  $\Delta T(x, t)$ -приращения фазовой переменной:

$$(II.2) \quad \Delta T_t(x, t) + \vartheta \Delta T_x(x, t) = \lambda \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \Delta T(\mu_i, t) + \alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i \right] - \lambda \Delta T(x, t), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$(II.3) \quad \Delta T(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$(II.4) \quad \Delta T(0, t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ (1 - \gamma) \Delta T(L, t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

В получении формулы (II.2) было использовано соотношение:

$$T(\mu_i + \Delta \mu_i, t) = T(\mu_i, t) + T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + o(|\Delta \mu_i|).$$

Для приращения функционала (2.12) несложно непосредственно получить представление:

$$\begin{aligned} \Delta I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) &= I(\tilde{\mathbf{P}}; \varphi, \gamma) - I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) = I(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}; \varphi, \gamma) - I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) = \\ &= 2 \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - V] \Delta T(L, t) dt + 2\sigma \sum_{i=1}^{3N} (\mathbf{P}_i - \tilde{\mathbf{P}}_i) \Delta \mathbf{P}_i. \\ \sum_{i=1}^{3N} (\mathbf{P}_i - \tilde{\mathbf{P}}_i) \Delta \mathbf{P}_i &= \sum_{i=1}^{3N} \left[ (\mu_i - \tilde{\mu}_i) \Delta \mu_i + (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \Delta \alpha_i + (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \Delta \beta_i \right]. \end{aligned}$$

Пусть функция  $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  — пока произвольная непрерывная всюду в  $\Omega$ , кроме точек  $x = \mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , дифференцируемая по  $x$  при  $x \in (\mu_i, \mu_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_{N+1} = L$ , дифференцируемая по  $t$  при  $t \in (0, T)$ . Наличие аргументов  $\mathbf{P}$ ,  $\varphi$  и  $\gamma$  у функции  $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  указывает на то, что она может меняться при изменении вектора параметров обратной связи  $\mathbf{P}$ , начальной температуры  $\varphi$  и параметра потерь тепла  $\gamma$ . Там, где это возможно,  $\mathbf{P}$ ,  $\varphi$  и  $\gamma$  у функции  $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$  указываться не будет. Умножим уравнение (II.2) на  $\psi(x, t)$  и проинтегрируем его по прямоугольнику  $\Omega$ .

С учетом принятых предположений и условий (П.3), (П.4) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \Delta T_t(x, t) dx dt + \vartheta \sum_{i=0}^N \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \Delta T_x(x, t) dt dx - \\
 (П.5) \quad & - \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N \left[ \alpha_i \Delta T(\mu_i, t) + \alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + \right. \\
 & \left. + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i \right] dx dt + \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \Delta T(x, t) dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям отдельно для первого и второго членов (П.5), учитывая (П.3)–(П.5), имеем:

$$\begin{aligned}
 (П.6) \quad & \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \Delta T_t(x, t) dx dt = \int_0^L \psi(x, t_f) \Delta T(x, t_f) dx + \\
 & + \int_0^L [\psi(x, t_b^-) - \psi(x, t_b^+)] \Delta T(x, t_b) dx - \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_t(x, t) \Delta T(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vartheta \sum_{i=0}^N \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \Delta T_x(x, t) dt dx = \vartheta \int_0^{t_f} [\psi(L, t) \Delta T(L, t) - \psi(0, t) \Delta T(0, t)] dt + \\
 & + \vartheta \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} [\psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t)] \Delta T(\mu_i, t) dt - \vartheta \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_x(x, t) \Delta T(x, t) dx dt = \\
 (П.7) \quad & = \vartheta \int_0^{t_f} \psi(L, t) \Delta T(L, t) dt - \vartheta(1 - \gamma) \int_{\tau}^{t_f} \psi(0, t) \Delta T(L, t - \tau) dt + \\
 & + a \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} [\psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t)] \Delta T(\mu_i, t) dt - \vartheta \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_x(x, t) \Delta T(x, t) dx dt = \\
 & = \vartheta \int_0^{t_f} \psi(L, t) \Delta T(L, t) dt - \vartheta(1 - \gamma) \int_0^{t_f - \tau} \psi(0, t + \tau) \Delta T(L, t) dt + \\
 & + \vartheta \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} [\psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t)] \Delta T(\mu_i, t) dt - \vartheta \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_x(x, t) \Delta T(x, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение

$$\psi(\mu_i^-, t) = \psi(\mu_i - 0, t), \quad \psi(\mu_i^+, t) = \psi(\mu_i + 0, t).$$

Учитывая (П.5)–(П.7), для приращения функционала будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \Delta I = & \int_0^L \psi(x, t_f) \Delta T(x, t_f) dx + \int_{t_f - \tau}^{t_f} [\vartheta \psi(L, t) + 2(T(L, t) - V)] \Delta T(L, t) dt + \\
 & + \int_{t_k}^{t_f - \tau} [\vartheta \psi(L, t) + \lambda(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau) + 2(T(L, t) - V)] \Delta T(L, t) dt + \\
 & + \int_0^{t_b} [\vartheta \psi(L, t) + \lambda(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau)] \Delta T(L, t) dt + \\
 \text{(П.8)} \quad & + \int_0^{t_f} \int_0^L [-\psi_t(x, t) - \vartheta \psi_x(x, t) + \lambda \psi(x, t)] \Delta T(x, t) dx dt + \\
 & + a \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} \left[ \psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t) - \frac{\lambda}{\vartheta} \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx \right] \Delta T(\mu_i, t) dt - \\
 & - \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N [\alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i] dx dt + \\
 & + 2\sigma \sum_{i=1}^N [(\mu_i - \tilde{\mu}_i) \Delta \xi_i + (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \Delta \alpha_i + (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \Delta \beta_i].
 \end{aligned}$$

В силу произвольности функции  $\psi(x, t)$  потребуем, чтобы она почти всюду являлась решением начально-краевой задачи (3.5)–(3.9).

Учитывая, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью приращения функционала при приращениях соответствующих аргументов, получим:

$$\begin{aligned}
 \text{(П.9)} \quad \text{grad}_{\mu_i} I = & -\lambda \alpha_i \int_0^{t_f} \left( \int_0^L \psi(x, t) dx \right) T_x(\mu_i, t) dt + 2\sigma(\mu_i - \tilde{\mu}_i), \\
 & i = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(П.10)} \quad \text{grad}_{\alpha_i} I = & -\lambda \int_0^{t_b} (T(\mu_i, t) - \beta_i) \left( \int_0^L \psi(x, t) dx \right) dt + 2\sigma(\alpha_i - \tilde{\alpha}_i), \\
 & i = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(П.11)} \quad \text{grad}_{\beta_i} I = & \lambda \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx + 2\sigma(\beta_i - \tilde{\beta}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Таким образом, можно считать теорему доказанной.

Для получения сопряженной начально-краевой задачи в эквивалентном (3.5)–(3.9) виде (3.10) и без условий скачка (3.9), пользуясь свойством  $\delta$ -функции, третье слагаемое из равенства (П.5) приведем к виду:

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N (\alpha_i \Delta T(\mu_i, t) + \alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + \\ & \quad + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i) dx dt = \\ & = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^L \psi(\zeta, t) \delta(\zeta - \mu_i) \Delta T(\zeta, t) d\zeta dx dt + \\ & + \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N (\alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i) dx dt. \end{aligned}$$

Сделав в первом тройном интеграле смену порядка интегрирования по  $\zeta$  и  $x$  и снова переименовав переменные интегрирования по  $\zeta$  и  $x$  между собой, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^L \psi(\zeta, t) \delta(\zeta - \mu_i) \Delta T(\zeta, t) d\zeta dx dt = \\ (П.12) \quad & = \int_0^{t_f} \int_0^L \left( \int_0^L \psi(\zeta, t) d\zeta \right) \delta(x - \mu_i) \Delta T(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая (П.12) в формуле (П.5), в которой, сделав перегруппировку слагаемых, вместо (3.5), (3.8) получим интегро-дифференциальное уравнение (3.12) для сопряженной задачи.

*Автор выражает искреннюю благодарность чл.-кор. НАН Азербайджана, профессору Айда-заде К.Р. за ценные советы и внимание к работе.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ray W.H. Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company. 1981.
2. Кулиев С.З. Синтез зональных управлений для одной задачи нагрева с запаздыванием в неразделенных условиях // Кибернетика и системный анализ. 2018. Т. 54. № 1. С. 124–136.

*Guliyev S.Z. Synthesis of Zonal Controls for a Problem of Heating with Delay Under Nonseparated Boundary Conditions // Cybern. Syst. Anal. 2018. V. 54. No. 1. P. 110–121.*

3. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // *АиТ.* 2012. № 9. С. 3–19.  
*Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 2. P. 1443–1455.
4. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // *АиТ.* 2017. № 9. С. 49–66.  
*Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* Optimizing placement of the control points at synthesis of the heating process control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
5. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи // *АиТ.* 2022. № 1. С. 130–149.  
*Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* Controlling the Heating of a Rod Using the Current and Preceding Time Feedback // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 1. P. 106–122.
6. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012, 232 с.
7. *Дженалиев М.Т.* Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // *Дифференц. уравнения.* 1989. Т. 25. № 4. С. 641–651.
8. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equation // *Comput. Math. Math. Phys.* 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.
9. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Подход к численному решению задач оптимального управления нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 5. С. 739–751.  
*Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Approach to the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Differential Equations with Nonlocal Conditions // *Comput. Math. Math. Phys.* 2019. V. 59. No. 5. P. 696–707.
10. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
11. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
12. *Shang H., Forbes J. F., Guay M.* Feedback Control of Hyperbolic PDE Systems // *IFAC Proceedings Volumes.* 2000. V. 33. No. 10. P. 533–538.
13. *Coron J.M., Wang Zh.* Output Feedback Stabilization for a Scalar Conservation Law with a Nonlocal Velocity // *SIAM J. Math. Anal.*, 2013. V. 45. No. 5. P. 2646–2665.
14. *Afifi L., Lasri K., Joundi M., Amimi N.* Feedback controls for exact remediability in disturbed dynamical systems // *IMA Journal of Mathematical Control and Information.* 2018. V. 35. No. 2. P. 411–425.
15. *Aida-zade K.R., Hashimov V.A., Bagirov A.H.* On a problem of synthesis of control of power of the moving sources on heating of a rod // *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan.* 2021. V. 47. No. 1. P. 183–196.
16. *Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.* Оптимизация размещения точек контроля в одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня // *АиТ.* 2018. № 9. С. 122–142.  
*Aida-zade K.R., Hashimov V.A.* Optimization of Measurement Points Positioning in a Border Control Synthesis Problem for the Process of Heating a Rod // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 9. P. 1643–1660.

17. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Optimization of Loading Places and Load Response Functions for Stationary Systems // *Comput. Math. Math. Phys.* 2017. V. 57. No. 4. P. 634–644.
18. *Mitkowski W., Bauer W., Zagórowska M.* Discrete-time feedback stabilization // *Archives of Control Sciences.* 2017. V. 27. No. 2. P. 309–322.
19. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
20. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
21. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
22. *Ахметзянов А.В.* Вычислительные аспекты управления процессами фильтрации жидкостей и газов в пористых средах // *АиТ.* 2008. № 1. С. 3–15.
23. *Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н.* Проблемы оптимального управления фильтрацией грунтовых вод // *АиТ.* 1999. № 8. С. 51–60.
24. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
25. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2008.
26. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Изд-во Ленанд, 2014.
27. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 11.11.2022

После доработки 17.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023