Стохастические системы

© 2023 г. **А.М. ГОРЦЕВ, д-р техн. наук (dekanat@fpmk.tsu.ru),
Л.А. НЕЖЕЛЬСКАЯ, д-р физ.-мат. наук (ludne@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)**

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ MAP-ПОТОКОМ СОБЫТИЙ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с входящим MAP-потоком запросов (MAP-поток — Markovian Arrival Process) с двумя состояниями. Выводятся явные выражения для стационарного распределения вероятностей состояний и явные выражения для числовых характеристик системы: вероятности простоя обслуживающего прибора, математического ожидания числа запросов в системе, математического ожидания длины очереди. Численные результаты представлены в таблицах и в построенных на их основе графических зависимостях указанных характеристик, показанных на рисунках. Изучается рекуррентный MAP-поток с двумя состояниями как частный случай коррелированного MAP-потока запросов.

Ключевые слова: MAP-поток запросов, однолинейная система массового обслуживания (СМО), стационарное распределение вероятностей состояний системы, числовые характеристики.

DOI: 10.31857/S0005231023070012, **EDN:** FCERPV

1. Введение

Математические модели систем и сетей массового обслуживания (СМО, СеМО) достаточно адекватно описывают поведение реальных физических, технических, экономических и других объектов и систем и в связи с этим получили широкое распространение в научной среде. Одними из основных элементов СМО и СеМО являются случайные входящие потоки запросов. Практически на протяжении всего прошлого века исследования в области СМО и СеМО основывались на предположении о некоррелированном характере входящих потоков запросов, т.е. в качестве последних рассматривались простейшие потоки (стационарные пуассоновские потоки запросов). Однако начиная с конца 20-го века модель стационарного пуассоновского потока в связи с интенсивным развитием телекоммуникационных сетей и систем, беспроводных и мобильных сетей связи перестала быть адекватной реальным информационным потокам запросов в таких системах и сетях.

Быстрая смена цифровых технологий обеспечила проникновение цифровых сетей во все сферы человеческой деятельности. Все это было бы невозможным без использования и развития методов и алгоритмов математического моделирования сетевых технологий. Начиная с конца 20-го века в современной теории очередей начались интенсивные исследования нового направления — системы массового обслуживания с коррелированными потоками (системы с дважды стохастическими потоками). Стимулом к появлению дважды стохастических потоков событий — новой математической модели, наиболее адекватно учитывающей коррелированный характер реальных информационных потоков — послужили практические потребности исследований современных телекоммуникационных сетей, в которых разнородные информационные потоки являются существенно нестационарными и коррелированными.

Дважды стохастические потоки характеризуются двумя стохастиками: запросы в потоке наступают в случайные моменты времени (первая стохастика), интенсивность (сопровождающий процесс) потока является случайным процессом (вторая стохастика). Дважды стохастические потоки делятся на два типа: первый тип — потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть непрерывный случайных процесс [1, 2]; второй тип — потоки, сопровождающий процесс (интенсивность) которых есть кусочно-постоянный случайный процесс с конечным (произвольным) числом состояний. Впервые результаты исследований потоков второго типа были опубликованы практически одновременно в 1979 г. в работах [3–5]. В [3, 4] указанные потоки получили название MC (Markov Chain)-потоки, в [5] — MVP (Markov Versatile Processes)-потоки. В [6, 7] описанные выше потоки названы MAP (Markovian Arrival Process)-потоками. Основным свойством введенных потоков является их коррелированность. Подчеркнем, что MAP (MC)-потоки являются наиболее подходящей математической моделью коррелированных потоков запросов в реальных телекоммуникационных системах и сетях [8].

В монографии [8], в своем роде единственной в мировой литературе, приведено систематизированное изложение СМО и СеМО с коррелированными потоками. В [8] подчеркивается, что аналитическое исследование СМО и СеМО с коррелированными потоками — достаточно затруднительный процесс, тем более нахождение характеристик СМО и СеМО в явном виде представляет собой сложную задачу, порой неразрешимую.

В настоящей статье проводится аналитическое исследование однолинейной СМО с ожиданием, входящим классическим MAP-потоком запросов с двумя состояниями [6, 7] и экспоненциальным обслуживанием.

Для стационарного режима функционирования СМО выводятся явные аналитические формулы для вероятности простоя обслуживающего прибора, средней длины очереди и среднего числа запросов в системе.

Отметим, что исследования, связанные с анализом СМО и СеМО с входящими MAP-потоками запросов, проводятся с 90-х гг. прошлого века до настоящего времени. В частности, авторами настоящей статьи решены задачи по оценке состояний и параметров MAP-потока запросов в условиях его полной наблюдаемости, а также в условиях его неполной наблюдаемости (при наличии мертвого времени). По этому поводу здесь приводятся некоторые ссылки на публикации авторов [9–14].

Кроме того, отличие рассматриваемой системы от систем, функционирующих в синхронной случайной среде, состоит в том, что в синхронной среде рассматриваются синхронные потоки, у которых состояние управляющего процесса (сопровождающего процесса) изменяется в случайные моменты времени, являющиеся моментами наступления событий. Таким образом, синхронная случайная среда всегда предполагает отличную от нуля вероятность смены состояний управляющего процесса в момент наступления событий синхронного потока, в противоположность MAP-потоку: вероятность появления события потока в момент изменения состояния управляющего процесса может равняться нулю (если вероятность всегда равна единице, то имеет место синхронный поток). Таким образом, рассматриваемая в настоящей статье математическая модель случайной среды представляет собой обобщение математической модели синхронной случайной среды, в чем и состоит новизна проведенного исследования.

Эволюцию от простейшего потока к современным математическим моделям информационных потоков в телекоммуникационных системах и сетях — к моделям коррелированных потоков, в частности к MAP-потоку — можно проследить в упомянутой монографии [8], где, кроме того, приводится обширная библиография по исследуемой области моделей СМО и СеМО. Из последних работ по данной тематике отметим статью [15]. Подчеркнем, что общим для работ, в которых исследуются СМО и СеМО с входящим MAP-потоком запросов, является проводимый в них численный анализ систем и сетей обслуживания. В настоящей статье продолжаются исследования, начатые в [16].

2. Математическая модель системы. Постановка задачи

Изучается однолинейная СМО с ожиданием. На вход обслуживающего прибора поступает MAP-поток событий (запросов, сообщений и т.д.), сопровождающий процесс $\lambda(t)$ которого есть кусочно-постоянный случайный процесс с двумя состояниями — S_1 и S_2. Будем говорить, что если $\lambda(t) = \lambda_i$, то имеет место i-е состояние (S_i) процесса $\lambda(t)$ (потока), $i = 1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_i(t) = 1 - \exp\{-\lambda_i t\}$, $t \geqslant 0$, $i = 1, 2$.

В момент окончания i-го состояния потока (процесса $\lambda(t)$) возможны следующие мгновенные изменения состояния системы: 1) наступает событие потока, и процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j; совместная вероятность описанной ситуации есть $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = 1, 2$; 2) не наступает событие потока, и процесс $\lambda(t)$ переходит из состояния S_i в состояние S_j; совместная вероятность этой ситуации есть $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$, $i, j = 1, 2$; $i \neq j$. При этом $P_0(\lambda_j|\lambda_i) + P_1(\lambda_j|\lambda_i) + P_1(\lambda_i|\lambda_i) = 1$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Здесь первично наступление события в состоянии S_i, а затем переход из состояния потока S_i в состояние S_j с вероятностью $P_1(\lambda_j|\lambda_i)$, либо первично ненаступление события в состоянии S_i, а затем переход из состояния потока S_i в состояние S_j с вероятностью $P_0(\lambda_j|\lambda_i)$.

Рассматривается стационарный режим функционирования СМО. В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ — сопровождающий стационарный кусочно-постоянный транзитивный марковский процесс с двумя состояниями S_1 и S_2. Если процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии S_i, то длительность обслуживания сообщения на обслуживающем приборе распределена по экспоненциальному закону $F^{(i)}(\tau) = 1 - \exp\{-\mu_i\tau\}$, $\tau \geqslant 0$, с интенсивностью μ_i $(\mu_i > 0)$, $i = 1, 2$.

Замечание 1. Сопровождающий случайный процесс $\lambda(t)$ для MAP-потока не совпадает с интенсивностью потока, так как в состоянии S_1 значение интенсивности потока есть $\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, в состоянии S_2 соответственно $\lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]$. Тогда средняя интенсивность MAP-потока равна [17]

$$\lambda = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\pi_1 + \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]\pi_2,$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda_2[1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)]}{\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)] + \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)]}, \tag{1}$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)]}{\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)] + \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)]},$$

где π_1, π_2 — априорные вероятности состояний S_1, S_2 процесса $\lambda(t)$ (потока) в стационарном режиме.

Пусть: $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ — значение длительности k-го интервала между моментами наступления запросов потока t_k и t_{k+1} $(\tau_k \geqslant 0)$. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятности значений длительности k-го интервала равна $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, для любого $k \geqslant 1$. Тогда момент времени t_k без потери общности полагается равным нулю, т.е. момент наступления запроса есть $\tau = 0$. В [11] получено явное выражение для плотности вероятности $p(\tau)$:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2\tau}, \quad \tau \geqslant 0,$$

$$\gamma = \{z_2 - \lambda_1\pi_1(0)[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2\pi_2(0)[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]\}(z_2 - z_1)^{-1},$$

$$z_{1,2} = \left[(\lambda_1 + \lambda_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2) P_0(\lambda_2|\lambda_1)}\right]/2, \tag{2}$$

$$\pi_1(0) = \frac{P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2)}{P_1(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_0(\lambda_1|\lambda_2) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)},$$

$$\pi_2(0) = 1 - \pi_1(0).$$

В (2) $\pi_i(0)$ — стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ (в момент наступления запроса MAP-потока) находится в состоянии S_i, $i = 1, 2$; z_1, z_2 — корни характеристического уравнения $z^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)z + \lambda_1\lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)] = 0$, при этом из (2) следует, что $0 < z_1 < z_2$, γ — величина, зависящая от параметров потока.

Рассмотрим два смежных интервала (t_k, t_{k+1}), (t_{k+1}, t_{k+2}), значения длительностей которых есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_{k+1} = t_{k+2} - t_{k+1}$ соответственно; их местоположение на временной оси в силу стационарности потока произвольно. Тогда, полагая $k = 1$, будем рассматривать два интервала (t_1, t_2), (t_2, t_3) со значениями длительностей $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$; $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau_2 \geqslant 0$. При этом $\tau_1 = 0$ соответствует моменту t_1 наступления запроса потока; $\tau_2 = 0$ соответствует моменту t_2 наступления следующего запроса потока. Совместная плотность вероятности при этом есть [11, 13]

$$
\begin{gathered}
p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2) + \gamma(1-\gamma) \times \\
\times \frac{P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)}{1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)} \times \\
\times \left(z_1 e^{-z_1\tau_1} - z_2 e^{-z_2\tau_1}\right)\left(z_1 e^{-z_1\tau_2} - z_2 e^{-z_2\tau_2}\right), \quad \tau_1 \geqslant 0, \quad \tau_2 \geqslant 0,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где z_1, z_2, $p(\tau_k)$ определены в (2) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Из (3) следует, что в общем случае MAP-поток является коррелированным потоком; только в частных случаях он переходит в рекуррентный либо вырождается в простейший.

Частный случай 1: $P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1) = 0$ — рекуррентный MAP-поток запросов с двумя состояниями. При этом $p(\tau)$ выражается формулой (2), где $\gamma = [z_2 - \lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1) - \lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)](z_2 - z_1)^{-1}$.

Из (3) получаем $p(\tau_1, \tau_2) = p(\tau_1)p(\tau_2)$. Так как моменты наступления запросов в потоке $t_1, \ldots, t_k$ порождают вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, то можно показать, что для произвольного k, $k \geqslant 2$, $p(\tau_1, \ldots, \tau_k) = p(\tau_1) \ldots p(\tau_k)$.

Произведение $\gamma(1-\gamma)$ из (3) представимо в виде

$$
\begin{gathered}
\gamma(1-\gamma) = \frac{z_1 z_2}{(z_2 - z_1)^2}\{\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]\} \times \\
\times \{\pi_1(0)\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)] - \pi_2(0)\lambda_2[1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)]\} \times \\
\times \{\lambda_1\lambda_2[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)][1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)] + \lambda_1\lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)][1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)]\}^{-1}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Из (4) вытекают частные случаи 2 и 3.

Частный случай 2: $\lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] - \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)] = 0$ — простейший поток с параметром z_1. Из (2) находим $z_1 = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, $\gamma = 1$; $p(\tau) = z_1 e^{-z_1\tau}$, $\tau \geqslant 0$.

Частный случай 3: $\pi_1(0)\lambda_1[1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)] - \pi_2(0)\lambda_2[1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)] = 0$ — простейший поток с параметром z_1. Из (2) находим $z_1 = \lambda_2[P_1(\lambda_2|\lambda_1) + P_1(\lambda_2|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, $\gamma = 1$; $p(\tau) = z_1 e^{-z_1\tau}$, $\tau \geqslant 0$.

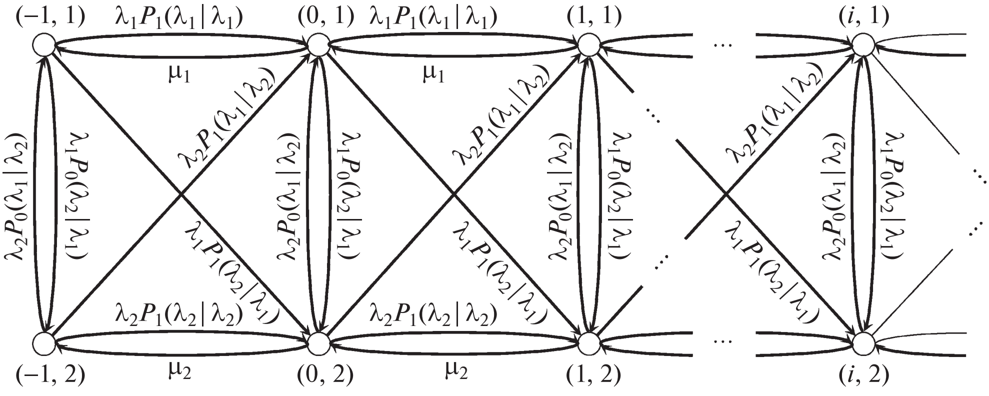

Рис. 1. Стохастический граф переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние.

Задача анализа изучаемой СМО заключается в нахождении явного аналитического вида числовых характеристик системы: а) вероятности простоя обслуживающего прибора, б) среднего числа запросов в очереди, в) среднего числа запросов в системе.

Пусть $i(t)$ число запросов в очереди в произвольный момент времени t $(i(t) = 0, 1, \ldots)$. Так как входящий MAP-поток является коррелированным, то случайный процесс $i(t)$ не является марковским. Для того чтобы построить марковский процесс, необходимо учесть состояние входящего MAP-потока. Последнее обеспечивается введением дополнительной переменной $j(t)$ — состояния входящего MAP-потока (состояния сопровождающего процесса $\lambda(t)$ в произвольный момент времени t), $j(t) = 1, 2$. Если $j(t) = 1$, то $\lambda(t) = \lambda_1$; если $j(t) = 2$, то $\lambda(t) = \lambda_2$, что обеспечивает марковость двумерного процесса $(i(t), j(t))$.

Замечание 2. В силу того, что интенсивность обслуживания обслуживающим прибором в состоянии S_j есть μ_j $(\mu_j > 0)$, $j = 1, 2$, то компонента $j(t)$ двумерного марковского процесса $(i(t), j(t))$ должна быть наблюдаемой так же, как наблюдаема компонента $i(t)$. Тогда сопровождающий процесс $\lambda(t)$, который в общем случае является ненаблюдаемым, нужно рассматривать в виде наблюдаемого процесса, управляющего сменой состояний MAP-потока запросов.

Обозначим состояние системы (в силу того, что рассматривается стационарный режим ее функционирования) как (i, j), $i = 0, 1, \ldots,$ $j = 1, 2$. Здесь возможны еще два состояния $(-1, 1)$ и $(-1, 2)$, при которых запросы в системе отсутствуют (длина очереди равна нулю и обслуживающий прибор простаивает).

Сделанные выше предпосылки дают возможность представления математической модели изучаемой СМО в виде связного стохастического графа [18], представленного на рис. 1. Здесь вершинам графа соответствуют состояния СМО; каждой дуге графа поставлены в соответствие инфинитезимальные характеристики (интенсивности переходов из состояния в состояние), причем петли в каждом состоянии опущены; каждая вершина графа (каждое состояние) достижима и возвратна.

3. Вывод числовых характеристик системы

Обозначим через $P(i,1)$, $P(i,2)$ стационарные (финальные) вероятности состояний системы ($i=-1,0,\ldots$). Для сечений стохастического графа $G_{i1} = \{(i-1,1;i,1),(i,1;i-1,1),(i,1;i+1,1),(i+1,1;i,1),(i,1;i,2),(i,2;i,1),(i-1,2;i,1),(i,1;i+1,2)\}$, $G_{i2}=\{(i-1,2;i,2),(i,2;i-1,2),(i,2;i+1,2),(i+1,2;i,2),(i,2;i,1),(i,1;i,2),(i-1,1;i,2),(i,2;i+1,1)\}$, $i=0,1,\ldots$, справедлива бесконечная система разностных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$
\begin{gathered}
\mu_1 P(i+1,1)-(\lambda_1+\mu_1)P(i,1)+\lambda_1 P_1(\lambda_1|\lambda_1)P(i-1,1)+\\
+\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)P(i,2)+\lambda_2 P_1(\lambda_1|\lambda_2)P(i-1,2)=0,\\
\mu_2 P(i+1,2)-(\lambda_2+\mu_2)P(i,2)+\lambda_2 P_1(\lambda_2|\lambda_2)P(i-1,2)+\\
+\lambda_1 P_0(\lambda_2|\lambda_1)P(i,1)+\lambda_1 P_1(\lambda_2|\lambda_1)P(i-1,1)=0,\quad i=0,1,\ldots.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Решение системы (5) ищется в виде $P(i,1)=\xi^i$, $P(i,2)=C\xi^i$ ($i=0,1,\ldots$). При этом характеристическое уравнение для (5) выпишется в виде

$$
\begin{gathered}
(\xi-1)\Big\{\mu_1\mu_2\xi^3-[\lambda_1\mu_2+\mu_1(\lambda_2+\mu_2)]\xi^2+\\
+[\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu_2P_1(\lambda_1|\lambda_1)+\lambda_2\mu_1P_1(\lambda_2|\lambda_2)-\lambda_1\lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\xi-\\
-\lambda_1\lambda_2[P(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2)-P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)]\Big\}=0.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Рассмотрим условия существования стационарного режима функционирования СМО (условия существования вероятностей $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i=-1,0,\ldots$). Математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{\tau}$ — длительности интервала между соседними событиями в MAP-потоке запросов — определится в виде

$$
E(\boldsymbol{\tau})=\int_0^\infty \tau p(\tau)d\tau,
\tag{7}
$$

где плотность $p(\tau)$ задана в (2). Подставляя ее в (7), находим $E(\boldsymbol{\tau})=[\gamma z_2+(1-\gamma)z_1]/z_1z_2$. Тогда среднее число запросов во входящем коррелированном MAP-потоке в единицу времени запишется в виде $\lambda=1/E(\boldsymbol{\tau})=\lambda_1[1-P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\pi_1+\lambda_2[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)]\pi_2$, что совпадает с (1). С другой стороны, математическое ожидание числа обслуженных в единицу времени запросов есть $\mu=\mu_1\pi_1+\mu_2\pi_2$.

Рассмотрим ситуацию, когда $\lambda = \mu$, или $(\mu_1 - \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)])\pi_1 + (\mu_2 - \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)])\pi_2 = 0$. Из последнего соотношения следует, что равенство нулю возможно только в случае, когда $\mu_1 = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, $\mu_2 = \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]$. Подставляя эти выражения для μ_1 и μ_2 в (6), находим характеристическое уравнение для рассматриваемой ситуации:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1\lambda_2(\xi - 1)^2\Big\{[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)][1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\xi^2 - \\
&- [2 - P_0(\lambda_1|\lambda_2) - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\xi + \\
&+ [P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1)]\Big\} = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Так как характеристическое уравнение (8) имеет кратные корни, то общее решение системы (5), в которой $\mu_1 = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, $\mu_2 = \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]$, выразится в виде

$$
\begin{aligned}
&P(i,1) = D_1\xi_1^i + D_2 i\xi_2^i + D_3\xi_3^i + D_4\xi_4^i, \\
&P(i,2) = B_1D_1\xi_1^i + B_2D_2 i\xi_2^i + B_3D_3\xi_3^i + B_4D_4\xi_4^i, \quad i = 0, 1, \ldots .
\end{aligned} \tag{9}
$$

В (9) $P_s(i,1) = D_s\xi_s^i$; $P_s(i,2) = B_sD_s\xi_s^i$ — частные решения системы (5); B_s, D_s — константы, определяемые из граничных условий, $s = \overline{1,4}$, $\xi_1 = \xi_2 = 1$,

$$
\begin{aligned}
&\xi_{3,4} = \Big\{[2 - P_0(\lambda_1|\lambda_2) - P_0(\lambda_2|\lambda_1)] \mp \\
&\mp \Big([2 - P_0(\lambda_1|\lambda_2) - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]^2 - 4[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)][1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]b\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}\times \\
&\times\Big\{2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)][1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\Big\}^{-1}, \\
&b = P_1(\lambda_1|\lambda_1)P_1(\lambda_2|\lambda_2) - P_1(\lambda_1|\lambda_2)P_1(\lambda_2|\lambda_1).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Здесь возможны три случая: $b > 0$, $b < 0$, $b = 0$.

Рассмотрим случай $b > 0$. Тогда из (10) следует $0 < \xi_3 < 1 < \xi_4$. Поскольку $P(i,1)$, $P(i,2)$ — вероятности, то для них должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i=-1}^{\infty} P(i,1) + \sum_{i=-1}^{\infty} P(i,2) = 1.$$

Необходимым условием выполнения последнего равенства является выполнение предельных соотношений: $\lim P(i,1) = 0$, $\lim P(i,2) = 0$ при $i \to \infty$. В противном случае ряды $\sum\limits_{i=-1}^{\infty} P(i,1)$, $\sum\limits_{i=-1}^{\infty} P(i,2)$ будут расходящимися. С учетом сказанного общее решение (9), в котором $D_1 = D_2 = D_4 = 0$, принимает вид

$$P(i,1) = D_3\xi_3^i, \quad P(i,2) = B_3D_3\xi_3^i, \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{11}$$

Найдем константу B_3. Подставим (11) в первое уравнение системы (5), в котором $\mu_1 = \lambda_1[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]$, $\mu_2 = \lambda_2[1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]$. После достаточно трудоемких преобразований находим $B_3 < 0$. Тогда из (11) следует, что $D_3 < 0$. Неравенство $D_3 < 0$ приводит к противоречию: $P(i,1) < 0$, $i \geqslant 0$; $P(i,2) > 0$, $i \geqslant 0$. Если положить $D_3 = 0$, то $P(i,1) = P(i,2) = 0$, $i \geqslant 0$, т.е. противоречие устраняется. Отсюда следует, что при $\lambda = \mu$ финальное распределение $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i \geqslant 0$, не существует и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Изучим ситуацию $\lambda < \mu$. С учетом (6) общее решение системы (5) принимает вид

$$\begin{gathered} P(i,1) = A_1\xi_1^i + A_2\xi_2^i + A_3\xi_3^i + A_4\xi_4^i, \\ P(i,2) = C_1A_1\xi_1^i + C_2A_2\xi_2^i + C_3A_3\xi_3^i + C_4A_4\xi_4^i, \quad i = 0,1,\dots, \end{gathered} \tag{12}$$

где $P_s(i,1) = A_s\xi_s^i$; $P_s(i,2) = C_sA_s\xi_s^i$ — частные решения системы (5); C_s, A_s — константы, находящиеся из граничных условий, $s = \overline{1,4}$; $\xi_4 = 1$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 — корни кубического уравнения из (6), являющиеся вещественными и положительными: $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1 < \xi_3$. При этом необходимо выполнение предельных соотношений $\lim P(i,1) = \lim P(i,2) = 0$ при $i \to \infty$. Откуда следует, что $A_3 = A_4 = 0$. Тогда общее решение (12) выразится в виде

$$\begin{gathered} P(i,1) = A_1\xi_1^i + A_2\xi_2^i, \\ P(i,2) = C_1A_1\xi_1^i + C_2A_2\xi_2^i, \quad i = 0,1,\dots. \end{gathered} \tag{13}$$

Подставив частное решение $P_s(i,1) = A_s\xi_s^i$, $P_s(i,2) = C_sA_s\xi_s^i$, $i = 0,1,\dots$, в первое уравнение системы (5) сначала для $s = 1$, затем для $s = 2$, получаем константу C_s в виде

$$C_s = -\frac{\mu_1\xi_s^2 - (\lambda_1 + \mu_1)\xi_s + \lambda_1P_1(\lambda_1|\lambda_1)}{\lambda_2[P_0(\lambda_1|\lambda_2)\xi_s + P_1(\lambda_1|\lambda_2)]}, \quad s = 1,2. \tag{14}$$

Для нахождения величин A_i, $i = 1,2$, и вероятностей $P(-1,1)$, $P(-1,2)$ привлекаются граничные уравнения и условие нормировки. Сечения стохастического графа

$$\begin{gathered} G_{-1,1} = \{(-1,1;0,1), (0,1;-1,1), (-1,1;0,2), (-1,1;-1,2), (-1,2;-1,1)\}, \\ G_{-1,2} = \{(-1,2;0,2),\ (0,2;-1,2),\ (-1,2;0,1),\ (-1,2;-1,1), (-1,1;-1,2)\}, \\ G = \{(i,1;i+1,2),\ (i,1;i,2),\ (i,2;i+1,1),\ (i,2;i,1), \quad i = -1,0,1,\dots\} \end{gathered}$$

соответственно определяют граничные уравнения:

$$\begin{gathered} \mu_1P(0,1) - \lambda_1P(-1,1) + \lambda_2P_0(\lambda_1|\lambda_2)P(-1,2) = 0, \\ \mu_2P(0,2) - \lambda_2P(-1,2) + \lambda_1P_0(\lambda_2|\lambda_1)P(-1,1) = 0, \\ \lambda_1[1 - P_1(\lambda_1|\lambda_1)]\sum_{i=-1}^{\infty} P(i,1) - \lambda_2[1 - P_1(\lambda_2|\lambda_2)]\sum_{i=-1}^{\infty} P(i,2) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Присоединяя к (15) условие нормировки

$$P(-1,1)+P(-1,2)+\sum_{i=0}^{\infty}[P(i,1)+P(i,2)]=1,$$

с учетом (13) получаем систему уравнений для нахождения неизвестных A_i, $i=1,2$, $P(-1,1)$, $P(-1,2)$. Решая (15), находим

$$P(-1,1)=a_{11}A_1+a_{12}A_2,\quad P(-1,2)=a_{21}A_1+a_{22}A_2, \tag{16}$$

$$A_1 = \\ =(1-\xi_1)\frac{\pi_1[C_2+a_{22}(1-\xi_2)]-\pi_2[1+a_{12}(1-\xi_2)]}{[1+a_{11}(1-\xi_1)][C_2+a_{22}(1-\xi_2)]-[1+a_{12}(1-\xi_2)][C_1+a_{21}(1-\xi_1)]},$$

$$A_2 = \\ =-(1-\xi_2)\frac{\pi_1[C_1+a_{21}(1-\xi_1)]-\pi_2[1+a_{11}(1-\xi_1)]}{[1+a_{11}(1-\xi_1)][C_2+a_{22}(1-\xi_2)]-[1+a_{12}(1-\xi_2)][C_1+a_{21}(1-\xi_1)]},$$

$$a_{11}=\frac{\mu_1+\mu_2P_0(\lambda_1|\lambda_2)C_1}{\lambda_1[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]},\quad a_{12}=\frac{\mu_1+\mu_2P_0(\lambda_1|\lambda_2)C_2}{\lambda_1[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]},$$
$$a_{21}=\frac{\mu_2C_1+\mu_1P_0(\lambda_2|\lambda_1)}{\lambda_2[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]},\quad a_{22}=\frac{\mu_2C_2+\mu_1P_0(\lambda_2|\lambda_1)}{\lambda_2[1-P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]}.$$

Величины C_1, C_2 определены в (14); вероятности π_1, π_2 — в (1); ξ_1, ξ_2 — корни кубического уравнения в (6) $(0<\xi_1<\xi_2<1)$.

Формулы (13), (16) позволяют найти явные выражения для числовых характеристик системы: $P(-1)$ — вероятность простоя обслуживающего прибора; $E(I)$ — средняя длина очереди; $E(I+1)$ — среднее число запросов в системе, где I – случайная величина длины очереди в СМО.

$$\begin{gathered}P(-1)=(a_{11}+a_{21})A_1+(a_{12}+a_{22})A_2,\\ E(I)=A_1(1+C_1)\frac{\xi_1}{(1-\xi_1)^2}+A_2(1+C_2)\frac{\xi_2}{(1-\xi_2)^2},\\ E(I+1)=\frac{A_1(1+C_1)}{(1-\xi_1)^2}+\frac{A_2(1+C_2)}{(1-\xi_2)^2},\end{gathered} \tag{17}$$

где C_1, C_2 определены в (14); A_1, A_2, a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22} — в (16); ξ_1, ξ_2 — корни кубического уравнения в (6) $(0<\xi_1<\xi_2<1)$.

Приведенные здесь и ниже исходные данные для расчета числовых характеристик (17) выбраны таким образом, чтобы показать, насколько поведение последних соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в изучаемой СМО.

Таблица 1. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от λ_1 для $b > 0$

$P_1(\lambda_1\|\lambda_2)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,780	0,718	0,680	0,651	0,627	0,616
1/6	0,787	0,728	0,693	0,667	0,645	0,636
1/8	0,790	0,734	0,700	0,675	0,654	0,645
1/10	0,792	0,737	0,704	0,679	0,659	0,651
1/12	0,794	0,739	0,706	0,682	0,663	0,655
1/13	0,794	0,739	0,707	0,684	0,664	0,656

Таблица 2. Зависимость средней длины очереди $E(I)$ от λ_1 для $b > 0$

$P_1(\lambda_1\|\lambda_2)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,052	0,097	0,145	0,196	0,249	0,276
1/6	0,047	0,085	0,125	0,167	0,209	0,231
1/8	0,045	0,080	0,116	0,153	0,191	0,210
1/10	0,043	0,076	0,110	0,145	0,180	0,198
1/12	0,042	0,074	0,106	0,140	0,173	0,190
1/13	0,042	0,073	0,105	0,138	0,171	0,187

Таблица 3. Зависимость среднего числа запросов в системе $E(I+1)$ от λ_1 для $b > 0$

$P_1(\lambda_1\|\lambda_2)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,272	0,379	0,465	0,545	0,622	0,659
1/6	0,260	0,357	0,432	0,500	0,564	0,595
1/8	0,254	0,346	0,416	0,478	0,537	0,565
1/10	0,251	0,340	0,406	0,466	0,521	0,547
1/12	0,249	0,335	0,400	0,457	0,510	0,536
1/13	0,248	0,334	0,398	0,454	0,506	0,531

В табл. 1–3 приведены зависимости характеристик $P(-1)$, $E(I)$, $E(I+1)$ от параметра λ_1 $(\lambda_1 = 2, 4, \ldots, 10, 11)$ при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 12$, $\mu_2 = 2$; $P_1(\lambda_1|\lambda_1) = P_1(\lambda_2|\lambda_1) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = P_1(\lambda_2|\lambda_2) = \frac{1}{3}$ для $b > 0$ и $P_1(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{4}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{5}{12})$; $P_1(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{6}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{2})$; $P_1(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{8}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{13}{24})$; $P_1(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{10}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{17}{30})$; $P_1(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{12}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{7}{12})$; $P_1(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{13}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{23}{39})$, вычисленные по формулам (17).

Поведение отмеченных числовых характеристик (17) в зависимости от параметра λ_1 при $b > 0$ соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в изучаемой однолинейной СМО с входящим коррелированным MAP-потоком запросов.

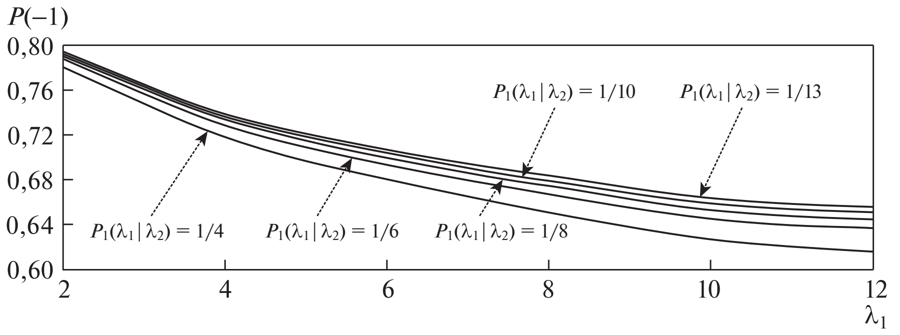

Рис. 2. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от λ_1 для $b > 0$.

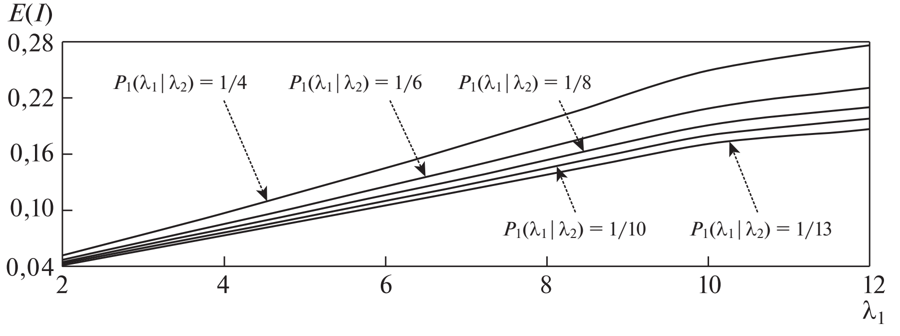

Рис. 3. Зависимость средней длины очереди $E(I)$ от λ_1 для $b > 0$.

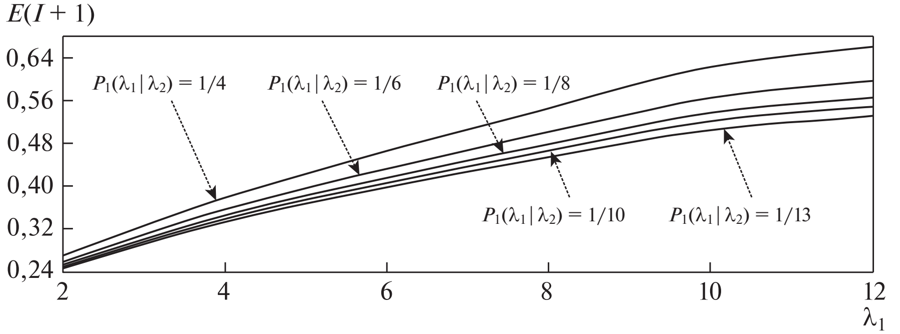

Рис. 4. Зависимость среднего числа запросов в системе $E(I+1)$ от λ_1 для $b > 0$.

На рис. 2–4 приведены графики числовых характеристик (17), построенные для численных значений табл. 1–3 соответственно.

Рассмотрим случай $b < 0$. В первую очередь изучим вопрос о существовании стационарного режима, т.е. ситуацию, когда $\lambda = \mu$. Тогда из (10) следует, что $\xi_3 < 0$, $\xi_4 > 1$ и, аналогично случаю $b > 0$, общее решение системы выпишется в виде (11). Так как $\xi_3 < 0$, то этот факт влечет за собой отрицательность вероятности $P(i, 1)$ для $i = 1, 3, \ldots$, что противоречит ее определению; чтобы снять это противоречие, нужно положить $D_3 = 0$: $P(i, 1) = P(i, 2) = 0$,

Таблица 4. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от λ_1 для $b < 0$

$P_1(\lambda_2\|\lambda_2)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,796	0,729	0,687	0,654	0,627	0,615
1/6	0,815	0,748	0,705	0,672	0,645	0,633
1/8	0,824	0,757	0,714	0,681	0,654	0,642
1/10	0,830	0,762	0,719	0,686	0,659	0,647
1/12	0,833	0,765	0,722	0,690	0,662	0,650
1/13	0,834	0,767	0,724	0,691	0,664	0,652

Таблица 5. Зависимость средней длины очереди $E(I)$ от λ_1 для $b < 0$

$P_1(\lambda_2\|\lambda_2)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,044	0,091	0,143	0,200	0,260	0,291
1/6	0,035	0,077	0,124	0,177	0,232	0,261
1/8	0,031	0,071	0,116	0,166	0,220	0,248
1/10	0,029	0,067	0,112	0,161	0,213	0,241
1/12	0,027	0,065	0,109	0,157	0,209	0,236
1/13	0,027	0,064	0,108	0,156	0,207	0,234

Таблица 6. Зависимость среднего числа запросов в системе $E(I+1)$ от λ_1 для $b < 0$

$P_1(\lambda_2\|\lambda_2)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,249	0,362	0,457	0,546	0,633	0,675
1/6	0,219	0,329	0,419	0,504	0,587	0,528
1/8	0,206	0,314	0,402	0,485	0,566	0,606
1/10	0,199	0,305	0,392	0,474	0,554	0,594
1/12	0,194	0,300	0,386	0,467	0,547	0,586
1/13	0,193	0,298	0,384	0,465	0,544	0,583

$i \geqslant 0$. Последнее означает, что для случая $b < 0$ финальное распределение $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i \geqslant 0$, не существует при $\lambda = \mu$ и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Изучим ситуацию $\lambda < \mu$. С учетом (6) общее решение системы (5) выразится в виде (12). Для рассматриваемого случая $b < 0$ имеет место $\xi_4 = 1$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 — корни кубического уравнения из (6), являющиеся вещественными: $\xi_1 < 0$, $0 < \xi_2 < 1 < \xi_3$. Отсюда следует, что константы A_1, A_3, A_4 в (12) полагаются равными нулю, при этом общее решение (12) выпишется в виде

$$P(i,1) = A_2\xi_2^i, \quad P(i,2) = C_2A_2\xi_2^i, \quad i = 0,1,\ldots. \tag{18}$$

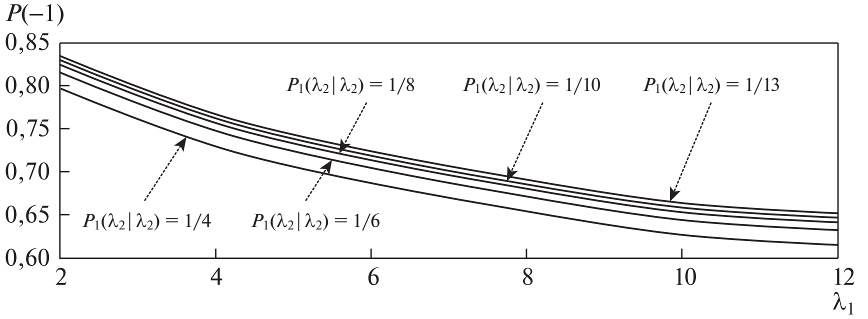

Рис. 5. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от λ_1 для $b < 0$.

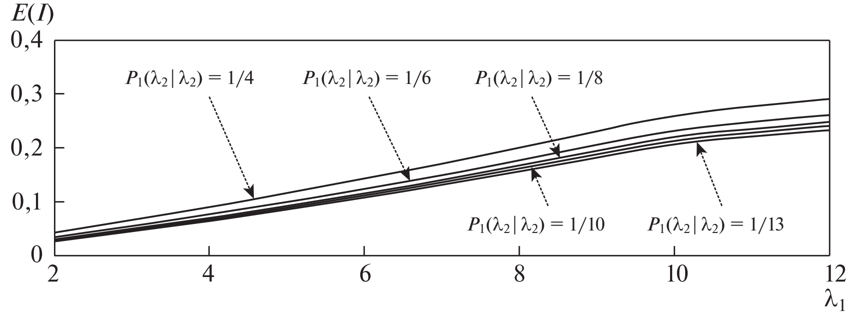

Рис. 6. Зависимость средней длины очереди $E(I)$ от λ_1 для $b < 0$.

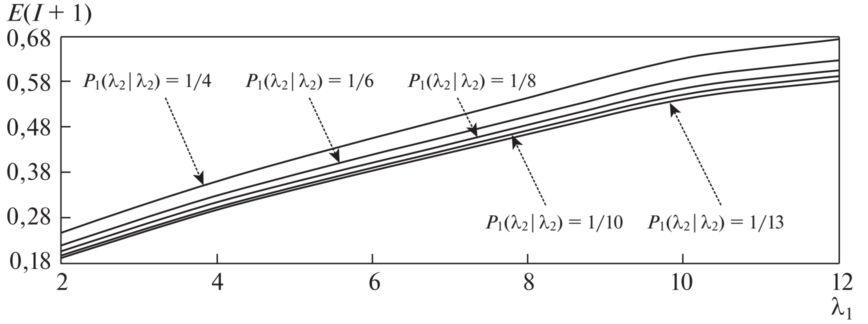

Рис. 7. Зависимость среднего числа запросов в системе $E(I+1)$ от λ_1 для $b < 0$.

В (18) константа C_2 определена формулой (14) для $s = 2$. Для определения константы A_2 и вероятностей $P(-1,1)$, $P(-1,2)$ нужно привлечь уравнения (15) и условие нормировки. Откуда находим

$$\begin{gathered} P(-1,1) = a_{12}A_2; \quad P(-1,2) = a_{22}A_2; \\ A_2 = \frac{1-\xi_2}{1+C_2+(a_{12}+a_{22})(1-\xi_2)}, \end{gathered} \tag{19}$$

C_2 определена в (14) для $s = 2$; a_{12}, a_{22} определены в (16); ξ_2 — корень кубического уравнения в (6) $(0 < \xi_2 < 1)$.

Формулы (18), (19) позволяют определить характеристики системы:

$$
(20)\qquad \begin{gathered} P(-1) = (a_{12} + a_{22})A_2; \\ E(I) = A_2\xi_2 \frac{1 + C_2}{(1 - \xi_2)^2}, \quad E(I+1) = \frac{(1 + C_2)A_2}{(1 - \xi_2)^2}, \end{gathered}
$$

где C_2 определена в (14) для $s = 2$; a_{12}, a_{22} — в (16); A_2 — в (19); ξ_2 — корень кубического уравнения в (6) $(0 < \xi_2 < 1)$.

В табл. 4–6 приведены зависимости характеристик $P(-1)$, $E(I)$, $E(I+1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 4, \ldots, 10, 11$) при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 12$, $\mu_2 = 2$; $P_1(\lambda_1|\lambda_1) = P_1(\lambda_2|\lambda_1) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = P_1(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{3}$ для $b < 0$ и $P_1(\lambda_2|\lambda_2) = \frac{1}{4}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{5}{12})$; $P_1(\lambda_2|\lambda_2) = \frac{1}{6}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{1}{2})$; $P_1(\lambda_2|\lambda_2) = \frac{1}{8}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{13}{24})$; $P_1(\lambda_2|\lambda_2) = \frac{1}{10}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{17}{30})$; $P_1(\lambda_2|\lambda_2) = \frac{1}{12}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{7}{12})$; $P_1(\lambda_2|\lambda_2) = \frac{1}{13}$ $(P_0(\lambda_1|\lambda_2) = \frac{23}{39})$, вычисленные по формулам (20).

На рис. 5–7 приведены графики числовых характеристик (20), построенные для численных значений табл. 4–6 соответственно.

Поведение отмеченных числовых характеристик (20), как и в случае $b > 0$, в зависимости от параметра λ_1 при $b < 0$ соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в изучаемой однолинейной СМО с входящим коррелированным MAP-потоком запросов.

4. Частный случай. Рекуррентный MAP-поток запросов

Для изучаемого частного случая имеем $b = 0$, что влечет за собой, как следует из (3), рекуррентность MAP-потока запросов. Сначала рассмотрим условия существования стационарных вероятностей $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i \geqslant 0$. По-прежнему рассмотрим ситуацию, когда $\lambda = \mu$. Тогда характеристическое уравнение (8) примет вид

$$
(21)\qquad \begin{aligned} \lambda_1\lambda_2(\xi - 1)^2\xi\Big\{&[1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)][1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)]\xi - \\ &- [2 - P_0(\lambda_1|\lambda_2) - P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\Big\} = 0, \end{aligned}
$$

при этом общее решение системы (5) выпишется в виде (9). Корни характеристического уравнения (21) есть

$$
(22)\qquad \xi_1 = \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = \frac{1}{1 - P_0(\lambda_1|\lambda_2)} + \frac{1}{1 - P_0(\lambda_2|\lambda_1)} > 1.
$$

С учетом (22) в общем решении (9) нужно положить $D_1 = D_2 = D_4 = 0$ и тогда получаем $P(i,1) = P(i,2) = 0$, $i \geqslant 0$. Последнее означает, что для случая $b = 0$ и при $\lambda = \mu$ финальное распределение $P(i,1)$, $P(i,2)$, $i \geqslant 0$, не существует и тем более не существует при $\lambda > \mu$.

Таблица 7. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от λ_1 для $b = 0$

$P_1(\lambda_1\|\lambda_1)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,831	0,781	0,750	0,726	0,707	0,698
1/6	0,888	0,854	0,833	0,818	0,805	0,799
1/8	0,916	0,891	0,875	0,863	0,854	0,850
1/10	0,933	0,913	0,900	0,891	0,883	0,880
1/12	0,944	0,927	0,917	0,909	0,902	0,900
1/13	0,949	0,933	0,923	0,916	0,910	0,907

Таблица 8. Зависимость средней длины очереди $E(I)$ от λ_1 для $b = 0$

$P_1(\lambda_1\|\lambda_1)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,030	0,056	0,083	0,111	0,139	0,152
1/6	0,013	0,023	0,033	0,043	0,053	0,058
1/8	0,007	0,012	0,018	0,023	0,028	0,030
1/10	0,004	0,008	0,011	0,014	0,017	0,019
1/12	0,003	0,005	0,008	0,010	0,0129	0,013
1/13	0,002	0,005	0,006	0,008	0,010	0,011

Таблица 9. Зависимость среднего числа запросов в системе $E(I + 1)$ от λ_1 для $b = 0$

$P_1(\lambda_1\|\lambda_1)$ \ λ_1	2	4	6	8	10	11
1/4	0,199	0,275	0,333	0,385	0,432	0,454
1/6	0,124	0,169	0,200	0,226	0,248	0,259
1/8	0,091	0,122	0,143	0,160	0,174	0,181
1/10	0,071	0,095	0,111	0,124	0,134	0,139
1/12	0,059	0,078	0,091	0,101	0,109	0,113
1/13	0,054	0,072	0,083	0,092	0,100	0,103

Изучим ситуацию $\lambda < \mu$. Характеристическое уравнение (6) для случая $b = 0$ выпишется в виде

$$\xi(\xi-1)\Big\{\mu_1\mu_2\xi^2 - [\lambda_1\mu_2 + \mu_1(\lambda_2+\mu_2)]\xi + \\ + [\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2 P_1(\lambda_1|\lambda_1) + \lambda_2\mu_1 P_1(\lambda_2|\lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1)]\Big\} = 0. \tag{23}$$

Корни характеристического уравнения (23) есть $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 1$,

$$\xi_{1,2} = \Big\{(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2) \mp \Big[(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2)^2 - \\ - 4\mu_1\mu_2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2 P_1(\lambda_1|\lambda_1) + \lambda_2\mu_1 P_1(\lambda_2|\lambda_2) - \\ - \lambda_1\lambda_2 P_0(\lambda_1|\lambda_2)P_0(\lambda_2|\lambda_1))\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}/2\mu_1\mu_2, \tag{24}$$

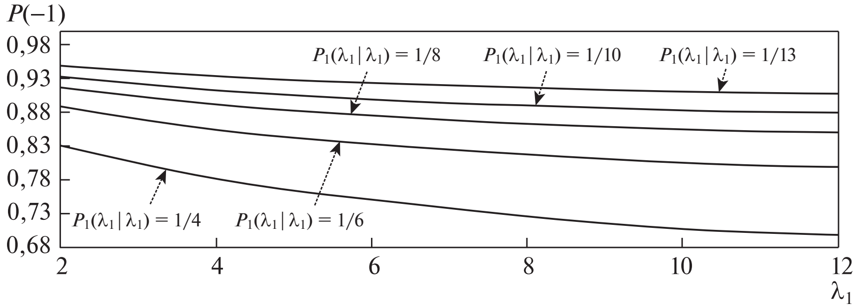

Рис. 8. Зависимость вероятности простоя $P(-1)$ от λ_1 для $b = 0$.

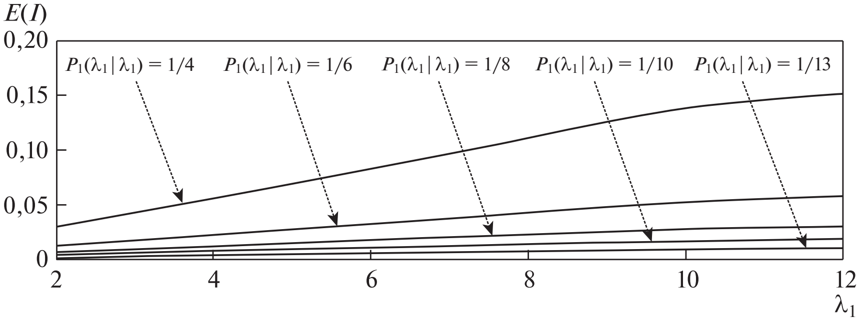

Рис. 9. Зависимость средней длины очереди $E(I)$ от λ_1 для $b = 0$.

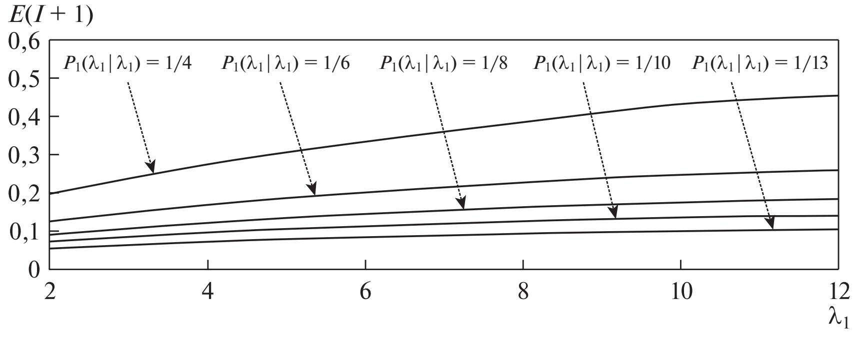

Рис. 10. Зависимость среднего числа запросов в системе $E(I+1)$ от λ_1 для $b = 0$.

$0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$. С учетом (23) и (24) общее решение (12) системы (5) примет вид

$$P(i,1) = A_1\xi_1^i, \quad P(i,2) = C_1A_1\xi_1^i, \quad i = 0,1,\ldots\,. \tag{25}$$

В (25) константа C_1 определена в (14) для $s = 1$. Для определения константы A_1 и вероятностей $P(-1,1)$, $P(-1,2)$ воспользуемся уравнениями (15) и условием нормировки. Тогда находим

$$\begin{gathered} P(-1,1) = a_{11}A_1; \quad P(-1,2) = a_{21}A_1; \\ A_1 = \frac{1-\xi_1}{1 + C_1 + (a_{11}+a_{21})(1-\xi_1)}, \end{gathered} \tag{26}$$

C_1 определена в (14) для $s = 1$; a_{21}, a_{11} определены в (16); ξ_1 — в (24).

Формулы (25), (26) позволяют найти характеристики системы:

$$P(-1) = (a_{21} + a_{11})A_1;$$
$$E(I) = A_1\xi_1 \frac{1 + C_1}{(1 - \xi_1)^2}, \quad E(I + 1) = \frac{(1 + C_1)A_1}{(1 - \xi_1)^2}, \tag{27}$$

где C_1 определена в (14) для $s = 1$; a_{21}, a_{11} определены в (16); A_1 — в (26); ξ_1 — в (24).

В табл. 7–9 приведены зависимости характеристик $P(-1)$, $E(I)$, $E(I+1)$ от параметра λ_1 ($\lambda_1 = 2, 4, \ldots, 10, 11$) при фиксированных значениях параметров $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 12$, $\mu_2 = 2$ для $b = 0$ и ($P_1(\lambda_i|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = \frac{1}{4}$; $P_0(\lambda_1|\lambda_2) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = \frac{1}{2}$); ($P_1(\lambda_i|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = \frac{1}{6}$; $P_0(\lambda_1|\lambda_2) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = \frac{2}{3}$); ($P_1(\lambda_i|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = \frac{1}{8}$; $P_0(\lambda_1|\lambda_2) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = \frac{3}{4}$); ($P_1(\lambda_i|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = \frac{1}{10}$; $P_0(\lambda_1|\lambda_2) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = \frac{4}{5}$); ($P_1(\lambda_i|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = \frac{1}{12}$; $P_0(\lambda_1|\lambda_2) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = \frac{5}{6}$); ($P_1(\lambda_i|\lambda_i) = P_1(\lambda_j|\lambda_i) = \frac{1}{13}$; $P_0(\lambda_1|\lambda_2) = P_0(\lambda_2|\lambda_1) = \frac{11}{13}$); $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, вычисленные по формулам (27).

Поведение отмеченных числовых характеристик, как и в случаях $b > 0$, $b < 0$, в зависимости от параметра λ_1 при $b = 0$ соответствует физическим представлениям о процессе обслуживания в изучаемой однолинейной СМО с входящим рекуррентным MAP-потоком запросов.

На рис. 8–10 приведены графики числовых характеристик (27), построенные для численных значений табл. 7–9 соответственно.

5. Заключение

Поставленные во втором разделе статьи задачи анализа однолинейной СМО с входящим коррелированным MAP-потоком запросов с двумя состояниями решены в полном объеме.

Подытожим полученные результаты и приведем итоговые формулы.

Случай $b > 0$. Стационарные вероятности $P(i, 1)$, $P(i, 2)$ определяются в виде $P(i, 1) = A_1\xi_1^i + A_2\xi_2^i$, $P(i, 2) = C_1A_1\xi_1^i + C_2A_2\xi_2^i$, $i = 0, 1, \ldots$, где константы C_s, $s = 1, 2$, определены формулой (14); ξ_1, ξ_2 ($0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$) — корни кубического уравнения (6); вероятности $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ и константы A_1, A_2 определены формулами (16); числовые характеристики $P(-1)$, $E(I)$, $E(I + 1)$ — формулами (17).

Случай $b < 0$. Стационарные вероятности $P(i, 1)$, $P(i, 2)$ определяются в виде $P(i, 1) = A_2\xi_2^i$, $P(i, 2) = C_2A_2\xi_2^i$, $i = 0, 1, \ldots$, где константа C_2 определена формулой (14) для $s = 2$; ξ_2 ($0 < \xi_2 < 1$) — корень кубического уравнения (6); вероятности $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ и константа A_2 определены формулами (19); числовые характеристики $P(-1)$, $E(I)$, $E(I + 1)$ — формулами (20).

Случай $b = 0$. Стационарные вероятности $P(i, 1)$, $P(i, 2)$ определяются в виде $P(i, 1) = A_1\xi_1^i$, $P(i, 2) = C_1A_1\xi_1^i$, $i = 0, 1, \ldots$, где константа C_1 определена формулой (14) для $s = 1$; ξ_1 ($0 < \xi_1 < 1$) — корень (24) характеристического уравнения (23); вероятности $P(-1, 1)$, $P(-1, 2)$ и константа A_1 определены формулами (26); числовые характеристики $P(-1)$, $E(I)$, $E(I+1)$ — формулами (27).

При выводе формул (17), (20), (27) привлечены метод введения дополнительной переменной и метод диаграмм интенсивностей переходов (метод сечений стохастического графа) [8]. Случай $b = 0$ приводит к вырождению входящего коррелированного MAP-потока запросов в рекуррентный.

Аналитические формулы (17), (20), (27) позволяют без привлечения численных методов находить значения числовых характеристик при заданных параметрах MAP-потока запросов. Приведенные в статье графические зависимости числовых характеристик соответствуют физическим представлениям о процессе обслуживания в изучаемой СМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cox D.R.* The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51. No. 3. P. 433–441.
2. *Kingman J.F.C.* On doubly stochastic Poisson processes // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60. No. 4. P. 923–930.
3. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
4. *Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
5. *Neuts M.F.* A versatile Markov point process // J. Appl. Probab. 1979. V. 16. No. 4. P. 764–779.
6. *Lucantoni D.M.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Communications in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. No. 1. P. 1–46.
7. *Lucantoni D.M., Neuts M.F.* Some steady-state distributions for the MAP/SM/1 queue // Communications in Statistics Stochastic Models. 1994. V. 10. No. 3. P. 575–598.
8. *Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М.: Техносфера, 2018. 564 с.
9. *Горцев А.М., Соловьев А.А.* Вероятность ошибки при оценивании состояний потока физических событий // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 5. С. 54–60.
10. *Горцев А.М., Нежельская Л.А., Соловьев А.А.* Оптимальная оценка состояний MAP-потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени // АиТ. 2012. № 8. С. 49–63.

    Gortsev A.M., Nezhel'skaya L.A., Solov'ev A.A. Optimal state estimation in MAP event flows with unextendable dead time // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 8. P. 1316–1326.
11. *Горцев А.М., Соловьев А.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов MAP-потока событий и условия его рекуррентности // Вест. Томск.

гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. № 3(20). С. 32–41.

12. *Горцев А.М., Соловьев А.А.* Сравнение МП- и ММ-оценок длительности непродлевающегося мертвого времени в MAP-потоке событий // Вест. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 4(33). С. 13–22.
13. *Горцев А.М., Соловьев А.А.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов потока физических событий при непродлевающемся мертвом времени // Изв. вузов. Физика. 2014. Т. 57. № 7. С. 103–111.
14. *Горцев А.М., Соловьев А.А.* Оценка максимального правдоподобия длительности непродлевающегося мертвого времени в потоке физических событий // Изв. вузов. Физика. 2015. Т. 58. № 11. С. 141–149.
15. *Бинь Сунь, Дудин С.А., Дудина О.С., Дудин А.Н.* Модель обслуживания мобильных пользователей в соте с адаптивной модуляцией, учитывающая влияние случайной среды // АиТ. 2021. № 5. С. 86–105.

    Bin Sun, Dudin S.A., Dudina O.S., Dudin A.N. A Customer Service Model in an Adaptive-Modulation Mobile Communication Cell with Allowance for Random Environment // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 5. P. 812–826.
16. *Горцев А.М., Нежельская Л.А.* Аналитическое исследование однолинейной СМО с входящим асинхронным потоком событий // АиТ. 2022. № 8. С. 65–80.
17. *Нежельская Л.А.* Оценка состояний дважды стохастических потоков событий. Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. 210 с.
18. *Медведев Г.А.* Анализ стохастических графов, описывающих поведение шаговых систем автоматического поиска // Автоматика и вычислительная техника. 1968. № 4. С. 27–30.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 27.02.2023

После доработки 25.04.2023

Принята к публикации 11.05.2023